

SPOŘENÍ

Úloha 3

Členové bytového družstva se dohodli, že za 5 let udělají novou střechu (počet bytových jednotek je 12). Na pokrytí části předpokládaných nákladů zřídili účet v bance úročený 2% p.a. Fond se bude vytvářet tak, že koncem každého měsíce bude na společný účet zaslána částka 1000 Kč za každou bytovou jednotku. Za předpokladu, že všichni tento plán dodrží

- určete, jaké výše dosáhne fond za 5 let,
- zjistěte, jak by se výsledná částka změnila, kdyby po 2 letech vyčerpali z fondu jednorázově 100 000 Kč, ale pak pokračovali v jeho vytváření beze změn.

Předpokládejme roční úrokové období.

Řešení:

Pro určení stavu fondu po 5 letech použijeme vzorec pro kombinované spoření polhůtní

$$S = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i};$$

$$S = 4.447373280 \cdot 10^5 \quad (1)$$

kde S je naspořená částka, m je počet úložek během úrokového období (předpokládáme roční úrokové období), x je výše úložky na konci každé m -tiny roku, i je roční úroková sazba vyjádřena desetinným číslem, n je doba spoření vyjádřena v letech.

Řešení krok za krokem:

ad a)

Na začátku provedeme inicializaci proměnných jejich vynulováním příkazem "restart". To oceníme při opakovaném použití dokumentu.

```
restart;
```

1. Definujeme funkci $S(x,i,m,n)$ pro výpočet uspořené částky

Pokud je přiřazovací příkaz ukončen dvojtečkou ($:$) nebo středníkem ($;$), provede se stisknutím klávesy <Enter>.

$$S := \text{unapply} \left(m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i \right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}, x, i, m, n \right);$$

$$(x, i, m, n) \rightarrow \frac{m x \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(m-1) i}{m} \right) ((1+i)^n - 1)}{i} \quad (2)$$

2. Zadejme hodnoty parametrů S, i, m, x dle zadání úlohy:

Pokud příkaz není ukončen středníkem (;) nebo dvojtečkou (:) a následuje za ním znak "rovná se" (=) a hodnota výrazu, postupujte při jeho provedení takto:

- 1) Umístěte nad příkaz (výraz) ukazatel myši a stiskněte její pravé tlačítko.
- 2) Z poskytnuté kontextové nabídky příkazů vyberte "Evaluate and Display Inline"
(Zmáčknutí pravého tlačítka myši a výběr z nabídky lze nahradit stisknutím kombinace kláves <Ctrl>+<=>).
- 3) Za výrazem se objeví znaménko "=" a jeho aktuální hodnota.

Výše měsíční úložky (12 bytových jednotek dohromady):	$x := 12 \cdot 1000 = 12000$ Kč
Roční úroková sazba:	$i := 0.02 : \%$
Počet úložek během úrokového období (1 rok):	$m := 12 :$
Délka spoření:	$n := 5 : \text{roků}$

3. Dosazením do funkčního předpisu (2) vypočteme celkovou uspořenou částku

Celková naspořená částka činí $S(x, i, m, n) = 756251,11$ Kč.

Závěr

Za 5 let při spoření částky 12 000 Kč ke konci každého měsíce při roční úrokové míře 2% a ročním připisování úroků obdržíme částku 756 251 Kč.

ad b)

1. Zadáme hodnoty parametrů S, i, m, x dle zadání úlohy:

Výše měsíční úložky (12 bytových jednotek dohromady):	$x := 12 \cdot 1000 = 12000$ Kč
Roční úroková sazba:	$i := 0.02$ %
Počet úložek během úrokového období (1 rok):	$m := 12$:
Délka spoření:	$n := 2$: roky

Poznámka:

V případě výběru částky 100 000 Kč po 2 letech spoření musíme nejdříve zjistit kolik bylo fondem za dva roky naspořeno. Naspořenou částku zjistíme pomocí vztahu (1). Kromě parametru n (nyní je $n = 2$), zůstávají hodnoty zbývajících parametrů stejné jako v případě úlohy a).

3. Dosazením do funkčního předpisu (2) vypočteme částku, kterou naspoříme za 2 roky

Pro výpočet naspořené částky použijeme funkci $S(x, i, m, n)$, definovanou vztahem (2). Pokud jste neřešili úkol a) a tuto funkci nemáte zavedenou v paměti, je třeba potvrdit (klávesou <Enter>) příkaz předcházející vztahu (2).

Po dvou letech bude ve fondu naspořena částka $S(x, i, m, n) = 293546,40$ Kč. Vzhledem k tomu, že bytové družstvo z fondu vybereme 100 000 Kč, zůstane po dvou letech ve fondu částka $293546,4 - 100000 = 1.935464 \cdot 10^5$ Kč.

4. Zjištění stavu fondu po 5 letech, když po dvou letech byla vybrána částka 100 000 Kč

Po výběru 100 000 Kč ve fondu zbylo 193 546 Kč. Tato částka se nyní bude 3 roky úročit úrokovou sazbou 2 % p.a. s ročním připisováním úroků, a to podle vzorce $FV = PV \cdot (1 + i)^n$

$$FV = PV (1 + i)^n \quad (3)$$

kde FV je výše vložené částky zúročené po $n := 3$: letech,

$PV := 193546$: Kč je současná hodnota vkladu,

$i := 0.02$: je roční úroková sazba vyjádřená desetinným číslem.

Potom $FV := PV \cdot (1 + i)^n = 205392,56$ Kč.

Vzhledem k tomu, že bytové družstvo pokračuje po výběru ještě ve spoření po dobu 3 let, bude ve fondu na konci 5. roku částka $FV + S(x, i, m, n) = 650129,89$ Kč, kde $x = 12 \cdot 1000$ Kč, $i = 0,02$, $m = 12$, $n = 3$.

Závěr

Po 5 letech spoření s výběrem 100 000 Kč bude naspořena částka $FV + S(x, i, m, n) = 650129,89$ Kč.

Úlohy

1. Jakou částku musíme spořit počátkem každého čtvrtletí, aby uspořená částka byla ve výši 50 000 Kč při neměnné 3%-ní roční úrokové sazbě, pololetním připisování úroků a délce spoření 5 let?
2. Jaká musí být roční úroková míra, abychom za 6 let obdrželi na spořicímu účtu částku 100 000 Kč při měsíčních úložkách na počátku měsíce ve výši 1200 Kč a čtvrtletním připisování úroků?