SLOŽENÉ ÚROKOVÁNÍ

Klasický termínovaný vklad

PŘÍKLAD: Podnikatel uložil na klasický termínovaný vklad částku 300 000 Kč. Jaká bude výše kapitálu za 3 roky, jestliže úroková sazba činí 2% p.a. a je

a) roční úrokové období,

b) pololetní úrokové období,

c) čtvrtletní úrokové období?

Úroky jsou připisovány k vkladu a dále s vkladem úročeny.

Řešení:

Pro výši K_n částky naspořené po n letech při m úrokových obdobích za jeden rok platí formule

$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}$, kde K_0 je výše počátečního vkladu a i je roční úroková sazba (vyjádřená desetinným číslem). V případě, že jsou úroky připisovány jednou ročně (tj. $m = 1$) dostáváme jednodušší formuli ve tvaru $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$.

Odvození formule $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}$

Nejprve odvodíme vztah pro případ pololetního připisování (m = 2) za 3 roky (n = 3):

```
> restart;
> K11:=factor(K0+K0*i/2);     K12:=factor(K11+K11*i/2);
```

$$K11 := \frac{1}{2} K0 \, (2 + i)$$

$$K12 := \frac{1}{4} K0 \, (2 + i)^2 \quad \textbf{(1.1)}$$

```
> K21:=factor(K12+K12*i/2);   K22:=factor(K21+K21*i/2);
```

$$K21 := \frac{1}{8} K0 \, (2 + i)^3$$

$$K22 := \frac{1}{16} K0 \, (2 + i)^4 \quad \textbf{(1.2)}$$

```
> K31:=factor(K22+K22*i/2);   K32:=factor(K31+K31*i/2);
```

$$K31 := \frac{1}{32} K0 \, (2 + i)^5$$

$$K32 := \frac{1}{64} K0 \, (2 + i)^6 \quad \textbf{(1.3)}$$

Vidíme, že exponent je roven $6 = 2 \cdot 3$ a jmenovatel zlomku je $64 = 2^6$, což odpovídá formuli pro

K_n. Každý snadno nahlédne, že zobecněním pak pak dostaneme formuli $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}$

Formuli pro K_n definujeme v Maple jako funkci s proměnnými K0, i, n, m:

restart;

$K := (K0, i, n, m) \rightarrow K0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n};$

$$(K0, i, n, m) \rightarrow K0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m\,n} \tag{1}$$

ad a) roční úrokové období

Výše naspořeného kapitálu je $K(300000, 0.02, 3, 1) =$ 318362,40 Kč

ad b) pololetní úrokové období

Výše naspořeného kapitálu je $K(300000, 0.02, 3, 2) =$ 318456,04 Kč

ad c) čtvrtletní úrokové období

Výše naspořeného kapitálu je $K(300000, 0.02, 3, 4) =$ 318503,34 Kč

Poznámky

1. Z výsledků řešení úlohy je vidět, že čím se úroky připisují častěji, tím se uložená částka více zhodnocuje. Nejvyšší zhodnocení potom odpovídá případu, kdy $m \rightarrow \infty$.
V případě naší úlohy by naspořená částka dosáhla výše *limit*(*K*(300000, 0.02, 3, *m*), *m* = *infinity*) = 318550,96 Kč.
Obecně potom platí

Limit(*K*(*K0*, *i*, *n*, *m*), *m* = *infinity*) = *limit*(*K*(*K0*, *i*, *n*, *m*), *m* = *infinity*);

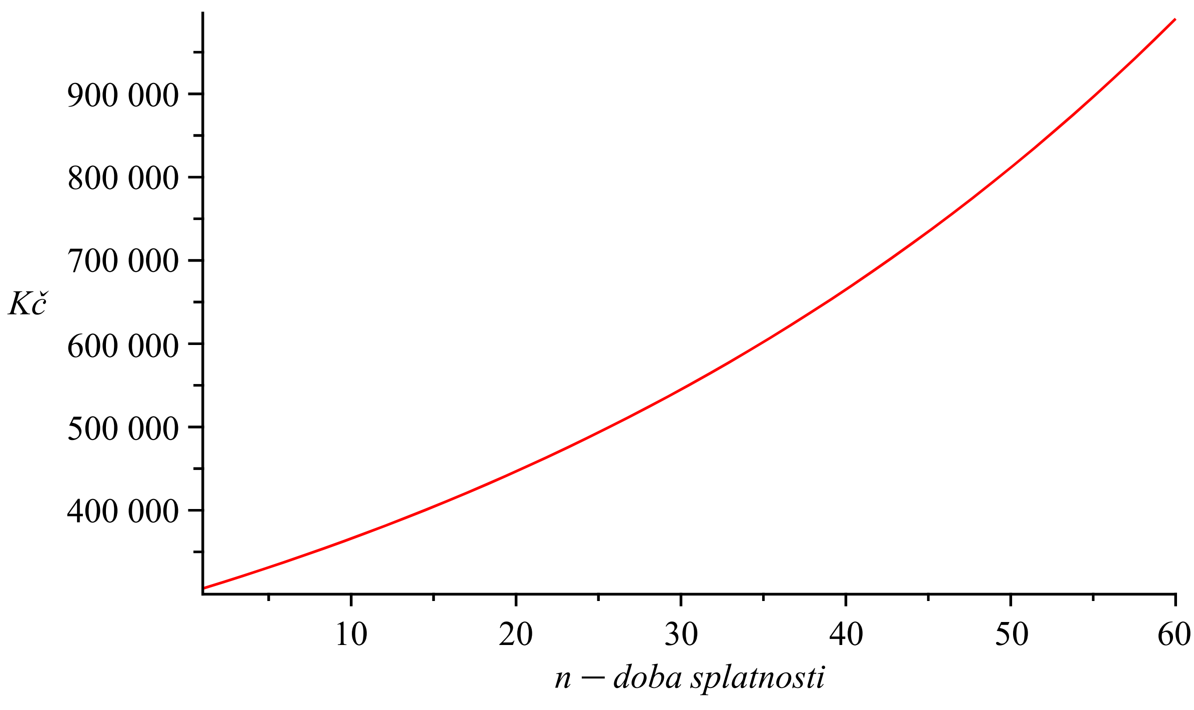
$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(K0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m\,n} \right) = e^{i\,n}\, K0 \tag{2}$$

2. Porovnáním výsledků a), b) a c) vidíme, že při změně hodnoty m z 1 na 2 dojde k větší změně naspořeného kapitálu než při změně hodnoty m z 2 na 4. Toto je obecně platná vlastnost - největší finanční skok nastane při změně úrokového období z jednoho roku na půl roku. Můžeme se o tom přesvědčit i grafem:

```
plots[pointplot]([seq([m, K(300000, 0.02, 3, m)], m = 1 ..10)], view = [0 ..10, 318300 ..318600],
    labels = [m - počet úrokových období za rok, Kč]);
```

3. Je zřejmé, že čím je doba splatnosti n delší, tím je vyšší nárůst uspořené částky. Přesvědčíme se o tom grafickým znázorněním závislosti K_n na n při pevně daném $m = 2$:

plot(*K*(300000, 0.02, *n*, 2), *n* = 1 ..60, *labels* = [*n* - *doba splatnosti*, *Kč*]);



Z výše uvedeného grafu vidíme, že při narůstající době splatnosti nám výše kapitálu exponenciálně roste.

Úlohy

Praktické problémy týkající se termínovaných vkladů řešíme prostřednictvím rovnice

$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}$ resp. $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$, kde je vždy jeden parametr neznámý a zbývající jsou známé.

Úloha 1: Jakou částku musíme investovat do garantovaného dluhopisového fondu, abychom zajistili dnes 14-ti letému dítěti v 19 letech částku 300 000 Kč na vysokoškolské studium. Předpokládejme dobu splatnosti 5 let a dále, že po tuto dobu bude míra výnosnosti 5% p.a. (Uvažujeme roční připisování úroků).

Řešení:

Předpokládáme roční úrokové období, tj. $m = 1$. Z rovnice $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$ vyjádříme K_0 a spočítáme jeho hodnotu:

restart;

$K0 := unapply\left(solve\left(Kn = K0 \cdot (1+i)^n, K0\right), Kn, i, n\right);$

$$(Kn, i, n) \rightarrow \frac{Kn}{(1+i)^n} \tag{3}$$

Odpověď:

Musíme investovat částku $K0(300000, 0.05, 5) =$ 235057,85 Kč.

Úloha 2: Jaká musí být míra výnosnosti, aby náš 14-ti letý potomek obdržel ve věku 19 let částku 300000 Kč, jestliže dnes máme k dispozici 250 000 Kč?

Řešení:

Předpokládáme roční úrokové období, tj. $m = 1$. Z rovnice $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$ vyjádříme i a spočítáme jeho hodnotu:

restart;

$i := unapply\left(simplify\left(solve\left(Kn = K0 \cdot (1+i)^n, i\right)\right), Kn, K0, n\right);$

$$(Kn, K0, n) \rightarrow \left(\frac{Kn}{K0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \tag{4}$$

Odpověď:

Míra výnosnosti musí být $evalf(i(300000, 250000, 5), 4) \cdot 100 =$ 3.700 %.

Úloha 3: Máme k dispozici částku 200 000 Kč a možnost ji investovat s mírou výnosnosti 4%. Předpokládáme, že se míra výnosnosti v budoucnosti nebude příliš měnit. Potřebujeme, aby náš právě narozený potomek v 19 letech získal 300 000 Kč na studium. V kolika letech dítěte máme při dané míře výnosnosti daný kapitál investovat?

Řešení:

Předpokládáme roční úrokové období, tj. $m = 1$. Z rovnice $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$ vyjádříme n a spočítáme jeho hodnotu:

restart;

$n := unapply\left(simplify\left(solve\left(Kn = K0 \cdot (1+i)^n, n\right)\right), Kn, K0, i\right);$

$$(Kn, K0, i) \rightarrow \frac{\ln\left(\frac{Kn}{K0}\right)}{\ln(1+i)} \tag{5}$$

Odpověď:
Pokud budeme investovat částku 200000,- Kč za výše uvedených podmínek, získáme požadovanou částku 300000,- za $evalf(n(300000, 200000, 0.04)) = 10.33803507$ roků.
Z toho plyne, že při dané míře výnosnosti musíme investovat kapitál ve věku dítěte $19 - evalf(n(300000, 200000, 0.04)) = 8.66196493$ roků.