TEMATICKÝ CELEK „SHODNOST A OSOVÁ SOUMĚRNOST“

Materiál vytvořil Jiří Vaníček v r. 2010 za vydatné pomoci Miroslavy Huclové, Ladislava Kašpárka, Josefa Lombarta, Daniela Mokoše, Luboše Pacandy a Petra Tupého při tvorbě souborů v *Geogebře*.

V této metodické příručce chceme představit konkrétní vizi, jak vyučovat celý tematický celek na základě použití technologií. Vybrali jsme tematický celek **Osová souměrnost**, na kterém chceme předvést didaktické možnosti prostředí dynamické geometrie i efekt jeho nasazení pro změny přístupu k výuce matematiky. Dle našeho názoru jsou pro učitele cenné konkrétní aktivity a úlohy, na nichž je patrné, jak je výpočetní technika využita.

Tato příloha není zařazena jako plnohodnotná kapitola této publikace proto, že v takto ucelené podobě nebyla ve školách vyzkoušena (i když jednotlivé použité úlohy ověřovány byly). Ověřování a testování vhodnosti toho kterého typu úloh bylo prováděno jednak při výuce na středních a základních školách, jednak zprostředkovaně při přípravě učitelů o školeních SIPVZ o použití počítače ve výuce matematiky – učitelé zkoušeli pracovat s takovými typy úloh a aktivit. Konkrétní úlohy byly s některými účastníky těchto školení konzultovány, někteří z učitelů připravovali podobné sady vlastních úloh jako kvalifikační práce metodické přípravy lektorů těchto školení.

Elektronické verze obrázků této kapitoly lze použít jako zadání úloh nebo ke kontrole správnosti řešení. Soubory jsou vytvořeny v programu *Geogebra* a umístěny do zvláštního souboru, který si lze stáhnout z http://www.pf.jcu.cz/vanicek/GGebra/soumernost_s_Geogebrou.zip; konkrétní popis konstrukcí je připraven pro konstruování v tomto prostředí.

Materiál je vytvořen podle přílohy A knihy VANÍČEK, J. *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie*. Praha: PedF UK, 2009, 212 s. ISBN 978-80-7290-394-8. Původní příloha byla vytvořena pro program Cabri, zde je přepracováno pro použití Geogebry.

NASAZENÍ POČÍTAČE

Přístup, který je založen na technologiích, dovoluje nejen větší rychlost konstruování, ale take experimentování, objevování, manipulování s hotovými figurami s dynamickými změnami objektů. To žákovi umožní:

- nejprve pozorovat, jak se zobrazení chová;
- rozebrat jeho chování v různých situacích, např. nacházet samodružné prvky, invarianty pohybu;
- vlastní aktivitou přijít na to, jak se obraz v tomto zobrazení sestrojí.

Následně je mu umožněno zkoumat speciální případy, posléze třídit shodná zobrazení a využít je při projektech. Nabízí se např. možnost ukázat shodné zobrazení jako speciální případ zobrazení neshodného.

Jistě je možné volit postup výuky tak, že nejprve se žáci naučí rýsovat obraz v osové souměrnosti, a teprve pak jim ukázat nástroj *Osová souměrnost* jako užitečný zlepšovák. Při ověřování tohoto postupu však žáci sami objevovali nástroj *Osová souměrnost* dříve, než to učitel potřeboval, a nebyli motivováni ke komplikovanějším konstrukcím. Hlavním důvodem je však, že standardní postup neprovází objevování a zkoumání. Neumožňuje, aby žák objevil, jak obraz sestrojit (tedy jak tlačítko *Osová souměrnost* pracuje), je po něm žádána reprodukce a aplikace sděleného poznatku.

Cílem takové výuky pak není naučit žáka sestrojit obraz v daném zobrazení a narýsovat obrázek, ale porozumět vztahu mezi vzorem a obrazem a hlouběji poznat shodnost jako vztah dvou objektů, z nichž jeden závisí na druhém.

Obsah tematického celku „Shodnost a osová souměrnost“

Tematický celek je pojat tak, že

- po úvodní motivační části (manipulací se seznámit s rozdíly mezi shodným a neshodným zobrazením, mezi přímou a nepřímou shodností) následuje
- seznámení s osovou souměrností prohlížením hotových figur, jejich pozorováním v pohybu
- následuje sestrojení obrazu v osové souměrnosti, nejprve pomocí počítačového nástroje, který obraz sestrojí automaticky, později vlastní konstrukcí (na základě předchozího objevování, jak je obraz v počítači sestrojen)
- ihned poté následuje hledání vlastností osové souměrnosti (samodružné body a samodružné objekty, hledání osy k dvojici vzor – obraz) a zkoumání osově souměrných útvarů (pomocí samodružnosti, hledání jejich vlastností, konstruování)
- tematický celek doplňují aplikační úlohy a projekty, využívající osové souměrnosti, a úlohy, používající vícenásobné zobrazení.

Jednotlivé body obsahu nelze chápat jako přizpůsobené na vyučovací jednotky. Některá témata jsou časově náročnější, jiná budou velmi krátká. Také některé úlohy budou žáci řešit řádově minutu, jiné i čtvrt hodiny. Obecně platí, že úlohy na manipulaci jsou krátké, konstrukční úlohy delší.

A.1. Rozlišení shodného a neshodného zobrazení
A.2. Seznámení s osovou souměrnosti manipulací s hotovými figurami
A.3. Konstrukce obrazu v osové souměrnosti
A.4. Hledání vlastností osové souměrnosti
A.5. Vlastnosti osově souměrných útvarů
A.6. Aplikační úlohy s použitím souměrnosti
A.7. Skládání zobrazení
A.8. Projekty s aplikací znalostí osové souměrnosti

1 ROZLIŠENÍ SHODNÉHO A NESHODNÉHO ZOBRAZENÍ

V úvodní, motivační kapitole se žáci seznámí se shodností a neshodností pomocí manipulace s hotovými figurami, které učitel žákům předloží. Na interaktivních obrázcích jsou zkonstruované objekty navzájem shodné či neshodné, některé jsou shodné pouze ve zvláštních situacích.

Pro manipulaci žáků s obrázky je individuální činnost žáka u počítače vhodnější než centrální projekce. V následujících úlohách žáci evidují, že obraz je konstruován ze vzoru a je na něm v tomto smyslu závislý. Vidí také, že jde o útvary dva, nikoliv že se jeden převtělí do druhého nebo že se útvar přemístí do jiné polohy (což by mohla evokovat průsvitková metoda ověření shodnosti).

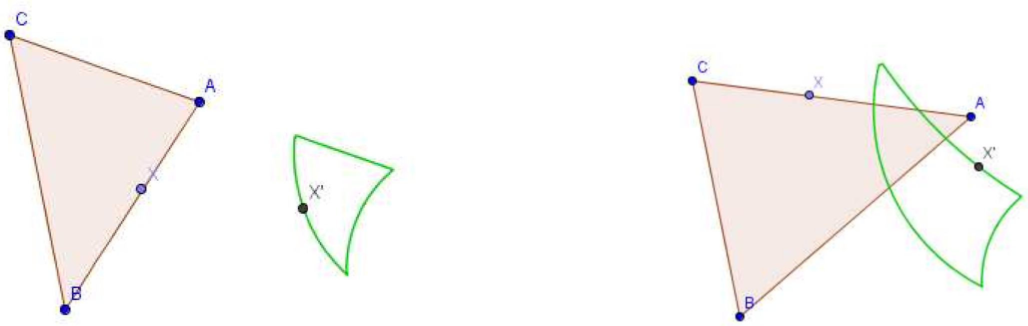
Seznam aktivit (v závorce je název příslušného příkladu):

1. Ověření shodnosti přemístěním obrazu na vzor (Shodné a neshodné útvary)
2. Pozorování shodnosti na složité křivce a jejím shodném obrazu (Vzor a obraz)
3. Seznámení s neshodností, pozorování dvou neshodných obrazců (Neshodné zobrazení)
4. Ověření shodnosti dvou obrazců měřením (Ověření shodnosti)

1. Příklad: Neshodné zobrazení

Žáci vidí evidentní ukázku zobrazení, které jistě není podobností ani shodností. Manipulují s figurou a pozorují toto „záhadné" zobrazení. Motivační úloha.

Zadání: *Obrazem trojúhelníka může být i jiný útvar než trojúhelník. Pohybujte trojúhelníkem na obrázku; uchopte jeho strany nebo vrcholy a pozorujte jeho obraz. Můžete nastavit situaci, kdy budou oba útvary shodné?*



obr. 1 – Neshodné zobrazení, obrazem trojúhelníka je diametrálně odlišný útvar. Tatáž figura v různých polohách při manipulaci, obr. vpravo – možnost pozorovat dvojici odpovídajících si bodů na vzoru a obrazu.

Žáci tahají za objekty na ploše, pozorují jejich chování, nakolik jsou si „podobné" a jak se ovlivňují. Přitom mohou objevit jisté vazby mezi vzorem a obrazem (např. umístí-li se vrchol vzoru na jednu ze stran obrazu, také vrchol obrazu bude ležet na jedné ze stran vzoru).

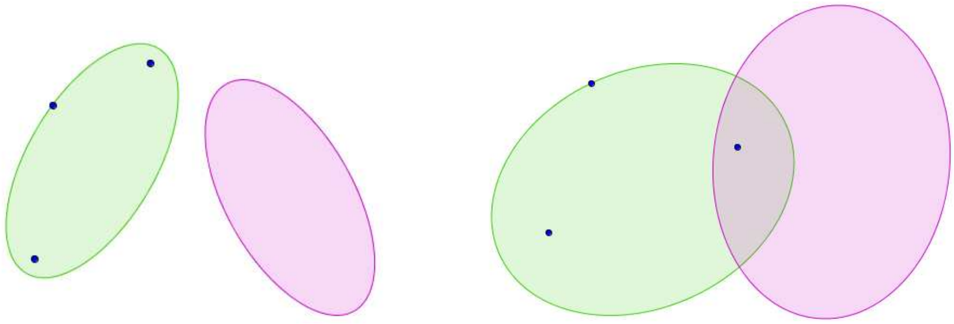
Správnou odpovědí na otázku je, že nelze nastavit situaci takovou, aby vzor a obraz byly shodné. Ve figuře se nacházejí dva naprosto odlišné objekty, ovšem manipulací lze ukázat, že se jedná o vzor a obraz v zobrazení (konkrétně jde o kruhovou inverzi). Cílem této úlohy však není objevování typu použitého zobrazení ani zaměření se na toto zobrazení.

2. Příklad: Vzor a obraz

Motivační úloha. Žáci tahají za elipsu nebo mění její tvar táhnutím za vyznačené body. Přitom pozorují chování druhé elipsy a získávají tak základní představu o shodném zobrazení, protože obě pro ně poměrně bizarní křivky jsou deklarovány jako shodné. Žáci zde zkoumají, co to znamená být shodný, tuto vlastnost analyzují na chování netriviálních tvarů. Taháním za vyznačené body se mění tvar kuželosečky.

Zadání: *Otevřete soubor* `A 3 shodné elipsy.ggb`*. Na nákresně jsou dvě křivky. Tahejte za levou křivku nebo za body na této křivce, pozorujte. Obě křivky budou pořád shodné.*

Rozšiřující úloha*: Táhnutím za vyznačené body měňte tvar levé křivky tak, aby se obě křivky co nejvíce překrývaly (případně splynuly).*



obr. 2, 2 – Dvě shodné elipsy jako vzor a obraz ve shodném zobrazení slouží žákům k pozorování chování shodnosti na neelementárních objektech. Tatáž figura v různých pozicích.

Metodická poznámka: Manipulací si žáci uvědomí, že ve figuře je možné uchopit a pohybovat pouze jedním z objektů (vzorem), že tvar a umístění obrazu vždy závisí na tvaru a umístění vzoru a tudíž že s obrazem nelze manipulovat.

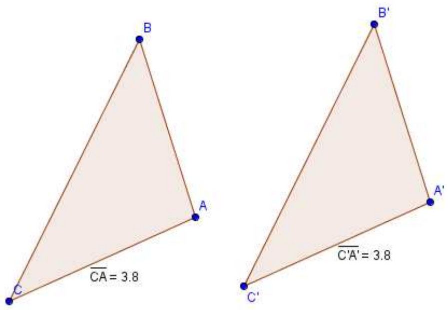
Použité zobrazení, otočení o 60°, je vybráno záměrně, aby nedošlo k překrytí pojmů rovnoběžnost a shodnost. Cílem úlohy však není objevovat typ zobrazení, ani jej konstruovat. Účelné není ani zavádět pojem elipsy, protože ta je použita pouze jako příklad složitější čáry.

V rozšiřující aktivitě lze zobrazit bod na trojúhelníku a jeho obraz v tomto zobrazení. Je možno propedeuticky zkoumat incidenci, případně samodružnost (jeden bod leží na vzoru, druhý na obrazu; zda vždy průsečík vzoru a obrazu splývá sám se sebou).

4. Příklad: Ověření shodnosti

V úloze žáci hledají, jakým způsobem ověřit shodnost dvou útvarů. Překrytím a změřením žáci ověří, zda jsou útvary shodné. Pomocí manipulace se ubezpečí, že se jedná o vzor a obraz v zobrazení a že jsou útvary shodné permanentně, i při změněném tvaru a umístění.

Zadání:
V souboru `A 4 ověření shodnosti.ggb` *jsou na nákresně dva trojúhelníky. Ověřte jejich shodnost.*



obr. 3 – Ověření shodnosti dvou útvarů změřením. Ověření permanentní shodnosti při manipulaci.

Figura obsahuje dva shodné trojúhelníky, vzor a obraz v posunutí (opět není potřeba tuto informaci žákům sdělovat). Uchopí-li žáci celý trojúhelník *ABC* (nikoliv jeho vrcholy), mohou jej „zasunout“ pod jeho obraz. Nástroji *Vzdálenost a délka, Velikost úhlu* žáci změří odpovídající délky stran a velikosti úhlů. Manipulací s vrcholy trojúhelníka ABC lze měnit tvar vzoru a ověřit, zda obraz je stále shodný se vzorem.

Metodické poznámky:
Pokud učitel předem neoznámí žákům, že mají ověřit shodnost měřením, dá jim tím šanci, aby sami našli nějaký způsob, jak shodnost ověřit. Často žáci volí přesunutí jednoho objektu na druhý. Je cenné, pokud žáci sami přijdou k poznatku, že měření je přesnější způsob ověření než pouhé vizuální překrytí.

Variantou zadání je použití figury, v níž jeden trojúhelník je pouze počítačovou kopií druhého, nikoliv jeho obrazem (v souboru `A 4 ověření shodnosti2.ggb` na CD jsou oba trojúhelníky shodné pouze v nastavené poloze, nejedná se o vzor a obraz v zobrazení). Cílem je poznání, že pouhé změření neověří permanentní, trvalou shodnost; s objekty je nutno manipulovat.

2 OSOVÁ SOUMĚRNOST – SEZNÁMENÍ

Po úvodní kapitole se v následující sadě úloh žáci seznámí s osovou souměrností formou prohlížení figur, pozorování chování objektů a získávání zkušeností s chováním osové souměrnosti v různých situacích a pozorují ji v její dynamice. Hotové figury obsahují osu souměrnosti, vzor a jeho obraz.

Seznam aktivit:

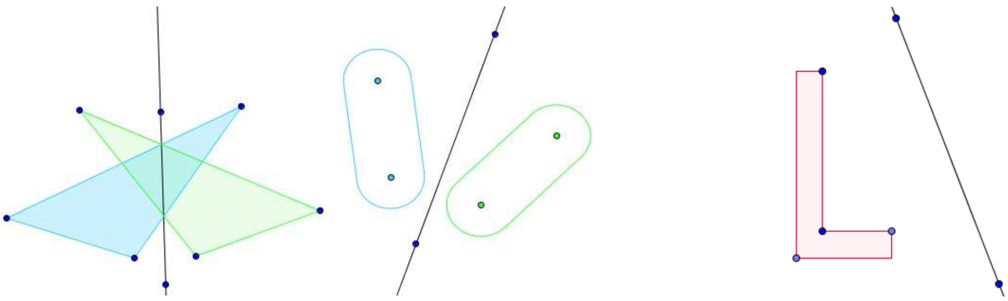
1. Pozorování chování obrazu v osové souměrnosti (Vzor a obraz v osové souměrnosti)
2. Použití nástroje *Osová souměrnost* (Sestrojení obrazu pomocí konstrukčních nástrojů)
3. Použití nástroje *Osová souměrnost*, obrazy podle stran trojúhelníka (Obrazy podle různých os)

1. Příklad: Vzor a obraz v osové souměrnosti

Žák má manipulací s obrázkem získat zkušenosti s tím, jak „se chová" osová souměrnost s rozmanitou polohou osy a jak se chová obraz, pokud se mění poloha osy a vzoru (obr. 4 vlevo, v příslušném souboru na CD lze najít i další tvary).

Zadání: *V souboru* `A 7 vzor a obraz v osové souměrnosti.ggb` *jsou dva trojúhelníky, vzor a obraz v osové souměrnosti (obr. 7 vlevo). Pohrajte si s obrázkem: najděte vzor a pohybujte s ním, měňte jeho tvar. Uchopte osu a otáčejte s ní. Uchopte osu za bod na této ose – osa se bude posouvat. Pozorujte, jak se mění obraz.*

(1) Nastavte osu do takové polohy, aby se oba trojúhelníky protínaly.
(2) Nastavte osu do takové polohy, aby se vzor a obraz dotýkaly jednou společnou stranou.
(3) Umístěte jeden vrchol vzoru do zvýrazněného bodu na ose. Otáčejte osou a pozorujte.
Jsou vzor a obraz vždy shodné?



obr. 4 – Vzor a obraz v osové souměrnosti, interaktivní model (vlevo). Obraz mnohoúhelníka v osové souměrnosti, vytvořený konstrukčním nástrojem Osová souměrnost (vpravo)

Metodická poznámka: V některých pozicích žáci nebyli přesvědčeni, zda jsou vzor a obraz opravdu shodné (zvláště nebyla-li při promítání na stěnu zachována ortogonalita). Zde pomůže ověření shodnosti měřením (a vysvětlení, že projektor promítá na zeď trochu zešikma, což zkresluje).

2. Příklad: Sestrojení obrazu pomocí konstrukčních nástrojů

Zadání: *Vytvořte přímku – osu souměrnosti a libovolný mnohoúhelník (obr. 7 vpravo). Použijte nástroj* Osová souměrnost *a vytvořte obraz mnohoúhelníka v osové souměrnosti s osou v dané přímce.*

Pohybujte hotovým obrázkem a přesvědčte se, že se konstrukce chová obdobně jako v hotových obrázcích v předchozích příkladech.

Žák získá základní dovednost v konstruování obrazu v osové souměrnosti pomocí nástrojů aplikace. Úlohu lze rozšířit vytvářením dalších objektů a sestrojováním jejich obrazů. Důležité je zafixování návyku manipulovat s hotovou figurou.

3 SESTROJENÍ OBRAZU V OSOVÉ SOUMĚRNOSTI

Žáci nyní znají osovou souměrnost a dokáží sestrojit obraz pomocí počítačového nástroje *Osová souměrnost*, který obraz sestrojí naráz a „automaticky“. Cílem této kapitoly je, aby přišli na to, jak sestrojit obraz pomocí základních konstrukčních kroků (tak, jak se rýsuje na papíře).

Pomůckou učitele pro konstruování bez použití implicitního nástroje k sestrojení obrazu je v *Geogebře* možnost tento nástroj z nabídky odstranit (v nabídce *Nástroje/Nastavit panel nástrojů*.

Seznam aktivit:

1. Objevování postupu, jak obraz v souměrnosti sestrojit (Vlastnosti obrazu)
2. Ověření konstrukčního postupu, objeveného v 1. aktivitě, analogického konstrukci na papíře (Sestrojení obrazu bez použití nástroje *Osová souměrnost*)
3. Konstrukce obrazu s předepsanou polohou osy, zkoumání tvaru obrazce vzniklého sjednocením vzoru a obrazu v závislosti na tvaru vzoru (Jaká je poloha obrazu?)

1. Příklad: Vlastnosti obrazu bodu v osové souměrnosti

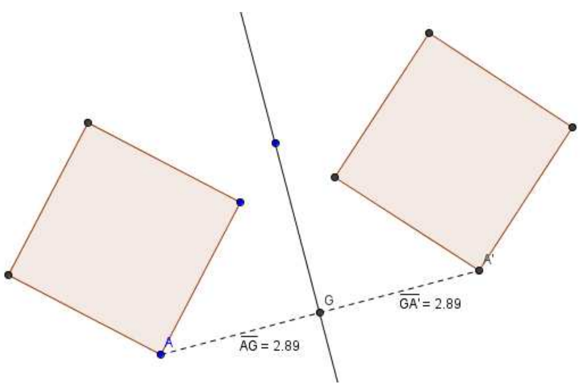
Přípravná aktivita ke konstrukci obrazu bez použití nástroje *Osová souměrnost*. Žáci mají poznat vlastnosti obrazu bodu *A*, které se během manipulace s figurou nemění.

Zadání:

1. *V souboru* `A 8 vlastnosti osové souměrnosti.ggb` *je na nákresně sestrojen vzor a obraz v osové souměrnosti podle osy o (obr. 8). Prohlédněte si dobře body A, A´.*
2. *Spojte body A, A´ úsečkou. Co můžete říci o úsečce AA´? Co platí o vzdálenostech?*
3. *Kdyby v počítači nefungoval nástroj* Osová souměrnost*, dokázali byste nyní sestrojit obraz trojúhelníka v osové souměrnosti? Jak byste postupovali?*

Metodická poznámka: Žáci si mají uvědomit, že když znají vlastnosti obrazu bodu *A* (je stejně vzdálen od osy jako vzor, spojnice vzoru a obrazu je kolmá na osu), mohou obraz bodu sestrojit základními konstrukčními nástroji (analogicky rýsování na papíře).

Žáci se často spokojí se změřením vzdáleností, nepohybují s obrázkem, berou jej jako statický. Je však důležité, aby žáci manipulovali se vzorem a osou, aby viděli figuru v její obecnosti.



obr. 5 – Hledání vlastností osové souměrnosti (ilustrace k 1. příkladu).

2. Příklad: Sestrojení obrazu bez použití nástroje *Osová souměrnost*

V následující sadě úloh žáci konstruují obrazy různých obrazců (čtverce, kružnice, obdélníka, mnohoúhelníka) pouze se základní sadou konstrukčních nástrojů. Konstrukce tak odpovídají tradičnímu rýsování na papír.

Zadání jednotlivých úloh:

1. *Je dán bod A a přímka o. Sestrojte obraz bodu A podle osy o. Nemůžete však použít nástroj* Osová souměrnost.
2. *Je dán čtverec ABCD a přímka o, která jím neprochází. Sestrojte obraz čtverce v osové souměrnosti s osou v přímce o. Není povoleno použít nástroj* Osová souměrnost.
   Nápověda: Sestrojte postupně obrazy všech vrcholů A, B, C, D.
3. *Sestrojte obraz kružnice v souměrnosti podle osy o. Není povoleno použít nástroj* Osová souměrnost.
   Nápověda: k vytvoření obrazu kružnice stačí znát obraz jejího středu a obraz jednoho bodu, který na ní leží (a který si lze na kružnici vytvořit).

4. *Sestrojte obraz libovolného mnohoúhelníka podle osy o, která s ním nemá žádný společný bod. Nazvěte odpovídající vrcholy obou mnohoúhelníků stejnými písmeny. Poté proložte stejně pojmenovanými stranami obou útvarů přímky, obarvěte je stejnou barvou. Všimněte si, jakou vlastnost tyto dvojice prodloužených stran mají. Dala by se tato vlastnost využít ke konstrukci obrazu mnohoúhelníka?*

Metodická poznámka: Po sestrojení obrazu je vždy nutno manipulovat s figurou, a to nejen kvůli pozorování tvaru a polohy obrazu (jako v minulé úloze), ale především pro kontrolu, zda je konstruováno správně (zda se žák „neukliknul“). Není vhodné nápovědu, která je uvedena pod zadáním úloh, žákům sdělovat hned v okamžiku zadání práce. Její zveřejnění bystrým žákům zbytečně brání vyřešit úlohu bez nápovědy.

Čtvrtá úloha vede k jinému algoritmu konstrukce obrazu. Využívá přitom poznatku, že průsečíky vzoru a obrazu, pokud existují, leží na ose souměrnosti. Žáci se mohou sami nebo v diskusi ve třídě pokusit poznatek, případně algoritmus zformulovat.

3. Příklad: Jaká je poloha obrazu?

Na první pohled klasická konstrukční úloha obrazu v osové souměrnosti (je možné zadat doplňující podmínku, aby žáci nepoužívali nástroj *Osová souměrnost*; úloha je pak analogická k rýsování na papír). Hlavním smyslem je ale hledání speciálních poloh zadání úlohy, které přinesou kvalitativně nový výsledek, a použití počítače na modelování zkoumané situace (obr. 9).

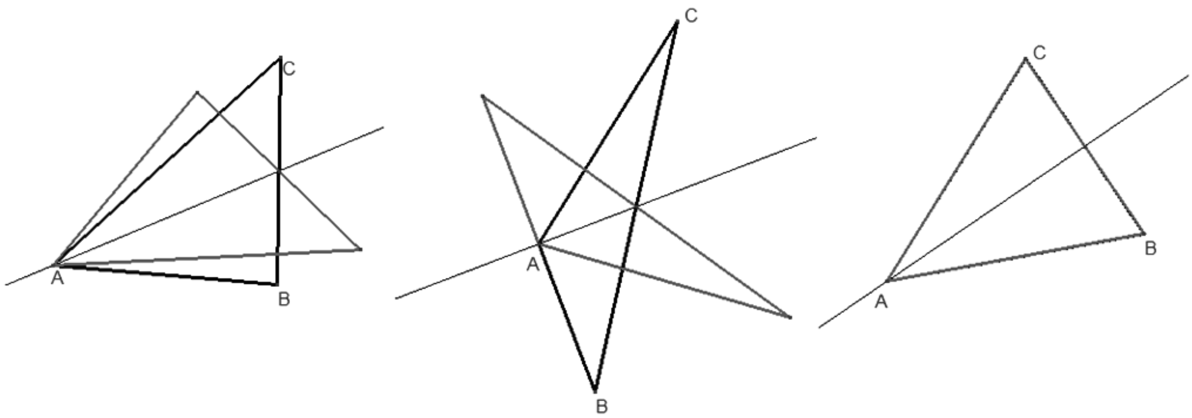
Zadání: *Sestrojte obraz trojúhelníka ABC podle osy, která prochází:*

1. *osou strany AB.*
2. *střední příčkou mezi středy stran BC a AC.*
3. *vrcholem A a středem strany BC.*
4. *stranou AB.*

Co vytváří obrazec, který vznikl spojením a překrytím obou trojúhelníků?

Komentáře k řešení:

1. Sjednocením může být pětiúhelník nebo trojúhelník (pro rovnoramenný trojúhelník).
2. Šestiúhelník nebo desetiúhelník (je-li úhel přilehlý ke straně *AB* tupý).
3. Osmiúhelník, sedmiúhelník (těžnice t_a kolmá na *AB* nebo na *AC*), trojúhelník (vzor je rovnoramenný).
4. Čtyřúhelník nebo trojúhelník (vzor je pravoúhlý, osa prochází jeho odvěsnou). Speciální polohy: kosočtverec (vzor je rovnoramenný), čtverec (vzor je pravoúhlý rovnoramenný).



obr. 6 –Hledání podmínek pro vznik různých mnohoúhelníků, vzniklých sjednocením vzoru a obrazu (3. příklad, 3. otázka).

Metodická poznámka: Úloha odpovídá obdobným úlohám pro rýsování na papír. Je možné zadat doplňující podmínku, aby žáci nepoužívali nástroj *Osová souměrnost.* Cílem je vytváření žákovských hypotéz o podmínkách pro ten který konkrétní tvar obrazce, vzniklého sjednocením vzoru a obrazu. Žáci by měli předem tipovat výsledek (vzájemnou polohu vzoru a obrazu, jaký tvar bude mít sjednocení vzoru a obrazu), poté figuru sestrojit a ověřit, zda jejich hypotéza platí pro všechny případy. Zaznamenání hodný je úloha ze čtvrtého bodu zadání, která poskytuje prostor pro trénink vyjadřování.

4 VLASTNOSTI OSOVÉ SOUMĚRNOSTI

Žáci rozumí konstrukci obrazu, zkoumají nyní další vlastnosti (samodružné body, poloha osy) a poznávají osovou souměrnost v neevidentních situacích.

Seznam aktivit:

1. Pochopení pojmu samodružný bod pomocí manipulace s figurou (Samodružné body)
2. Objevování osy souměrnosti jako množiny samodružných bodů (Samodružné body a osa souměrnosti)
3. Experimentální nalezení skryté osy pomocí manipulace s pomocnou osou (Hledání osy souměrnosti)
4. Ověření, zda se jedná o souměrnost, sestrojením os více dvojic sobě odpovídajících bodů vzoru a obrazu (Je to osová souměrnost?)
5. Přiřazování obrazů mnohoúhelníka k osám, podle kterých byly zobrazeny (Přiřaď osu k obrazu)

1. Příklad: Samodružné body

Úloha vede k poznání samodružnosti bodů, ležících na ose. Osa zde prochází vrcholem *A* trojúhelníka.

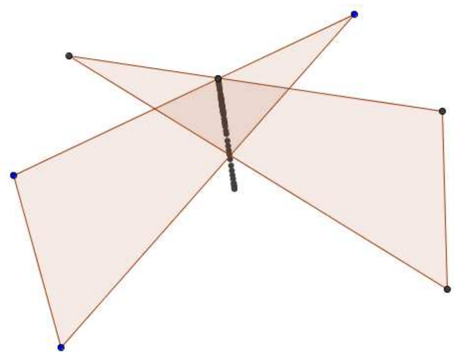
Zadání:
Je dána přímka o, na níž leží vrchol A trojúhelníka ABC. Sestrojte obraz trojúhelníka podle osy o. Pohybujte vrcholy trojúhelníka. Co platí pro obraz A´ vrcholu A?

Body, které se zobrazí samy do sebe, se nazývají samodružné (sdružují se samy se sebou).

1. *Nastavte trojúhelník do polohy, ve které bude mít dva samodružné body.*
2. *Ve které poloze bude celá jedna strana trojúhelníka vytvořena ze samodružných bodů?*

Metodická poznámka:
U úlohy je podstatné, že vrchol *A* leží na ose a při manipulaci je trvale samodružný. Kromě samodružného vrcholu *A* mohou žáci objevit další samodružný bod (samodružné body) – tyto nejsou samodružné vždy, je důležité to rozlišit.

Tato úloha vyvolala debatu, zda mohou vyjít tři samodružné body a kolik je u 2. otázky samodružných bodů.



obr. 7 – Experiment, hledání množiny samodružných bodů jako stopy průsečíku vzoru a obrazu

2. Příklad: Samodružné body a osa souměrnosti

Experiment, odhalení osy souměrnosti jako přímky samodružných bodů. V této úloze žáci sestrojí průsečíky odpovídajících si stran trojúhelníka a jeho obrazu; stopa pohybu při manipulaci s figurou bude vytvářet množinu samodružných bodů.

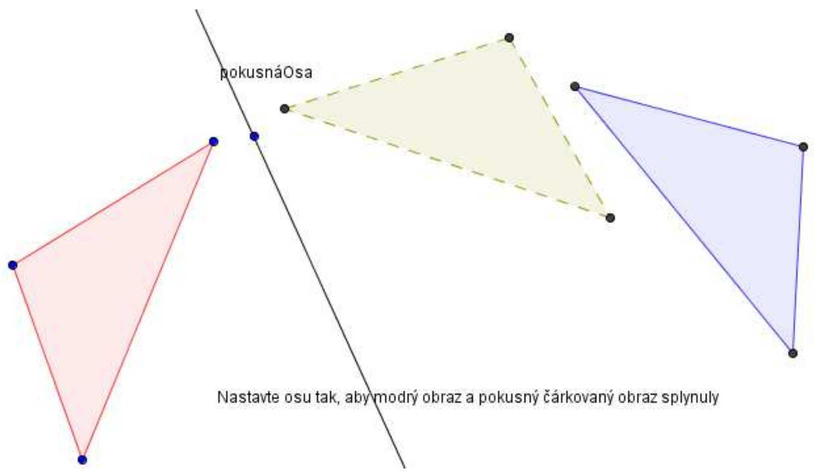
Zadání: *V souboru* `A_10 hledání osy stopou.ggb` *je vzor a obraz trojúhelníka v osové souměrnosti (obr. 10).*

1. *Nastavte obrázek tak, aby se vzor a obraz protínaly. Vytvořte jejich průsečíky.*
2. *Zapněte stopu jednoho z těchto průsečíků (nástroj* Stopa ano/ne*) a měňte obrázek.*
3. *Co mají společného všechny body, vytvořené touto stopou?*
4. *Jakou množinu vytvoří tyto všechny body?*

3. Příklad: Hledání osy souměrnosti

Figura obsahuje dva trojúhelníky – vzor a obraz v osové souměrnosti. Cílem experimentu je najít polohu osy souměrnosti. Žáci sestrojí pokusný obraz trojúhelníka *ABC* podle libovolně umístěné pokusné osy, poté tahají za osu a snaží se překrýt pokusný obraz s obrazem *A´B´C´*.

Zadání: *Na nákresně je sestrojen vzor a obraz v osové souměrnosti. Najděte osu souměrnosti.*
Osu můžete najít pokusem. Vytvořte osu na libovolném místě a sestrojte podle této osy obraz. Poté pohybujte osou tak, aby váš obraz splynul s obrazem ze zadání úlohy.
Osu můžete najít úvahou, když si uvědomíte, jaké vlastnosti má úsečka AA´ mezi vzorem a obrazem bodu.



obr. 8 – Hledání skryté osy souměrnosti pomocí pokusné osy a pokusného obrazu.

Metodická poznámka: Je důležité, aby po nalezení správné polohy pokusné osy žáci hýbali trojúhelníkem *ABC*, aby ověřili, zda je jejich řešení obecné (zda se jejich pokusný obraz stále překrývá s obrazem *A´B´C´*).

Někteří žáci nechápali zcela, že poloha pokusné osy při překrytí obou obrazů ukazuje na polohu hledané osy – jako by svůj experiment nespojili se zadáním úlohy.

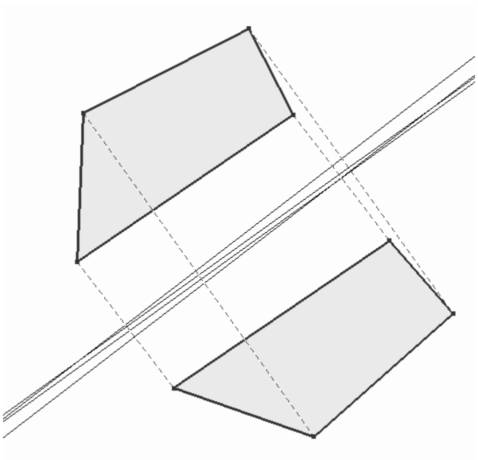
Úloha může vyústit v nalezení osy souměrnosti použitím nástroje *Osa úsečky*.

4. Příklad: Je to osová souměrnost?

V této úloze mají žáci prokázat, zda rozumí vlastnostem osové souměrnosti a zda dokáží rozeznat, že zkoumané zobrazení ve skutečnosti není osová souměrnost. Figura obsahuje dva čtyřúhelníky, vzor a obraz v posunutém zrcadlení, ovšem v pozici, kdy připomínají osovou souměrnost.

Zadání: *Na obrázku jsou dva shodné čtyřúhelníky. Ověřte, zda se může jednat o vzor a obraz v osové souměrnosti (obr. 9, soubor* `A_12 jde o osovou souměrnost.ggb` *).*

Metodická poznámka: Žáci často experimentují s cílem, že nalezení osy potvrdí osovou souměrnost. Někteří žáci postupovali podobně jako v předchozí úloze, protože se ale nejedná o souměrnost, osu nenašli. Tím, že ji nenašli, však nemohli přesvědčit (dokázat), že taková osa neexistuje. To se podařilo až tehdy, když spojnice odpovídajících si bodů nebyly rovnoběžné, středy spojnic odpovídajících si bodů neležely na přímce nebo osy těchto spojnic nebyly totožné (obr. 9).



obr. 9 – Jedná se o osovou souměrnost? Žákovské řešení, dodatečně formátováno.

5 Osově souměrné útvary

Žáci formou experimentů zkoumají souvislost mezi osovou souměrností a osově souměrnými útvary, hledají vlastnosti osově souměrných útvarů.

Seznam aktivit:

1. Hledání polohy osy, tak aby vzor a obraz splynuly (Osově souměrný útvar jako výsledek experimentu)
2. Tvůrčí aktivita hledání vhodných tvarů s možným využitím nástroje *Osová souměrnost* (Vytváření osově souměrných útvarů)
3. Manipulací se vzorem a obrazem se hledá jejich překrývání (Počet os souměrnosti)
4. Hledání vztahu mezi počtem vrcholů a počtem os pravidelných mnohoúhelníků (Pravidelné mnohoúhelníky a osová souměrnost)
5. Hledání permanentních os souměrnosti pro proměnlivé tvary (Sestrojení osy souměrnosti souměrného útvaru)

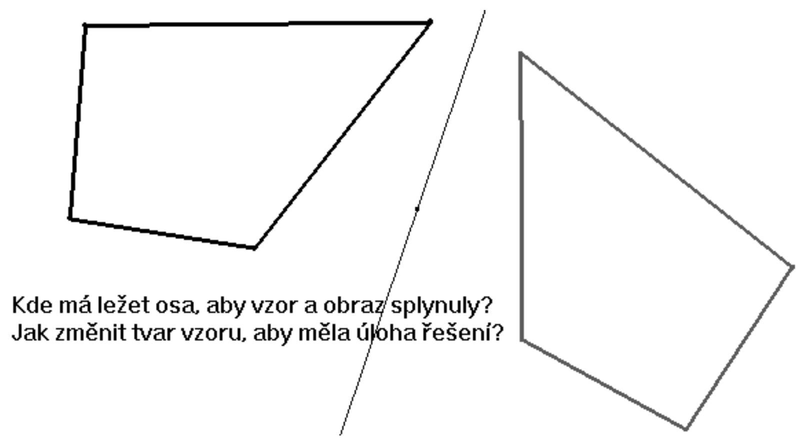
1. Příklad: Osově souměrný útvar jako výsledek experimentu

Je dána figura se zobrazením čtyřúhelníka v souměrnosti podle osy (obr. 10). Žáci hledají polohu osy tak, aby vzor a obraz splynuly, následně diskutují.

Zadání:

Je dán čtyřúhelník a přímka, která jím neprochází. Sestrojte obraz čtyřúhelníka podle této přímky.

1. *Pokuste se pohybovat osou tak, aby vzor a obraz splynuly. Měňte také tvar čtyřúhelníka – vzoru.*
2. *Podařilo se vám nastavit obrázek tak, aby oba obrazce splynuly? Jakou vlastnost musí mít takový čtyřúhelník?*



obr. 10 – Motivační experiment k pojmu osově souměrný útvar; hledání polohy osy, tak aby vzor a obraz splynuly

Metodická poznámka:

Žáci splní zadání úlohy právě ve chvíli, kdy čtyřúhelník bude osově souměrný. Žáci objeví různé konkrétní tvary: deltoid, čtverec, obdélník, rovnoramenný lichoběžník, trojúhelník. Dotazem na společnou vlastnost všech těchto tvarů a po diskusi lze pojem souměrný útvar přirozeně zavést.

2. Příklad: Vytváření osově souměrných útvarů

Tvůrčí aktivita vedoucí k upevnění pojmu osově souměrný útvar. Žáci mohou soutěžit, aby sestrojili co nejsložitější osově souměrný útvar. Cenné je, pokud žáci sami odhalí, že ke konstrukci osově souměrných útvarů lze využít osovou souměrnost.

Zadání: *Vytvářejte takové obrazce, které se v osové souměrnosti s vhodně umístěnou osou zobrazí samy na sebe. K vytvoření obrazců použijte nástroje* Úsečka, Kružnice, Trojúhelník, Mnohoúhelník.

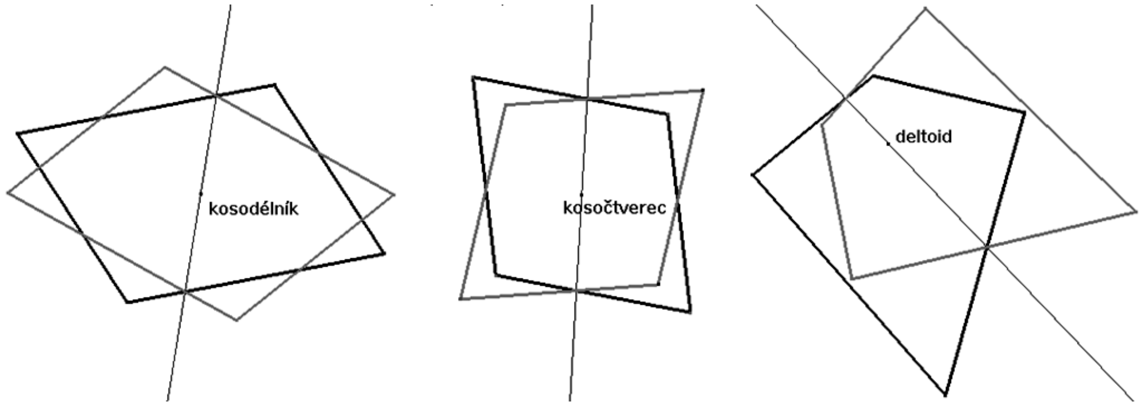
Odpovězte na otázky (při nejasnostech zkonstruujte obrázek):

1. *Jsou všechny úsečky osově souměrné? Kudy musí vést jejich osa?*
2. *Jsou všechny kružnice osově souměrné? Kudy musí vést jejich osa?*
3. *Jsou všechny trojúhelníky osově souměrné? Tuto odpověď projednejte se spolužáky.*
4. *Vytvořte co nejsložitější útvar, který bude osově souměrný.*

3. Příklad: Počet os souměrnosti

Krátká motivační aktivita k hledání počtu os souměrnosti.

Zadání*: Některé útvary mají více os souměrnosti. Vyzkoušejte postupně útvary, které jsou sestrojeny v souboru* `A_15 počet os souměrnosti.ggb` *(obr. 11): kosodélník, deltoid (drak), kosočtverec. Otáčejte osou kolem dokola a pozorujte, kolikrát se postupně vzor a obraz překryjí. Kolik různých poloh může osa souměrnosti mít?*



obr. 11 – Experiment, hledání počtu os souměrnosti pomocí překryvů vzoru a obrazu při otáčení osy

Metodická poznámka: Někteří žáci počítají při otáčení tutéž osu dvakrát, někteří si nepamatují, kde začali, a otáčejí osou vícekrát. Jim je možno dát úkol, aby všechny osy do obrázku dokreslili (nástrojem *Přímka*).

4. Příklad: Pravidelné mnohoúhelníky a osová souměrnost

Aktivita využívá schopnosti software vytvořit základní pravidelné mnohoúhelníky k jejich testování. Žáci hledají vztah mezi počtem vrcholů a počtem os souměrnosti, ověřují sestrojením obrazu.

Zadání: *Pomocí nástroje* Pravidelný mnohoúhelník *vytvářejte různé pravidelné mnohoúhelníky. Jsou všechny osově souměrné? Ověřte tak, že sestrojíte obraz mnohoúhelníka podle osy a nastavíte do polohy, kdy se vzor a obraz budou krýt.*

1. *Jaký pravidelný mnohoúhelník není osově souměrný?*
2. *Lze nějak stanovit pravidlo pro počet os pravidelného mnohoúhelníka?*

Metodická poznámka: Žáci by měli být zvyklí na otázky, k níž je odpověď „žádný“. Odhalit pravidlo v 2. otázce není obtížné, obtížnější je toto pravidlo přesně formulovat. Učitel se zde nemusí spokojit s větou: „Je jich stejně.“

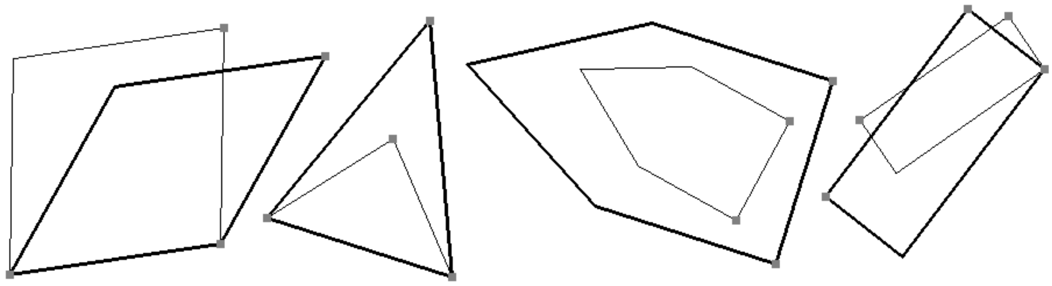
5. Příklad: Sestrojení osy souměrnosti souměrného útvaru

Figura obsahuje osově souměrné útvary, jejichž tvar lze měnit manipulací se zvýrazněnými vrcholy. Žáci konstruují jejich osy souměrnosti tak, aby osami zůstaly i po manipulaci.

Mohou také sestrojit další osově souměrný obrazec.

Úloha trénuje žáky v konstruování permanentních os osově souměrných útvarů.

Zadání: *V souboru* ***Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.*** `A_16 hledání os útvarů.ggb` *jsou na nákresně čtyři geometrické útvary (obr. 12). Těm, u kterých je to možné, sestrojte jejich osy souměrnosti. Osy musí zůstat osami souměrnosti i při změně tvaru a polohy těchto útvarů. Konstrukci os ověřte taháním za zvýrazněné vrcholy.*



obr. 12 – Figura se sestrojenými osově souměrnými útvary, jejichž tvar lze měnit (na obrázku jsou znázorněny ve dvou svých polohách či tvarech). Žáci mají sestrojit všechny osy těchto útvarů.

6 APLIKAČNÍ ÚLOHY NA SOUMĚRNOST

Seznam aktivit:

1. Použití geometrického modelu zadání úlohy k nalezení řešení na základě manipulace (Počítačový náčrtek)
2. Nalezení řešení úlohy experimentem (Rovnostranný trojúhelník)
3. Vytváření osově souměrných „gumových" písmen (Souměrná písmena)
4. Konstruování souměrného obrázku, jehož rozměry lze měnit tahem za bod (Řecký kříž)

VYTVÁŘENÍ MODELŮ PRO APLIKAČNÍ ÚLOHY

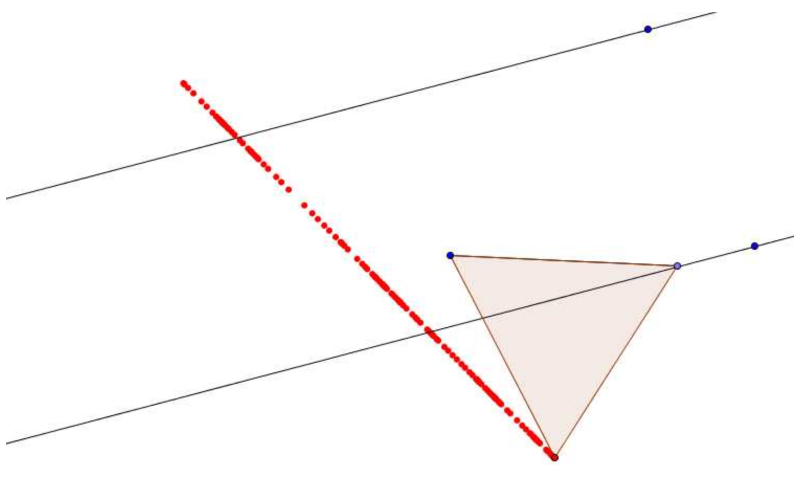
Úlohy, v nichž je úvaha nad použitím osové souměrnosti (nebo jiného zobrazení) klíčem k řešení úlohy, lze řešit velmi dobře bez použití počítače. Počítač je zde použit jako pomůcka pro rychlé a přesné rýsování nebo pro diskusi počtu řešení.

Jako motivace může sloužit „počítačový náčrtek", který žáci sestrojí a v němž pomocí myši „ručně" nastaví situaci požadovanou zadáním (např. nejkratší trasu, polohu hledaného obrazce). Žáci se dostanou k výsledku experimentálně, předem vidí řešení, které odpovídá zadání.

1. Příklad: Rovnostranný trojúhelník se dvěma vrcholy na daných rovnoběžkách

Známá úloha, v níž je však použito vytvoření počítačového modelu a experimentální hledání řešení.

Zadání: *Jsou dány dvě rovnoběžky a bod, neležící ani na jedné z nich. Sestrojte rovnostranný trojúhelník s jedním vrcholem v daném bodě a zbývajícími dvěma vrcholy ležícími na rovnoběžkách* (obr. 13).



obr. 13 – „Náčrtek" k optimalizační úloze, ruční hledání správné polohy (případně za pomoci stopy) umožní žákovi lépe si uvědomit zadání.

Metodická poznámka: Při výuce, realizované na ZŠ Nerudova, žáci pod vedením učitele nejprve vytvářeli náčrtek, figuru, v níž vrcholem rovnostranného trojúhelníka je pevný bod A, dalšími vrcholy lze pohybovat libovolně. Jednoho žáka napadlo: když se další vrchol trojúhelníka bude pohybovat po jedné z rovnoběžek, správná poloha se najde lépe. Po zapnutí stopy zbylého vrcholu trojúhelníka vznikla situace (obrázek), ve které již bylo možno odhalit správný postup konstrukce (otočit jednu z rovnoběžek o 60° kolem bodu *A*). Ovšem k odhalení tohoto postupu žáky nedošlo.

Lze očekávat, že podobné situace budou při takovém stylu výuky nastávat často. Učitel by měl být na možnost vzniku takové situace připraven.

SHODNÉ ZOBRAZENÍ JAKO KONSTRUKČNÍ KROK

Kvalitativní rozdíl mezi rýsováním na papír a v prostředí dynamické geometrie lze snad nejlépe ukázat na příkladu použití nástroje shodného zobrazení jako konstrukčního kroku. Na papíře se obraz v osové souměrnosti konstruuje jako několik konstrukčních kroků za použití základních konstrukčních nástrojů, i když se v postupu konstrukce často zapisuje jako krok jeden.

Při vlastním rýsování na papíře žák nemůže od techniky sestrojení obrazu abstrahovat (tak jako tomu může být v zápisech postupu). Obraz v souměrnosti musí narýsovat pomocí kolmic, kružnic, průsečíků apod. a tím je odváděna jeho pozornost od mentální činnosti k rutinním operacím, což ruší koncentraci a snižuje efektivitu práce. Nutnost realizovat zobrazení několika konstrukčními kroky vede k handicapu úloh vyžadujících opakované nebo časté použití zobrazení.

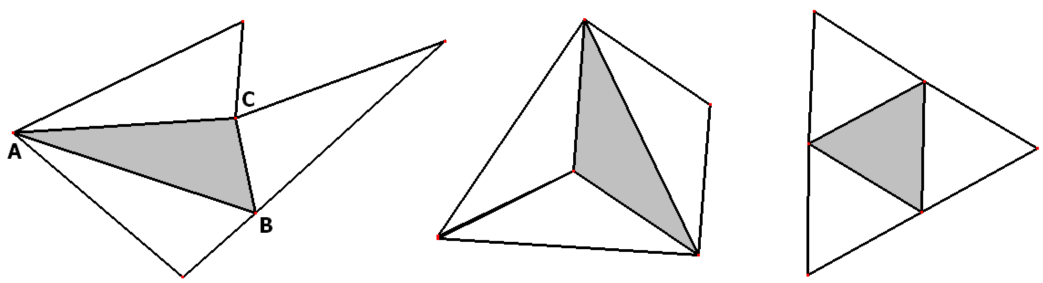
Kvalitní počítačová prostředí umožňují sestrojit obraz v zobrazení i složitého útvaru jednorázovým použitím vhodného nástroje (např. *Osová souměrnost*). Rýsování figury je pak v souladu se zapisovaným postupem.

2. Příklad: Obrazy podle různých os

Žáci vytvoří obrazy trojúhelníka podle jeho stran. Nastavují figuru do speciálních poloh a snaží se popsat podmínky pro splnění úlohy.

Zadání: *Je dán libovolný trojúhelník ABC. Pomocí nástroje* Osová souměrnost *vytvořte jeho obraz podle jedné jeho strany (jako osu označíte stranu trojúhelníka). Vytvořte další jeho obrazy podle zbývajících stran (obr. 14 vlevo). Pohybujte vrcholy trojúhelníka ABC a pozorujte jeho tři obrazy.* ***Jsou všechny obrazy stále shodné se vzorem****? Nejste-li si jisti, přeměřte délky stran.*

1. *Nastavte trojúhelník ABC do takové pozice, aby dva jeho obrazy měly společnou jednu stranu (obr. 14 uprostřed). Jakou vlastnost má nyní trojúhelník?*
2. *Nastavte situaci, aby vzor se všemi svými obrazy dohromady tvořil trojúhelník (obrázek vpravo). Jakou vlastnost má nyní trojúhelník ABC?*
3. *Jaká podmínka musí platit pro vzor, aby se žádné dva jeho obrazy nepřekrývaly?*



obr. 14 – Obrazy podle os v různých stranách trojúhelníka ABC.

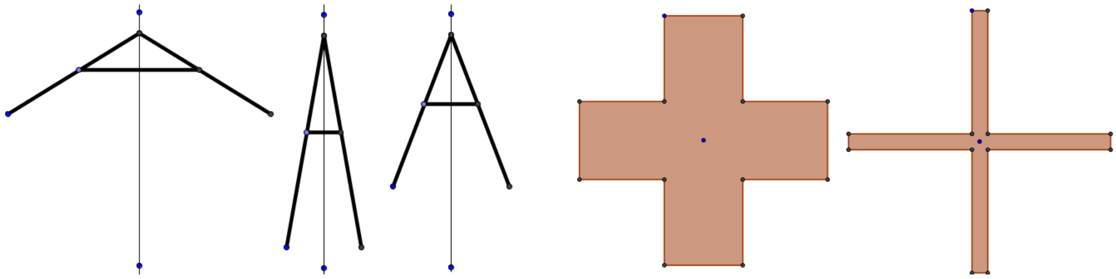
Metodická poznámka: Tato úloha není jen manipulativní, je zapojena i abstraktní složka myšlení (žák formuluje a ověřuje odpověď). Ovšem obr. 14 by se neměl žákům ukazovat předem, žáci by byli ochuzeni o experimentování. Z cílové pozice mohou sami odečíst předpokládaný tvar vzoru i jeho vlastnost (odpověď č. 1 – rovnoramenný, č. 2 – rovnostranný trojúhelník).

Odpověď na třetí, obtížnou otázku zní: trojúhelník *ABC* nesmí mít žádný vnitřní úhel větší než 120°. Tuto úlohu lze pro nadané žáky zobecnit: vytvořit obdobnou figuru pro čtyřúhelník a jeho čtyři obrazy podle jeho stran. Otázka pak zní stejně jako v bodě třetím (a odpověď také). Lze pokračovat pro pěti- a šestiúhelník a nakonec najít všechny mnohoúhelníky, jejichž obrazy v osové souměrnosti podle všech svých stran se nebudou navzájem překrývat.

Typické úlohy

- *Souměrná písmena*. Tvůrčí aktivita vedoucí k vytváření osově souměrných útvarů připomínajících písmena, které lze deformovat při zachování „čitelnosti“, např. **T, V, N, Z, M, X, Y, E, W**.

- *Řecký kříž*. Pohyb jediného bodu mění tvar dvanáctiúhelníku (nebo dvou překrytých obdélníků), tak aby všechna ramena kříže byla shodná. Pro žáky je obtížné objevit algoritmus konstrukce, specielně polohy os.



obr. 15 – Souměrná písmena, řecký kříž – měnící se figury se zachováním podstatných tvarových znaků.

7 SKLÁDÁNÍ ZOBRAZENÍ

Nenechme se zmást názvem kapitoly. Zde není cílem výuky zobecnění nebo formalizace zápisu operace skládání zobrazení, ale získání vhledu do jeho chování na konkrétních příkladech. K seznámení a k porozumění chování složených zobrazení např. pozorováním obrazu se využívá manipulace. Kapitolu lze použít již na ZŠ jako propedeutickou či úvodní ke středoškolské látce o skládání zobrazení.

Seznam aktivit:

1. Rozeznávání prvního a druhého obrazu (Složení dvou osových souměrností)
2. Vytváření obrázků ze základního tvaru pomocí osové souměrnosti (Tvary vzniklé z půlkružnice)
3. Mnohonásobné použití osové souměrnosti při konstrukci obrázku (Vějíř)

1. Příklad: Složení dvou osových souměrností

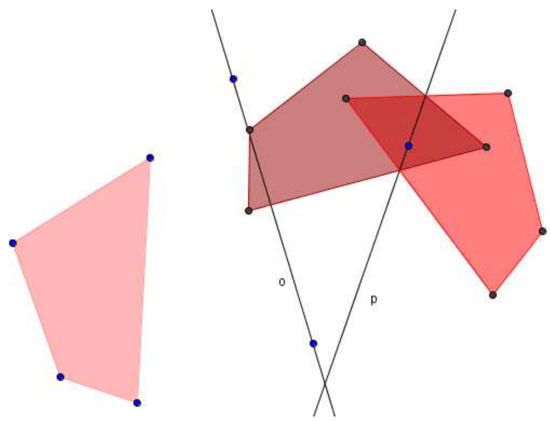
V úloze mají žáci poznat vzor, první a druhý obraz. Osy na obrázku nelze rozeznat záměrně.

Zadání: *V souboru* `A_21 složení osových souměrností.ggb` *jsou na nákresně tři shodné čtyřúhelníky, kterým chybí popis (obr. 21). Víme, že čtyřúhelník ABCD má být vzor, EFGH je jeho obraz podle osy o a IJKL je obrazem obrazu EFGH podle osy p.*

(1) Pohybujte osami o, p a poznejte, který čtyřúhelník je který. Vybarvěte vzor ABCD růžovou, obraz EFGH červenou a obraz obrazu IJKL tmavě červenou barvou. Můžete také popsat vrcholy čtyřúhelníků.

(2) Pohybujte osami o, p tak, aby vzor ABCD a druhý obraz IJKL splynuly (tedy aby váš nejsvětlejší čtyřúhelník splynul s nejtmavším). Vysvětlete, v jaké vzájemné poloze osy leží.

Nápověda: Pokud se nedaří, aby čtyřúhelníky splynuly, je možné, že jste je špatně vybarvili.



obr. 16 – Hledání polohy dvou os, tak aby druhý obraz, vzniklý složením obou osových souměrností, splynul se vzorem. Úloha vede k některým zobecněným vlastnostem skládání zobrazení.

Metodická poznámka:

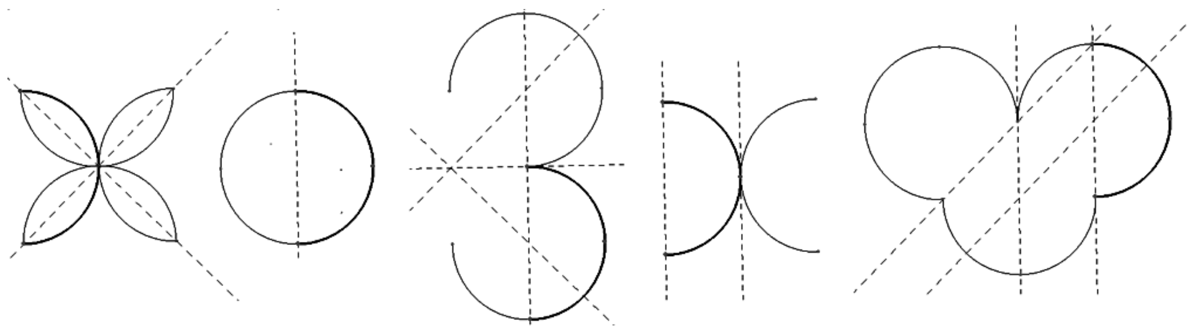
V 2. úloze žáci hledají podmínku pro to, aby složením dvou osových souměrností byla identita. Správná odpověď je, že osy musí splynout. Manipulace dá některým žákům značnou práci, protože mají potíže s koordinací otáčení os (přímky, dané bodem a směrem, lze v *Cabri* buď otáčet kolem jejich tzv. hlavního bodu, nebo je přemísťovat táhnutím za tento hlavní bod).

Jakmile třeba i náhodou dostanou vzor a druhý obraz do polohy, v níž by byly jejich odpovídající si strany rovnoběžné, rychle již dosáhnou hledané polohy.

2. Příklad: Tvary vzniklé z půlkružnice

Zadáním je půlkružnice se třemi aktivními body (oba krajní a bod ve středu oblouku). Žáci mají z výchozí půlkružnice vytvářet předepsané obrázky, nemohou však přitom používat nástroj *Kružnice*, *Kružítko* ani *Oblouk*; musí tudíž použít zobrazení. Úkolem je najít vhodné polohy os souměrnosti, zkonstruovat je a podle nich oblouk zobrazit. Osy musí procházet aktivními body půlkružnice nebo jejich obrazy, jinak se při manipulaci obrázek zbortí.

Nabízí se řada obrázků: čtyřlístek, kružnice, číslice 3, písmeno chí, myšák, číslice 8, písmeno S ...



obr. 17 – Tvorba obrázků opakováním osové souměrnosti ze základního motivu je tréninkem vyhledávání a konstrukce vhodných os.

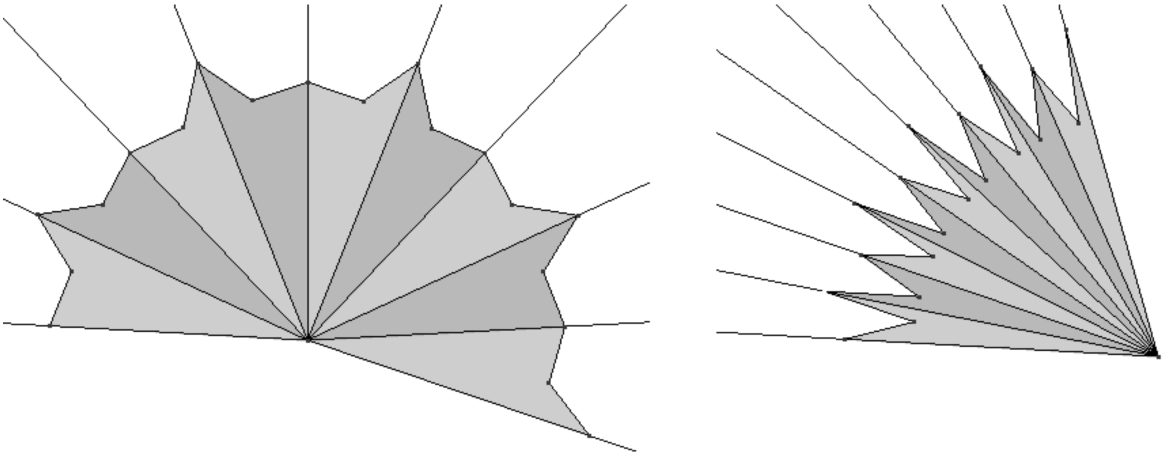
Metodická poznámka: V této úloze občas žáci vytvářejí nové oblouky jako obraz podle osy, kterou umísťují sice na správné místo, ale nedefinují ji jako procházející body půlkružnice. Taková osa pak není spojena s původní figurou. Aby bylo možno ukázat, že takový přístup k řešení úlohy je statický a že konstrukce není obecně správná, je možno jako zadání použít připravený soubor `A_22 půlkružnice.ggb` se zadáním, v němž lze původní půlkružnicí otáčet kolem jejího středu. Správně sestrojené osy „drží tvar“ a otáčejí se spolu s půlkružnicí, ovšem osy umístěné volně zůstanou na místě a tím výsledný obrázek zbortí.

3. Příklad: Vějíř

Žáci sestrojí z několika čtyřúhelníků vějíř tak, aby se dal rozevírat a měnit tvar. Otevírání se provádí pohybem dvou sousedních os – tím je zaručeno, že žák použije osovou souměrnost (a ne třeba osy úhlů). Čtvrtý bod čtyřúhelníku je volný, v náročnější variantě úlohy může být také nějak závislý na rozevírání vějíře.

Rámcový postup konstrukce:

(1) Sestrojte dvě polopřímky se společných koncovým bodem.
(2) Sestrojte čtyřúhelník s vrcholem v průsečíku polopřímek, jehož dva vrcholy leží každý na jedné polopřímce. Čtvrtý bod čtyřúhelníku je volný (v náročnější variantě úlohy může být také nějak závislý na ostatních objektech, např. ležet na úsečce spojující obě polopřímky).
(3) Opakovaně sestrojujte obrazy mnohoúhelníka a osy podle druhé osy, „přidávejte“ k figuře jedním směrem nové obrazy mnohoúhelníka i os.
(4) Pohybujte původními polopřímkami. Pohybujte vrcholy čtyřúhelníka – vzoru.



obr. 18 – Rozevírající se vějíř, mnohonásobné složení osových souměrností

8 PROJEKTY

Následující náměty k projektům předpokládají porozumění pojmu zobrazení, shodné zobrazení a osová souměrnost a zvládnutí odpovídajících konstrukčních technik na počítači.

Seznam projektů:

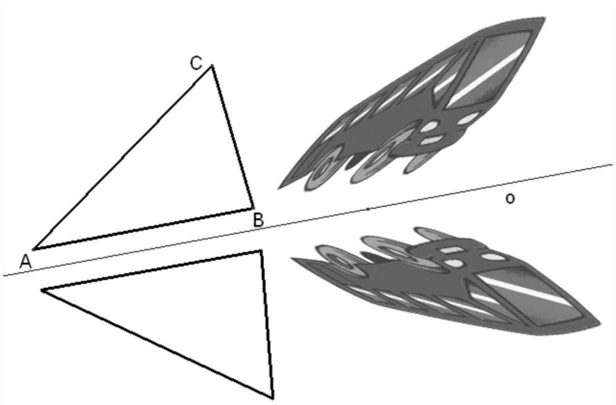
1. Zobrazení bitmapových obrázků v osové souměrnosti – vytváření koláží z bitmapových fotografií geometrickými zobrazeními

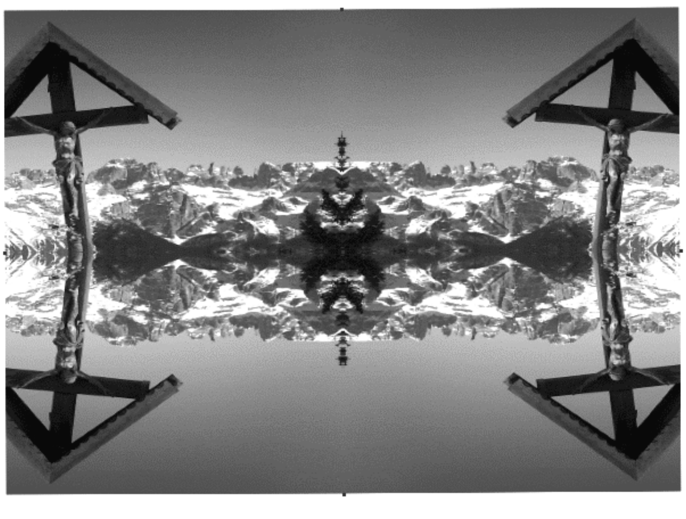
2. Křivka půrocházející skutečností – hledání křivky, která vykreslí vyfotografovanou čáru

3. Je obličej souměrný? – ověřování souměrnosti obličeje na fotografiích

1. Projekt: Zobrazení bitmapových obrázků v osové souměrnosti

Projekt využívá možnosti prostředí *Geogebry*, které umožňuje přiřadit trojúhelníku bitmapový obrázek (pravé tlačítko myši na vybraném trojúhelníku). Žáci mohou vytvářet figury, které lze deformovat taháním za vrcholy trojúhelníka, a pozorovat deformace u bitmapových obrázků, které zde představují běžné předměty. Mohou vytvářet např. obraz v zrcadle, v hladině rybníka.





obr. 19 – Stejně jako trojúhelník, i bitmapový obrázek lze různě deformovat a jeho obraz v osové souměrnosti je shodný se vzorem. Na dolním obrázku je trojúhelník (s přidruženým bitmapovým obrázkem) a jeho tři obrazy v osových souměrnostech.

Fotografii lze do nákresny v *Geogebře* vložit nástrojem *Vložit obrázek*.

Žáky lze nechat např. vyhledat na Internetu osově souměrný obrázek a v *Geogebře* vytvořit jeho obraz, který nebude se vzorem stranově převrácený. Pěkné jsou aktivity s použitím fotografií s nápisy.

2. Projekt: Křivka procházející skutečností

Proložte parabolu paprskem vody z vodotrysku. Pohybujte posuvníky a nastavte parametry a, b, c paraboloidy tak, aby co nejlépe splývala s křivkou proudu vody.

obr. 20 – „proložte parabolu vyfotografovanou křivkou

3. Projekt: Je obličej souměrný?

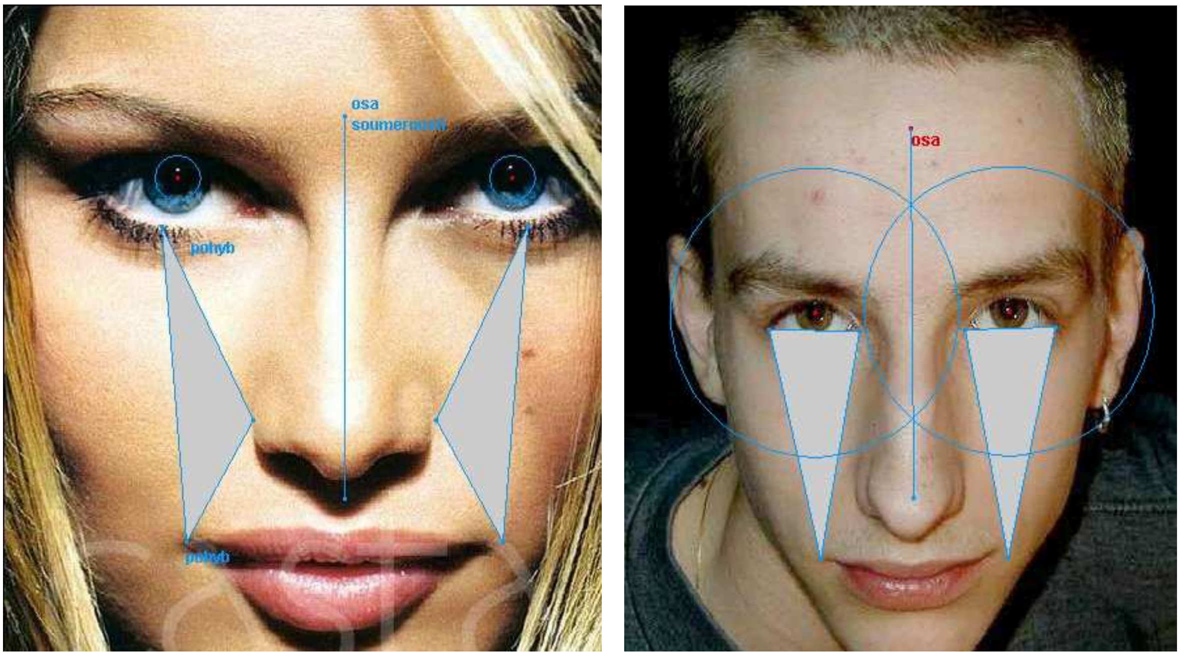
V projektu žáci jednoduchou konstrukcí ověří, nakolik je lidský obličej souměrný. Použitý software: *Cabri II Plus*, příp. program pro úpravu fotografií spolu s fotoaparátem.

Nad fotografií jako pozadím geometrické konstrukce žáci použijí osovou souměrnost ke kontrole souměrnosti lidského obličeje (soubor `A_29 projekt obličej.ggb`). Poloha osy souměrnosti v ověřovací figuře je určena polohou dvou tzv. kalibračních kružnic. Další objekty již jsou standardními vzory a obrazy podle této osy.

Doporučený postup:

Souměrnost obličeje se ověří ve dvou krocích. Nejprve se figura zkalibruje – obě kružnice se umístí do středu očí a tím se nastaví poloha osy souměrnosti obličeje (první kružnice se umístí ručně, druhá je však obrazem první v osové souměrnosti; musí se tedy manipulovat s osou, aby druhá kružnice přesně „padla“ do druhého oka). Poté se souměrnost kontroluje umístěním vrcholů trojúhelníka do tzv. signifikantních bodů obličeje (boltec, ústní koutek, okraj nosu). Pozoruje se, zda body ukazují do stejných míst na levé i pravé polovině obličeje.

Žáci zjistí, že lidský obličej není dokonale souměrný. Projekt může u dospívajících přispět k odstraňování komplexu vzhledu (krása obličeje nespočívá v jeho souměrnosti, naopak mnoho známých lidí, považovaných za krásné, má obličej výrazně nesouměrný).



obr. 21 – V projektu žáci jednoduchou konstrukcí ověří, nakolik je lidský obličej souměrný.

Rozšíření projektu:

Žáci si též mohou zkontrolovat souměrnost vlastního obličeje, pokud se vyfotografují digitálním fotoaparátem a fotografii přenesou do počítače. Foto musí být přímo zepředu, hlava nesmí být nakloněná. Jinou možností je použít fotografie slavných osobností, nalezené na webu.