Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Sborník příspěvků 11. konference
Užití počítačů ve výuce matematiky

9. – 11. listopadu 2023
České Budějovice

Společnost učitelů matematiky
JČMF

Katedra matematiky Pedagogické fakulty
Jihočeská univerzita v Č. Budějovicích

Katedra matematiky, Pedagogická fakulta
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

ISBN 978-80-7694-059-8

Předmluva

Sborník obsahuje příspěvky, které zazněly na jedenácté konferenci *Užití počítačů ve výuce matematiky*, pořádané ve dnech 9. – 11. listopadu 2023 Pedagogickou fakultou Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích ve spolupráci se Společností učitelů matematiky JČMF a Jednotou českých matematiků a fyziků, pobočným spolkem České Budějovice. Záštitu nad konferencí převzala vedle Pedagogické fakulty také Fakulta zemědělská a technologická Jihočeské univerzity, která příkladným způsobem poskytla konferenci své prostory spolu s potřebnou infrastrukturou.

Plenární přednášky přednesli Carsten Miller (Universität Bayreuth, Německo): *In Touch with Geometry and Beyond – Discover, Foster and Assess with sketchometry*, Mária Slavíčková (Univerzita Komenského v Bratislavě, Slovensko): *Príprava budúcich učiteľov matematiky v digitálnej dobe*, Lukáš Vízek (Univerzita Hradec Králové): *Kritické a tvořivé využívání dynamické geometrie v matematice základní školy* a David C. Webb (University of Colorado Boulder): *Computational Thinking as a Goal for Mathematics Education: Past Challenges and Future Directions*. Anotace přednášek jsou spolu s prezentacemi dostupné na webové stránce konference www.pf.jcu.cz/upvm.

Přednesené příspěvky se kromě tradičních témat využití systémů počítačové algebry a dynamické geometrie ve výuce a softwarové podpory e-learningu věnovaly také aktuálním otázkám role výuky matematiky při rozvoji digitálních kompetencí žáků a s tím související technologické a didaktické podpoře matematického vzdělávání. Celkem na konferenci kromě 4 plenárních přednášek zaznělo 26 referátů a bylo uspořádáno 9 workshopů. Články vycházející z příspěvků jsou ve sborníku uvedeny v abecedním pořadí podle jmen autorů. Sborník byl recenzován členy programového výboru konference.

Poděkování patří členům organizačního výboru a studentům Pedagogické fakulty za jejich obětavou práci jak při přípravě, tak i během konference. Zvláštní poděkování si pak zaslouží vedení a konkrétní pracovníci Fakulty zemědělské a technologické za příkladné přispění ke zdárnému průběhu celé akce.

Programový výbor konference pracoval ve složení

Mgr. Roman Hašek, Ph.D.
doc. RNDr. Helena Koldová, Ph.D.
Dr. Carsten Miller
prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.
doc. RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D.
doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.
doc. RNDr. Libuše Samková, Ph.D.
doc. RNDr. Mária Slavíčková, PhD.
doc. PaedDr. Jiří Vaníček, Ph.D.
Mgr. Lukáš Vízek, Ph.D.
prof. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.
prof. David C. Webb, Ph.D.

V Českých Budějovicích 22. prosince 2023

Za programový výbor

doc. RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D.

ZÁŠTITA

11. konference „Užití počítačů ve výuce matematiky“ se konala pod záštitou

Pedagogické fakulty

a

Fakulty zemědělské a technologické

Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích

Obsah

IMPLEMENTACE 3D TISKU VE VÝUCE MATEMATIKY

Daniela Bímová, Jiří Břehovský a Petra Pirklová

Katedra matematiky, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická,
Technická univerzita v Liberci

Abstrakt: V příspěvku jsou představeny série typových úloh zaměřené na vzájemné přiřazování a zakreslování různých obrazů modelů krychlových těles a ořezaných krychlí. Pro mnohé žáky se řešení úloh uvedených typů jeví jako problematické, proto jsme pro všechny modely těles vyskytující se ve vytvořených sériích virtuálně vymodelovali a následně 3D vytiskli odpovídající fyzické modely. Ty jsme poskytli žákům 8. třídy ZŠ, kterým jsme série úloh zadali k vyřešení. Prezentujeme výsledky pozorování způsobů řešení úloh těmito žáky.

Klíčová slova: Vizuálně-prostorové schopnosti, geometrie, geometrická úloha, 3D tisk, 3D tištěné fyzické modely, virtuální modely, implementace.

Implementation of 3D Printing in Mathematics Education

Abstract: The paper presents a series of type problems to match and plot different images of cubic solid and cut cube models. For many pupils, solving these types of problems seems problematic, so we have virtually modelled and 3D printed the corresponding physical models for all solid models appearing in the series. These were provided to the 8th-grade elementary school students who were assigned the series of problems to solve. We present the results of the observations of how these pupils solved the problems.

Keywords: visuospatial abilities, geometry, geometrical problem, 3D printing, 3D printed physical models, virtual models, implementation.

Úvod

Spolu s rychlým vývojem technických a digitálních zařízení a s jejich čím dál častějším zastoupením v běžném životě jsou již dlouhodobě nastolovány otázky související s využíváním moderních technologií při výuce. Mezi témata, která rezonují laickou i odbornou veřejností, patří v tomto smyslu i využívání 3D tisku. Ten nachází svá uplatnění nejen ve vědě a v průmyslu, ale lze jej efektivně využívat i při výuce geometrie. Právě možnostmi využití 3D tisku jako jednoho z nástrojů při rozvíjení vizuálně-prostorových schopností žáků se dlouhodobě zabýváme.

Pojmy jako geometrická nebo prostorová představivost můžeme nahlížet v různých kontextech. Ani na mezinárodní úrovni v podstatě neexistuje obecná shoda v terminologii, která se má v této oblasti používat (Gutiérrez, 1996). V kontextu našeho příspěvku využíváme pojem vizuálně-prostorové schopnosti, které chápeme jako soubor dílčích aspektů tvořících kompletní škálu schopností žáka. Ta je jako celek potřebná k řešení různých problémů využívajících rovinnou či prostorovou představivost řešitele (žáka). Dílčí aspekty vizuálně-prostorových schopností uvádíme v tabulce 1 (Maier, 1994; Eichler, 2011).

Aspekty vizuálně-prostorových schopností
*“**Prostorové vnímání**” označuje schopnost vnímat a chápat prostorové vztahy mezi objekty a polohu objektů vzhledem k vlastnímu tělu.*
*“**Prostorová vizualizace**” je schopnost představit si objekty nebo seskupení objektů a mentálně je skládat, rozkládat, překládat nebo zrcadlit.*
*“**Mentální rotace**” popisuje mentální schopnost jedince rychle a přesně otáčet rovinný nebo prostorový obrázek. Představa otáčení objektu se odehrává buď kolem horizontální, vertikální nebo sagitální osy. (Přitom sagitální neboli předozadní osou rozumíme hloubkovou osu, která je kolmá současně k horizontální i k vertikální ose).*
*Pojem “**prostorový vztah**” se týká schopnosti představit si polohové vztahy mezi objekty v prostoru (např. za-před, nad-pod, vlevo-vpravo, mezi) za předpokladu, že je k dispozici pouze jejich dvourozměrná reprezentace, tj. jejich dvourozměrné zobrazení nebo verbální popis takovýchto prostorových situací. Pozorovatel je umístěn mimo prostorovou situaci.*
*“**Prostorová orientace**” je schopnost mentálně se umístit do prostorové situace a představit si polohové vztahy objektů z této perspektivy.*

Tab. 1: Aspekty vizuálně-prostorových schopností

Na důležitost rozvíjení právě těchto schopností a jejich následné uplatnění v průmyslových a vědních odvětvích poukazují četné studie (Wai, Lubinski & Benbow, 2009; Mulligan, 2015). Díky těmto schopnostem mohou žáci objekty správně vnímat, rozumět jejich vzájemným vztahům na rovinné i prostorové úrovni, představovat si je a také s nimi mentálně manipulovat (Maier, 1994; Battista, 1999). Mohlo by se zdát, že vizuálně-prostorové schopnosti souvisí pouze s geometrií nebo trojrozměrným světem kolem nás. Jejich důležitost ale nalézáme i v jiných oblastech.

Pravděpodobně nalezneme širší shodu v tom, že jednou z klíčových schopností, nezbytných pro úspěch v matematice, je schopnost představit si čísla, číselné vztahy a operace (Lorenz, 1992; Dehaene, 1997; Georges, Cornu & Schiltz, 2019). Jedna z možností, jak můžeme nahlížet na pamětné počítání, je vnímat jej jako pomyslný pohyb po číselné ose. Taková reprezentace numerických vztahů je velmi důležitá pro získání početních dovedností. Vzdálenost mezi čísly 9 a 10 je vnímána jako krátká, výraz 81 – 79 je mentálně reprezentován jako „malá mezera“ a úloha 81 – 79 je takto řešena tzv. mentálně konceptuální vizualizací tohoto prostorového vztahu. Nedávno uskutečněné neuro-zobrazovací studie tuto myšlenku podporují: "Proto by mentální mechanismy, o nichž se předpokládá, že podporují prostorové transformace, mohly být také ideálně vhodné pro podporu aritmetických transformací." (Hubbard, Piazza, Pinel & Dehaene, 2005, str. 445).

Je zřejmé, že získání dovedností v oblastech prostorového vnímání, vizualizace a schopnosti používat polohové vztahy není v žádném případě užitečné pouze pro správné zodpovězení několika problémů souvisejících se školskou geometrií. Má také zásadní význam v mnoha oblastech lidských činností včetně vědeckého myšlení, aritmetických a algebraických dovedností a schopnosti počítat (Castro-Alonso & Uttal, 2019; Georges, Cornu a Schiltz 2019).

Ukazuje se též, že lze úroveň těchto schopností žáků cíleně zvyšovat (Gilligan, Thomas & Farran, 2020).

Nejčastějším využitím 3D tisku ve školách bývá tisk modelů a jejich následné využití jako didaktické pomůcky přímo ve výuce. Výhodou je, že teoreticky nejsme omezeni tvarem ani barvou tištěného modelu. Takto lze získat modely těles, které přesně vyhovují výukovým potřebám. Jsme přesvědčeni o tom, že pro rozvíjení vizuálně-prostorových schopností žáků má 3D tisk mnohem větší potenciál. Ten se skrývá v celkovém procesu 3D tisku. Před vlastním tiskem je nutné nejprve vytvořit virtuální 3D model tělesa v konkrétním softwaru, takovýto virtuální 3D model tělesa uložit v souboru formátu *.stl, z něj posléze vygenerovat (včetně konfigurace případných podpěr) soubor formátu *.gcode, který již komunikuje s 3D tiskárnou. Celý tento proces probíhá na dvourozměrné obrazovce počítače a vytváří značné nároky na představivost tvůrce.

V příspěvku popíšeme využití virtuálních a 3D tištěných fyzických modelů krychlových těles a ořezaných krychlí při řešení speciálně vytvořených sérií typových úloh. Přitom výhody zařazování sérií vytvořených typových úloh do výuky spatřujeme v cíleném trénování vizuálně-prostorových schopností žáků.

1 Projekt iTEM

Od srpna 2020 do července 2023 jsme se podíleli společně se třemi kolegy z partnerské norské NORD Univerzity, kampus v Bodø na řešení projektu Fondů EHP 2014-2021 programu Vzdělávání s názvem iTEM – Improve Teacher Education in Mathematics (Zlepšování výuky učitelů matematiky), viz https://kma.fp.tul.cz/activities/item. Během řešení projektu jsme plnili čtyři hlavní, původně stanovené cíle:

- zkoumali jsme možnosti rozvíjení vizuálně-prostorových schopností žáků;
- vytvořili jsme interaktivní webovou stránku Mathematikus (www.mathematikus.de) jako digitální nástroj vhodný k procvičování vizuálně-prostorových schopností žáků 1. stupně základní školy;
- programovali jsme mikropočítače zvané micro:bity;
- zabývali jsme se 3D tiskem, a to jak z pohledu samotné tvorby virtuálních 3D modelů a z nich následných 3D tištěných fyzických edukativních modelů, tak i z pohledu možného využití takto vytvořených modelů ve výuce.

Kromě čtyř uvedených hlavních cílů jsme si vytyčili řadu dílčích cílů. V souvislosti s 3D tiskem a rozvojem vizuálně-prostorových schopností žáků nás především zajímalo,

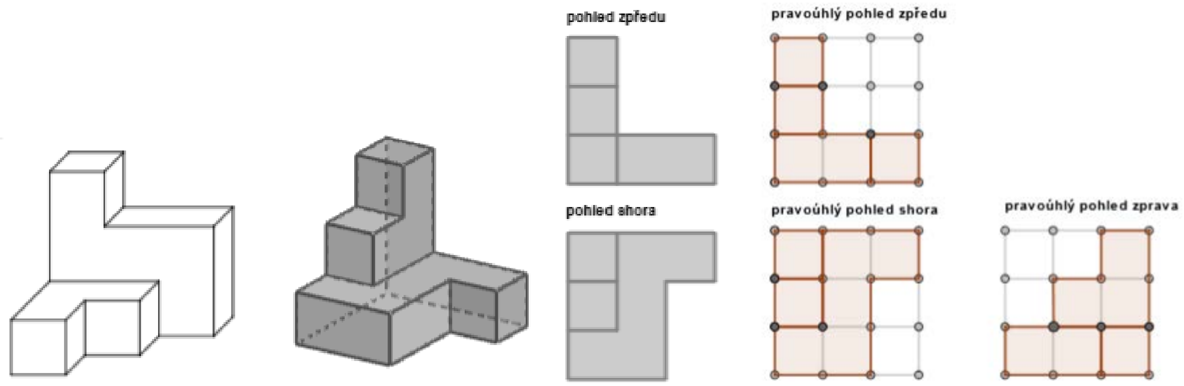
- jaké aspekty svých vizuálně-prostorových schopností žáci užívali při řešení úloh prostorové geometrie;
- zda a s jakým úspěchem byli žáci schopni řešit takové úlohy prostorové geometrie, jejichž zadání znázorněné na dvourozměrné obrazovce obsahovalo jak statické, tak i dynamické virtuální 3D modely vytvořené v softwaru GeoGebra;
- zda a do jaké míry žákům při řešení úloh prostorové geometrie pomáhaly 3D tištěné fyzické modely těles;
- zda a jak správně jsou žáci schopni určovat a zakreslovat pravoúhlé pohledy na modely, které jsou znázorněny v různých typech promítání;
- zda a jak správně přiřadí žáci 3D tištěné fyzické modely k jim odpovídajícím virtuálním modelům zobrazeným v různých typech promítání.

2 Série typových úloh zaměřených na vzájemné přiřazování a zakreslování různých obrazů modelů krychlových těles a ořezaných krychlí

Následuje stručné představení sérií šesti typových úloh zaměřených na vzájemné přiřazování a zakreslování různých obrazů modelů krychlových těles a ořezaných krychlí. Série těchto typových úloh jsou umístěny online na weblinku https://www.geogebra.org/m/rpgjcyn3 v GeoGebra knize s názvem „Různá zobrazení krychlových těles a ořezaných krychlí“. V této GeoGebra knize jsou zadání všech úloh v češtině. A protože jsme v projektu spolupracovali s norskými kolegy, přeložili jsme zadání všech úloh do angličtiny, aby i norští kolegové mohli v Norsku námi vytvořené série typových úloh ve výuce testovat a později i využívat. Odpovídající série typových úloh se zadáními v angličtině jsou dostupné na weblinku https://www.geogebra.org/m/sagcerkg v GeoGebra knize pojmenované „Different representations of cubic solids and cut cubes.“

Námi vytvořené série typových úloh lze rozdělit do dvou kategorií. Do první kategorie spadají úlohy, v nichž je úkolem **přiřazovat odpovídající si obrazy virtuálních modelů krychlových těles k sobě navzájem**, anebo obrazy virtuálních modelů krychlových těles k odpovídajícím fyzickým modelům. Přitom virtuálními obrazy modelů krychlových těles (pro jejich vizualizaci viz obr. 1) rozumíme

- *jejich zobrazení ve volném rovnoběžném promítání* (VRP) *ve* 2D *okně programu GeoGebra* (modely krychlových těles zobrazených ve VRP nemají zakreslené neviditelné hrany);
- *jejich virtuální* 3D *modely vytvořené v rovnoběžném promítání ve* 3D *okně programu GeoGebra* (u modelů krychlových těles znázorněných v RP jsou programem GeoGebra automaticky vygenerovány neviditelné hrany (pokud jsou tak nástroje programu uživatelem nastaveny), jejich zobrazení – odlišované pomocí jiného stylu čar (čárkovaná čára) – se automaticky přepíná při manipulaci s virtuálním 3D modelem ve 3D okně programu GeoGebra);
- *dvojice mnohoúhelníků zobrazených ve shodných čtvercových mřížkách o rozměrech* 3 × 3 *a představujících pravoúhlé pohledy zpředu a shora na příslušná krychlová tělesa,*
- *trojice mnohoúhelníků zobrazených ve shodných čtvercových mřížkách o rozměrech* 3 × 3 *a představujících pravoúhlé pohledy zpředu, shora a zprava na příslušná krychlová tělesa.*



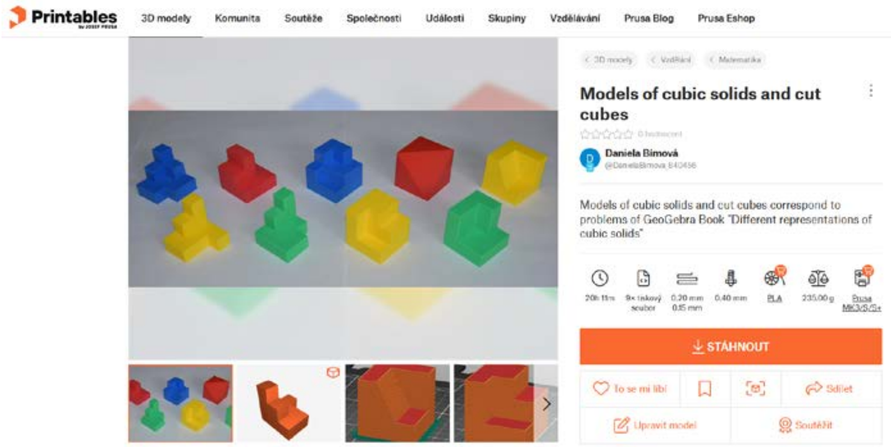
Obrázek 1: Virtuální obrazy modelů krychlových těles; zdroj: autor

Obtížnost úloh v první kategorii je zvýšena tím, že v každé úloze je jiný počet správných odpovědí. Počet správných odpovědí se pohybuje od žádné až po čtyři zpravidla z celkových pěti možných.

Principem řešení série typových úloh druhé kategorie je **zobrazování pravoúhlých pohledů na modely krychlových těles a ořezaných krychlí do předkreslených shodných čtvercových mřížek o rozměrech 3 × 3**. U modelů ořezaných krychlí narýsovaných ve VRP lze neviditelné hrany zobrazovat/skrývat pomocí speciálně vytvořených tlačítek.

Dynamické nástroje programu GeoGebra umožňují otáčení, pohybování a přibližování či oddalování modelu krychlového tělesa, resp. ořezané krychle ve 3D okně programu. Řešitelé tak mají možnost natáčet model zobrazený v RP do různých úhlů pohledu, tzn., mohou jej ve 3D okně otočit do těch poloh, v jakých jsou zobrazeny modely krychlových těles ve VRP, anebo do příslušných směrů pravoúhlých pohledů. Rolováním kolečka myši lze model krychlového tělesa ve 3D okně programu přibližovat/oddalovat ve směru k uživateli (tj. k řešiteli úlohy) nebo směrem od uživatele (tj. od řešitele úlohy). Užitím speciálního nástroje a tažením myši je možné pohybovat s modelem tělesa ve 3D okně programu ve směrech jednotlivých souřadnicových os.

Za fyzické modely považujeme 3D tištěné modely příslušných krychlových těles a ořezaných krychlí. Potřebné zdrojové soubory k 3D tisku fyzických modelů odpovídajících tělesům vyskytujícím se ve všech šesti sériích typových úloh jsme nahráli a sdílíme online na webovém linku https://www.printables.com/cs/model/628595-models-of-cubic-solids-and-cut-cubes. Na obr. 2 je k vidění náhled této webové stránky.



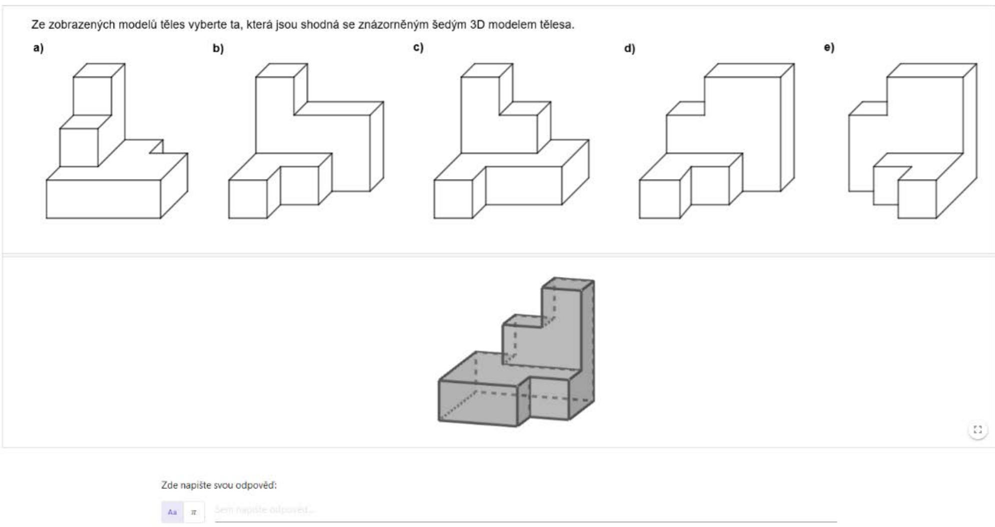
Obrázek 2: Náhled webové stránky, na níž jsou umístěny soubory s podklady k 3D tisku fyzických modelů krychlových těles a ořezaných krychlí; zdroj: autor

Dále představíme jednotlivé série typových úloh.

2.1 Přiřazování obrazu modelu tělesa ve VRP k modelu tělesa v RP

Úkolem v sérii typových úloh č. 1 je k modelu krychlového tělesa zobrazenému v RP přiřadit odpovídající obraz, resp. obrazy narýsované ve VRP.

Pro náhled zadání jedné z úloh série typových úloh č. 1 viz obr. 3.



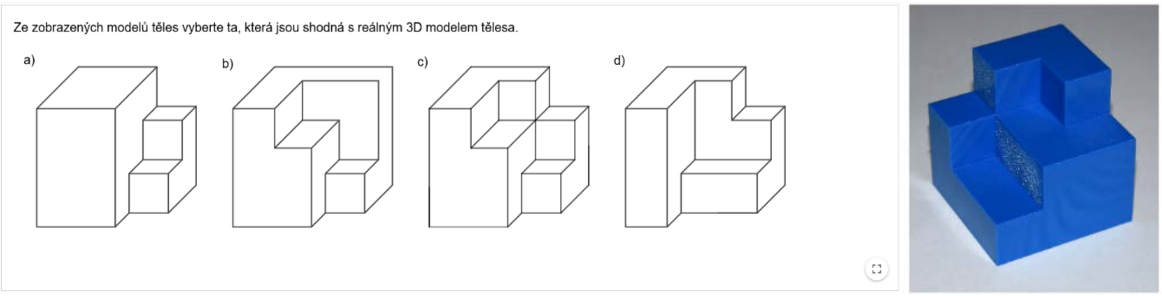
Obrázek 3: Zadání úlohy, v níž k modelu tělesa v RP přiřazujeme odpovídající obraz ve VRP; zdroj: autor

Do série typových úloh č. 1 jsme zařadili čtyři úlohy. U jedné z těchto úloh není v předložené nabídce obrazů modelů krychlových těles zakreslených ve VRP žádný takový obraz, který by odpovídal modelu krychlového tělesa znázorněnému v RP. U zbývajících třech úloh lze mezi nabízenými obrazy modelů krychlových těles zakreslenými ve VRP najít vždy dva správné, tj. dva obrazy zakreslené ve VRP odpovídají danému modelu krychlového tělesa v RP.

2.2 Přiřazování obrazu modelu tělesa ve VRP k fyzickému modelu tělesa

Úkolem v sérii typových úloh č. 2 je přiřadit odpovídající obraz, resp. obrazy modelů krychlových těles narýsovaných ve VRP k příslušnému 3D tištěnému fyzickému modelu tělesa.

Součástí každého zadání úloh této série je i fyzický model krychlového tělesa. Zadání jedné úlohy společně s fotografií fyzického modelu uvádíme na obr. 4.



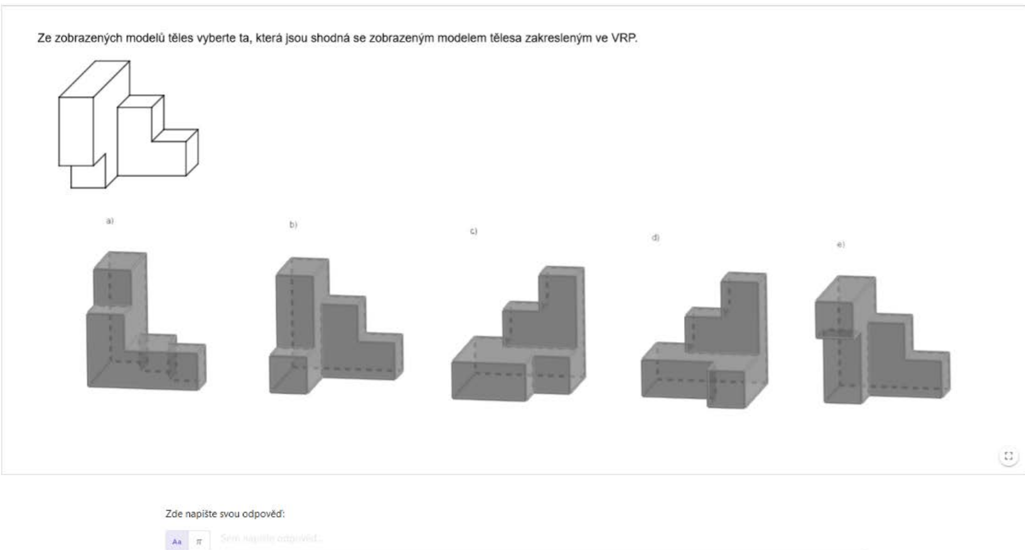
Obrázek 4: Zadání úlohy, v níž k fyzickému modelu krychlového tělesa přiřazujeme odpovídající obraz, resp. obrazy modelu tělesa znázorněné ve VRP; zdroj: autor

V sérii typových úloh č. 2 jsou zařazeny tři úlohy. V prvních dvou úlohách této série je vždy pouze jedno správné řešení. U poslední třetí úlohy existují dvě správná řešení.

2.3 Přiřazování modelu tělesa v RP k obrazu modelu tělesa ve VRP

Úkolem v sérii typových úloh č. 3 je k obrazu modelu krychlového tělesa zakreslenému ve VRP přiřadit jemu odpovídající model, resp. modely vytvořené v RP. Rozdílem oproti zadáním úloh ostatních sérií je ta skutečnost, že s modely krychlových těles vytvořenými v RP není možné otáčet a pohybovat, neboť jsou staticky vloženy do druhého 2D okna programu GeoGebra.

Pro náhled zadání jedné z úloh série typových úloh č. 3 viz obr. 5.



Obrázek 5: Zadání úlohy, v níž k obrazu modelu tělesa ve VRP přiřazujeme odpovídající model, resp. modely znázorněné v RP; zdroj: autor

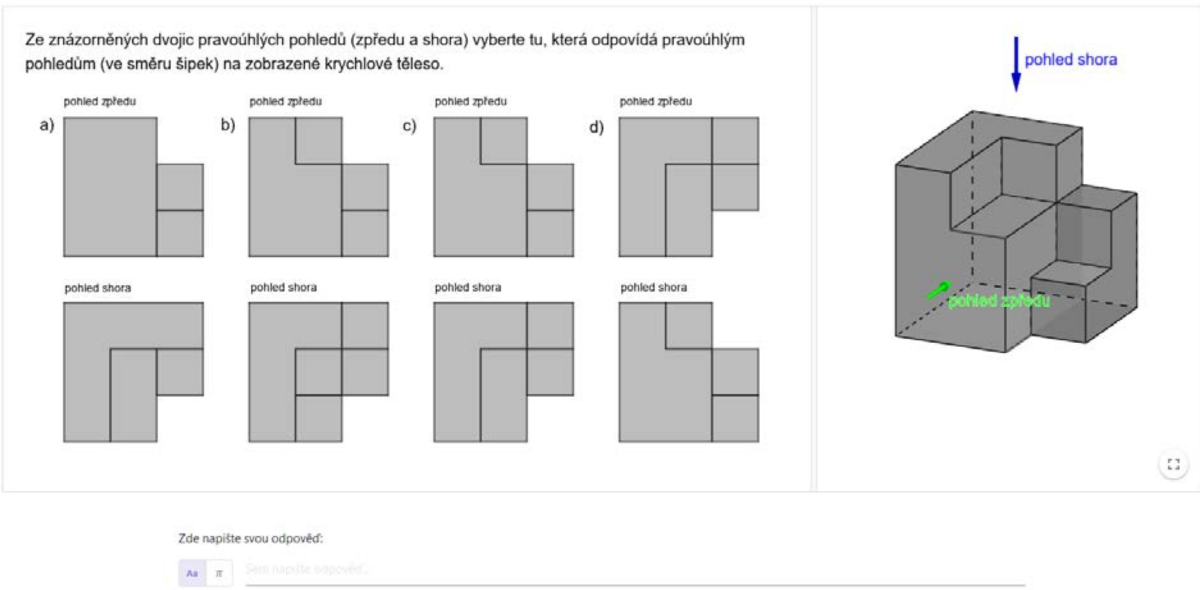
Do série typových úloh č. 3 jsme umístili osm úloh, přičemž v pěti úlohách řešitelé přiřazují k obrazu modelu krychlového tělesa narýsovanému ve VRP odpovídající model, resp. modely ztvárněné v RP z nabídky pěti modelů a ve třech úlohách z nabídky čtyř modelů.

U úloh v této sérii jsme volili různé počty správných řešení. Ve třech úlohách existuje právě jedno správné řešení, v dalších třech úlohách existují dvě správná řešení. V úlohách s nabídkami pěti modelů jsou v jedné úloze tři správná řešení a v jiné úloze dokonce čtyři správná řešení.

2.4 Přiřazování odpovídající dvojice pravoúhlých pohledů k modelu tělesa v RP

Úkolem v sérii typových úloh č. 4 je přiřadit odpovídající dvojici pravoúhlých pohledů k modelu krychlového tělesa vytvořenému v RP ve 3D okně programu GeoGebra.

Do uvedené série jsme zařadili pět úloh. V první z nich mají žáci za úkol přiřadit k modelu krychlového tělesa zobrazenému jak staticky ve VRP ve 2D okně, tak i dynamicky v RP ve 3D okně programu GeoGebra odpovídající dvojici pravoúhlých pohledů (pravoúhlý pohled zpředu a pravoúhlý pohled shora) na model tohoto tělesa. V nabídce řešení je u této úlohy zobrazeno pět dvojic pravoúhlých pohledů. Ve zbylých čtyřech úlohách žáci přiřazují pouze z nabídky čtyř dvojic pravoúhlých pohledů, a to pouze k modelu krychlového tělesa znázorněnému v RP, viz obr. 6.



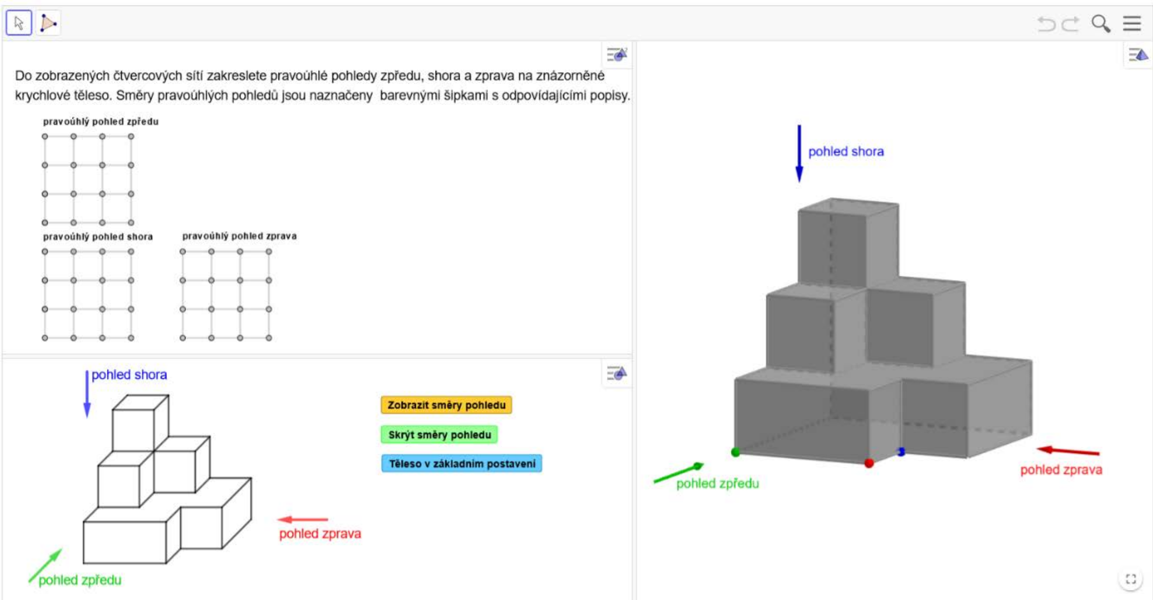
Obrázek 6: Zadání úlohy, v níž k modelu tělesa zobrazenému v RP přiřazujeme jemu odpovídající dvojici pravoúhlých pohledů zpředu a shora; zdroj: autor

V každé úloze ze série těchto typových úloh existuje pouze jedno správné řešení, tj. ke každému danému modelu krychlového tělesa lze přiřadit právě jednu dvojici pravoúhlých pohledů na něj z předložené nabídky.

2.5 Zobrazení pravoúhlých pohledů na model tělesa zobrazený ve VRP a RP

Úkolem v sérii typových úloh č. 5 je vlastní zobrazování třech pravoúhlých pohledů (pravoúhlé pohledy zpředu, shora a zprava) na modely daných krychlových těles a ořezaných krychlí.

Řešení úloh této série je pro žáky náročnější než řešení úloh předchozích sérií, protože úkolem žáků již není pouhé přiřazování z nabízených možností řešení. V této sérii typových úloh už žáci řešení sami tvoří, a to s pomocí nástrojů programu GeoGebra, které mají k dispozici. Vzhledem ke skutečnosti, že ne všichni žáci mají dosavadní zkušenosti s prací v tomto programu, předpřipravili jsme v jednotlivých úlohách tři shodné čtvercové mřížky (o rozměrech 3 × 3) společně s vyznačenými mřížovými body. Žáci tak mohou relativně snadno s užitím nástroje mnohoúhelník zobrazovat do těchto čtvercových mřížek svá řešení. Pro jednoznačnost umístění zobrazovaných pravoúhlých pohledů jsme nad jednotlivé čtvercové mřížky nadepsali, jaký pravoúhlý pohled má být v příslušné mřížce zobrazen. Směry pravoúhlých pohledů na model tělesa jsou v obou zobrazeních vyznačeny barevnými šipkami společně s příslušnými popisy, viz obr. 7.

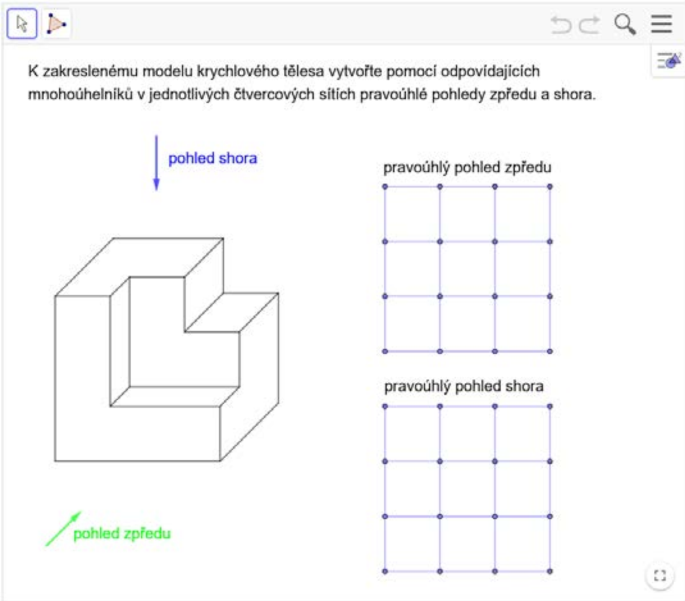


Obrázek 7: Zadání úlohy, v níž k modelu tělesa zobrazenému ve VRP a v RP zakreslujeme odpovídající trojici pravoúhlých pohledů zpředu, shora a zprava na něj; zdroj: autor

V sérii typových úloh č. 5 je zařazeno pět úloh, přičemž ve třech úlohách žáci zakreslují pravoúhlé pohledy na modely krychlových těles a ve dvou úlohách znázorňují pravoúhlé pohledy na modely ořezaných krychlí.

2.6 Zobrazení pravoúhlých pohledů na model tělesa znázorněný ve VRP

Úkolem v sérii typových úloh č. 6 je znázornit do předkreslených shodných čtvercových mřížek o rozměrech 3 × 3 pravoúhlé pohledy zpředu a shora na model krychlového tělesa narýsovaného ve VRP, viz obr. 8.



Obrázek 8: Zadání úlohy, v níž k modelu krychlového tělesa znázorněnému ve VRP zakreslujeme odpovídající dvojici pravoúhlých pohledů zpředu a shora na něj; zdroj: autor

V sérii typových úloh č. 6 jsou zařazeny tři analogické úlohy. V porovnání s úlohami vloženými v sérii typových úloh č. 5 jsou úlohy v této sérii náročnější, a to z toho důvodu, že modely krychlových těles jsou zde zakresleny pouze staticky ve VRP ve 2D okně programu GeoGebra. Žáci tedy nemají možnost dynamicky pohybovat ani se scénou, ani s modelem tělesa ve 3D okně programu.

3 Implementace sérií typových úloh a 3D tištěných modelů těles ve výuce

Implementací navržených úloh dochází k ověřování jejich vlastností a potenciálu k rozvíjení vizuálně-prostorových schopností žáků přímo ve výuce matematiky. V následujícím textu popíšeme průběh a výsledky první implementace, která proběhla dne 24. 5. 2023 na ZŠ Broumovská, Liberec při výuce matematiky. Jednalo se o jedno z plánovaných ověřování úloh, jehož výsledky jsou využívány k následným úpravám úloh a jejich zadání. Implementace se zúčastnilo celkem 30 žáků, z toho 25 žáků osmé třídy a 5 žáků deváté třídy. Výuka probíhala v PC učebně po dobu dvou po sobě následujících vyučovacích hodin.

Při výuce byly přítomny dvě vyučující, které vyučují matematiku v 8. a 9. ročníku na zmíněné ZŠ, a tři členové projektového týmu z Katedry matematiky FP TUL. Daniela Bímová lektorovala práci žáků během obou dvou vyučovacích hodin. Petra Pirklová a Jiří Břehovský primárně pozorovali práci žáků a jejich přístupy k řešení jednotlivých úloh (pohyby těla, využívání změn poloh virtuálního modelu tělesa, způsoby využívání fyzických modelů atp.) a pořizovali fotodokumentaci.

Během implementace jsme s výhodou využívali online prostředí GeoGebra třídy, do které se jednotliví žáci přihlásili a v níž také zaznamenávali svá řešení. Žáci měli také k dispozici vytištěné modely těles, které mohli využívat k modelování situací ze zadání úloh.

3.1 Průběh implementace

Během implementace měl každý žák k dispozici vlastní počítač (kromě jedné dvojice, která z technických důvodů pracovala na jednom PC) a vypracovával úlohy v online prostředí předem speciálně vytvořené GeoGebra třídy. Výhody prostředí online GeoGebra třídy jsou mj. následující:

- její tvůrce má možnost sledovat průběžnou činnost přihlášených uživatelů;
- její tvůrce má možnost vidět finální výsledky zaznamenané přihlášenými uživateli, a to po neomezenou dobu, tzn., může se k pracím uživatelů vracet i zpětně.

Průběh zadání a řešení jednotlivých úloh byl vždy stejný. Lektorka nejprve žákům na první úloze dané série názorně ukázala, jak mají své odpovědi zaznamenávat, a vysvětlila jim podstatu zadání úlohy. Žáci měli čas na samostatné řešení a poté probíhala kontrola správnosti žákovských řešení formou hlasování žáků o nabízených odpovědích zvednutím ruky. Zaznamenávali jsme nejistotu ve zvedání rukou, především v těch případech, kdy danou odpověď volilo pouze málo žáků. Žáci byli vyzváni k tomu, aby v případech, kdy si nebudou schopni ve svých představách vytvořit názorný obrázek požadované prostorové situace (např. v souvislostech s umístěním daných modelů těles v prostoru, s nastavením pravoúhlých pohledů na modely daných těles apod.), aby se nebáli a požádali o zapůjčení 3D vytištěných fyzických modelů těles. Přes prvotní ostych si někteří žáci v průběhu řešení úloh pravidelně fyzické modely půjčovali. Implementované úlohy byly pro žáky nestandardní a doposud se s typy takových úloh nesetkali.

3.2 Reakce a činnosti žáků během implementace

Během řešení navržených úloh žáky jsme pozorovali, jaké způsoby a metody řešení úloh žáci používali. Zaměřovali jsme se také na „řeč těla“, tedy například na ukazování prsty, pohyby rukou, naklánění či otáčení hlavy nebo celého těla atp. Dále nás zajímalo, zda a jakým způsobem budou žáci při řešení úloh využívat vytištěné modely těles.

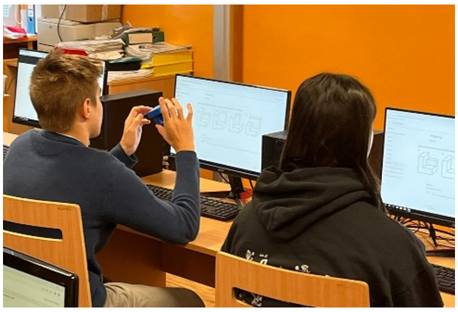
3.2.1 Série typových úloh č. 1

V sérii typových úloh č. 1 je úkolem přiřazovat k modelu krychlového tělesa zobrazenému v RP jemu odpovídající obraz, resp. obrazy narýsované ve VRP. První dvě úlohy z této série řešili žáci za asistence lektorky. Správná řešení těchto dvou úloh spíše tipovali, což bylo zřejmé z jejich váhavosti při zvedání rukou pro jednotlivé varianty nabízených odpovědí. Po sdělení správné odpovědi a názorné ukázce manipulace s fyzickým modelem tělesa lektorkou do jednotlivých poloh, ve kterých byly znázorněny obrazy modelů těles ve VRP, bylo evidentní, že již většina žáků pochopila princip řešení této série úloh.

Během samostatného řešení třetí úlohy z této série pohybovali pouze 3 žáci s virtuálním 3D modelem krychlového tělesa, ostatní žáci tedy k řešení této úlohy využili pouze svou představivost. Všichni žáci správně určili a do odpovědi i zapsali, že žádný z obrazů modelů těles znázorněných ve VRP neodpovídá 3D modelu krychlového tělesa. I čtvrtou úlohu z této série vyřešili všichni žáci správně.

3.2.2 Série typových úloh č. 2

V sérii typových úloh č. 2 žáci přiřazovali obraz, resp. obrazy modelů krychlových těles zobrazených ve VRP k fyzickému modelu, který jim u každé z dílčích úloh ukazovala lektorka. Lektorka nejprve držela model na dlani v jedné poloze, ale posléze jej otáčela a ukazovala i z jiných úhlů pohledu. Některým žákům takováto demonstrace modelu tělesa stačila a vybrané řešení zapsali během několika sekund. Šest žáků si u této úlohy vyžádalo zapůjčení fyzického modelu příslušného tělesa. Těmto žákům trvalo rozhodnutí stanovení odpovědi řádově o desítky sekund déle. Tito žáci potřebovali více času pro nastavení fyzického modelu tělesa do „správné“ polohy v závislosti na poloze zobrazení jednotlivých modelů těles uvedených v nabídkách, viz obr. 9.



Obrázek 9: Manipulace žáka s fyzickým modelem krychlového tělesa; zdroj: autor

Překvapením pro nás bylo, že u druhého příkladu z této série úloh zaznamenalo 25 žáků z celkových 29 chybnou odpověď, resp. ke správnému zobrazení modelu tělesa ve VRP vybrali žáci ještě i zobrazení nepřímo shodného modelu tělesa ve VRP. V první úloze této série chybovali pouze 3 žáci, ve třetí úloze nechyboval žádný žák. Příčina tohoto jevu bude předmětem dalšího zkoumání.

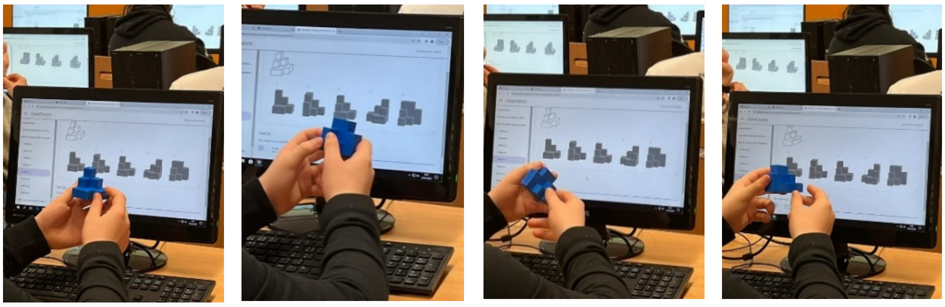
3.2.3 Série typových úloh č. 3

Při řešení typových úloh č. 3 žáci přiřazovali k obrazu modelu krychlového tělesa zakreslenému ve VRP jemu odpovídající model, resp. modely vytvořené v RP. Nalezení správného řešení u série těchto úloh se jevilo snazší při využití a manipulaci s fyzickým modelem v ruce. Při řešení prvních dvou úloh z této série se žáci ještě styděli si zapůjčit fyzické modely. I tato skutečnost se projevila v chybovosti jejich odpovědí u těchto úloh. U první úlohy zapsalo 8 žáků chybnou odpověď, resp. 7 z nich uvedlo pouze jednu odpověď ze dvou správných, druhou buď vůbec neuvedli, anebo zvolili chybnou odpověď. Chybovost u druhé úlohy byla ještě vyšší, 10 žáků zvolilo chybnou kombinaci správných odpovědí, přitom 8 z nich uvedlo pouze 2 správné odpovědi ze tří možných.

Od řešení třetí úlohy z této série se žáci přestali ostýchat a začali si říkat o půjčení fyzických modelů krychlových těles. Během řešení třetí úlohy natáčelo aktivně 20 žáků společně s hlavou i celé tělo tak, aby viděli modely krychlových těles v RP v takových pozicích, v jakých je zobrazen model krychlového tělesa ve VRP. Většinou docházelo k pohybům celého těla včetně změny posazení na židli.

K řešení čtvrté úlohy této série si 5 žáků a žákyň vyžádalo fyzický model. Jedna žákyně položila fyzický model krychlového tělesa na lavici a rukama ukazovala směry pohledu na něj. Pak se v jejich směrech na fyzický model tělesa začala dívat a na základě těchto pohledů rozhodovala o správnosti či nesprávnosti nabízených variant odpovědí. Ostatní žáci manipulovali s modelem v ruce, případně natáčeli hlavu.

Při řešení páté úlohy této série jeden z žáků stanovil odpověď úlohy na základě užití svých vizuálně-prostorových schopností, nebyl si však jistý, zda zvolil správnou odpověď, a tak požádal o fyzický model tělesa. Po manipulaci s ním zvolal: „Tohle je správné řešení, já jsem to věděl!“ Kromě něj si dalších 8 spolužáků zapůjčilo fyzický model tělesa. Pro postupný proces manipulace jednoho z žáků s fyzickým modelem krychlového tělesa viz obr. 10.

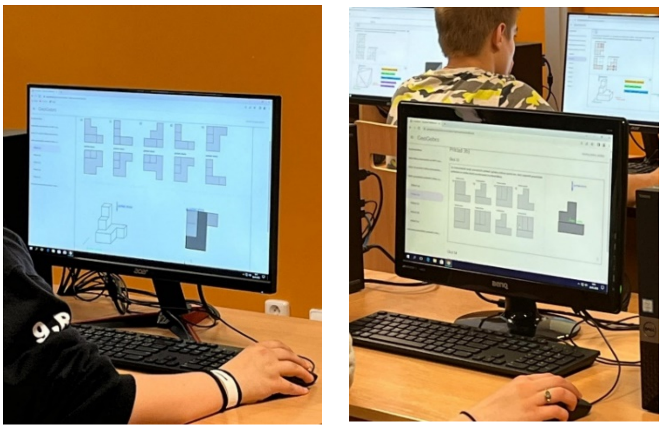


Obrázek 10: Postupný proces manipulace žáka s fyzickým modelem krychlového tělesa; zdroj: autor

3.2.4 Série typových úloh č. 4

Podstatou typových úloh č. 4 je přiřazení odpovídající dvojice pravoúhlých pohledů k modelu krychlového tělesa zobrazenému v RP. Jedna žákyně s fyzickým modelem krychlového tělesa v ruce při řešení první úlohy z této série konstatovala: „Teď pro mě nebyl problém najít řešení.“ Nebyla sama, kdo si o fyzický model požádal, spolu s ní si k určení řešení první úlohy požádali o fyzický model ještě čtyři její spolužáci. V této úloze zapsalo chybnou odpověď 9 žáků a 1 žák žádnou odpověď nezapsal.

Na druhou stranu při řešení druhé úlohy této série 7 studentů hýbalo aktivně s virtuálním 3D modelem krychlového tělesa, u třetí úlohy už to bylo 11 studentů, viz obr. 11. U druhé úlohy 4 žáci zapsali chybné odpovědi a u třetí úlohy odpověděli chybně jen 3 žáci.



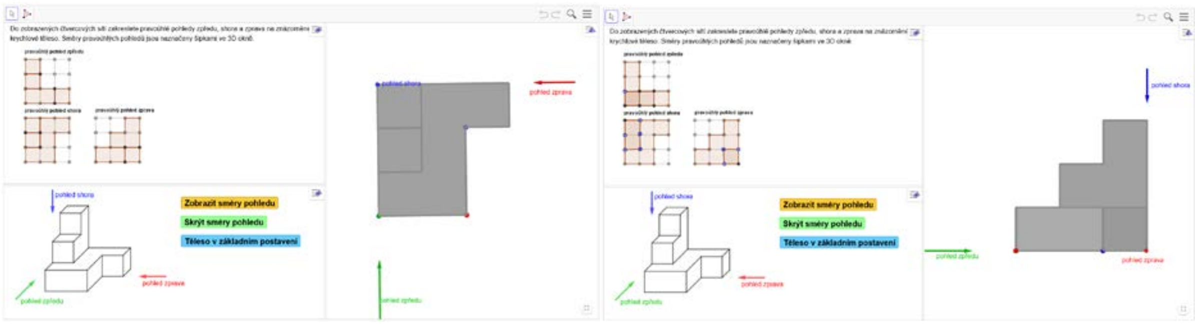
Obrázek 11: Manipulace žáků s virtuálním 3D modelem krychlového tělesa; zdroj: autor

Čtvrtou úlohu této série řešilo pouze 19 žáků, 10 žáků nezapsalo žádnou odpověď. Z 19 zapsaných odpovědí byla pouze jedna chybná. Pátou úlohu řešilo již jen 13 žáků a všechny uvedené odpovědi byly správné. Ze záznamů v GeoGebra třídě plyne, že čtvrtou a pátou úlohu řešili především žáci, kteří mají vyšší úroveň prostorové představivosti, pochopili principy přiřazování odpovídající dvojice pravoúhlých pohledů k modelu tělesa zobrazenému v RP a až na jednu výjimku v odpovědích nechybovali.

3.2.5 Série typových úloh č. 5

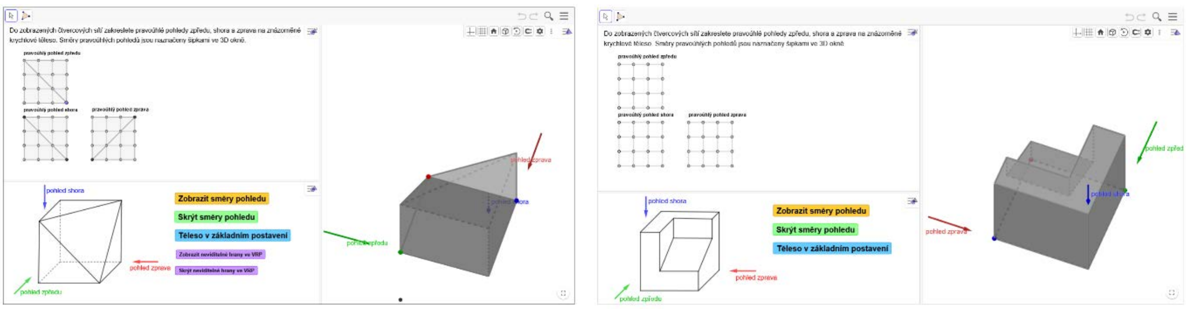
V sérii typových úloh č. 5 je úkolem zobrazit do předpřipravených čtvercových mřížek pravoúhlé pohledy na modely krychlových těles a ořezaných krychlí zobrazené ve VRP a v RP.

Při řešení první úlohy z páté série již 18 žáků aktivně pohybovalo a otáčelo s virtuálním 3D modelem krychlového tělesa, zpravidla jej otáčeli do odpovídajících pozic (viz obr. 12). Tuto skutečnost má možnost vidět i tvůrce GeoGebra třídy (učitel) při zpětném nahlížení do úloh vypracovaných žáky.



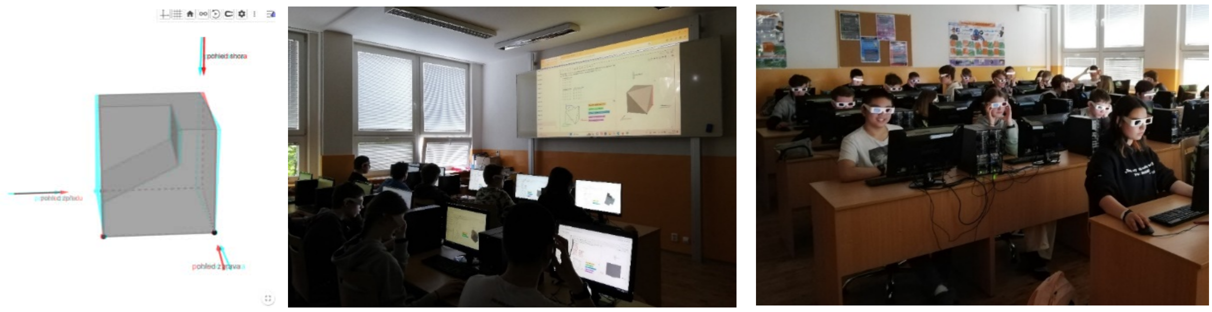
Obrázek 12: Nastavení pravoúhlých pohledů u virtuálního 3D modelu krychlového tělesa žáky; zdroj: autor

U čtvrté úlohy z páté série úloh se poprvé objevil model ořezané krychle. Ukázalo se, že minimálně 8 přítomných žáků mělo problém s natočením virtuálního 3D modelu tohoto tělesa do správných poloh. Analogicky tomu bylo při manipulaci s virtuálním 3D modelem ořezané krychle u pátého příkladu této série. Viz obr. 13.



Obrázek 13: Vizualizace finálních nastavení poloh virtuálních 3D modelů ořezaných krychlí dvěma žáky; zdroj: autor

Při řešení čtvrté i páté úlohy docházelo k mnoha spontánním komentářům žáků, například: „To nejde nakreslit!“, „Je to jen šedivý, já to v tom nevidím.“ V důsledku toho jeden z žáků začal pomocí nástrojů programu GeoGebra měnit barvy jednotlivých stěn modelu tělesa, aby se v prostorové úloze lépe orientoval a my jsme zareagovali ještě jiným způsobem. Rozdali jsme žákům anaglyfické brýle, nechali jsme je přepnout scénu ve 3D okně programu do verze pro anaglyfické brýle a skrze brýle pozorovat zobrazené virtuální 3D modely těles, se kterými mohli pohybovat. Viz obr. 14. Během této aktivity někteří žáci projevovali svůj údiv slovy: „Ten model krásně vystupuje do popředí.“, „Teď to v tom konečně vidím.“ Jiní ale na druhou stranu sklesle konstatovali: „Já to v tom stejně pořád nevidím…“



Obrázek 14: Pozorování virtuálních 3D modelů ořezaných krychlí pomocí anaglyfických brýlí; zdroj: autor

3.2.6 Série typových úloh č. 6

K řešení typových úloh šesté série se dostali asi jen 3 nejšikovnější žáci, ostatní žáci se k řešení těchto úloh nedopracovali díky nedostatku času vzhledem k jejich pomalejšímu tempu při řešení předchozích úloh. Z tohoto důvodu nebudeme průběh a výsledky řešení těchto úloh dále komentovat.

Závěr

V článku jsme stručně představili první sadu námi navrhovaných úloh, jejichž cílem je efektivní rozvíjení vizuálně-prostorových schopností žáků s využitím 3D tisku. Dále jsme popsali průběh jejich pilotní implementace při výuce matematiky a uvedli jsme výsledky pozorování této implementace. V podstatě šlo o jistý druh případové studie, jejíž výsledky slouží především ke korekcím stávajících úloh, tvorbě dalších úloh a přípravě jejich budoucího experimentálního ověřování. Výsledky pozorování potvrzují, že ne všichni zúčastnění žáci jsou schopni mentálních manipulací. Právě těmto žákům při řešení úloh významně pomohlo použití fyzického modelu tělesa. Totiž ne vždy žákům k určení správného řešení stačilo měnit polohy virtuálního modelu tělesa, někteří z nich potřebovali k vytvoření správné představy příslušné prostorové situace využít i fyzický model. Mnoho žáků při řešení úloh záměrně pohybovalo částmi těla nebo celým svým tělem tak, aby získali přesnější představu o zobrazené situaci, a to jak při pozorování virtuálních či zobrazených modelů těles na dvourozměrné obrazovce počítače, tak i při využití vytištěného 3D fyzického modelu. Přičemž nezáleželo na tom, zda žáci drží model v ruce, nebo ho mají položený na lavici.

Ve vytváření a ověřování dalších úloh i komplexnějších aktivit s využitím 3D tisku jako komplexního a efektivního nástroje pro zvyšování vizuálně-prostorových schopností žáků budeme dále pokračovat.

Literatura:

[1] Battista, M. T., Wheatley, G. H. & Talsma, G.: *The importance of spatial visualization and cognitive development for geometry learning in pre-service elementary teachers*, Journal for Research in Mathematics Education, edited by Patricio Herbst (online, 1982), pp. 332–340. ISSN 0021-8251.

[2] Castro-Alonso, J., Uttal, D.: *Science education and visuospatial processing*, In J. C. Castro-Alonso (Ed.), Visuospatial Processing for Education in Health and Natural Sciences (pp. 53–79). Springer, 2019. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20969-8_3

[3] Dehaene, S.: *The number sense: How the mind creates mathematics,* New York: Oxford University Press, 1997.

[4] Eichler, K.-P.: *Räumlich – visuelle Qualifikationen systematisch entwickeln*. Sprachrohr Lerntherapie. Zeitschrift für integrative Lerntherapie. 7(1), pp. 24–39, 2011.

[5] Georges, C., Cornu, V. & Schiltz, C.: *Spatial skills first: The importance of mental rotation for arithmetic skill acquisition*, Journal of Numerical Cognition, 5(1), pp. 5–23, 2019. https://doi.org/10.5964/jnc.v5i1.165

[6] Gilligan, K. A., Thomas, M. S. C. & Farran, E. K.: *First demonstration of effective spatial training for near transfer to spatial performance and far transfer to a range of mathematics skills at 8 years*, Developmental Science, 23(4), e12909-e12909, 2020. https://doi.org/10.1111/desc.12909

[7] Gutiérrez, A.: *Visualization in 3-dimensional geometry: search of a framework*, In L. Puig and A. Guttierez (eds.) Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 1, pp. 3-19). Valencia: Universidad de Valencia, 1996.

[8] Hubbard E. M., Piazza, M., Pinel P. & Dehaene, S: *Interactions between number and space in parietal cortex,* Nature Reviews 6, (pp. 435–448), 2005. https://doi.org10.1038/nrn1684

[9] Lorenz, J. H.: *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im arithmetischen Anfangsunterricht - Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung*, Göttingen: Hogrefe, 1992.

[10] Maier, P. H.: *Räumliches Vorstellungsvermögen - Komponenten, geschlechtsspezifische Differenzen*, Relevanz, Entwicklung und Realisierung in der Realschule, Frankfurt a. M.: Peter Lang, 1994.

[11] Mulligan, J.: *Looking within and beyond the geometry curriculum: connecting spatial reasoning to mathematics learning*, ZDM Mathematics Education, 47(3), pp. 511–518, 2015.

[12] Wai, J., Lubinski, D. & Benbow, C.: *Spatial ability for STEM domains: Aligning over 50 years of cumulative psychological knowledge solidifies its importance*, Journal of Educational Psychology, 101(4), pp. 817–835, 2009, 11/01. https://doi.org/10.1037/a0016127

[13] https://kma.fp.tul.cz/activities/item
[14] www.mathematikus.de
[15] https://www.geogebra.org/m/rpgjcyn3
[16] https://www.geogebra.org/m/sagcerkg
[17] https://www.printables.com/cs/model/628595-models-of-cubic-solids-and-cut-cubes

Poděkování:

Tento příspěvek byl vytvořen jako jeden z výstupů projektu iTEM – Improve Teacher Education in Mathematics (Zlepšování výuky učitelů matematiky), EHP-CZ-ICP-2-018. Projekt iTEM byl financovaný z Fondů EHP 2014-2021 programu Vzdělávání.

Daniela Bímová
Katedra matematiky, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
Univerzitní náměstí 1410/1, 460 01 Liberec 1
e-mail: daniela.bimova@tul.cz

Jiří Břehovský
Katedra matematiky, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
Univerzitní náměstí 1410/1, 460 01 Liberec 1
e-mail: jiri.brehovsky@tul.cz

Petra Pirklová
Katedra matematiky, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
Univerzitní náměstí 1410/1, 460 01 Liberec 1
e-mail: petra.pirklova@tul.cz

VIRTUÁLNÍ REALITA VE SVĚTĚ EDUKACE

Nikola Brůžková

ZŠ a MŠ Dobrá Voda u Českých Budějovic

Abstrakt: Tento příspěvek se zabývá integrací virtuální reality (dále jen VR) do procesu vzdělávání s důrazem na rozvoj některých klíčových kompetencí pomocí simulace, interaktivních metod učení a tradičních metod učení. V rámci příspěvku je stručně představena technologie virtuální reality a její využití v mnohých oblastech vzdělávání pro žáky (především) základních a středních škol. Příspěvek čerpá ze zkušeností nabytých během projektových dní s VR, do kterých se již zapojilo více než 25 školních tříd z Jihočeského kraje.

Klíčová slova: virtuální realita, STEM vzdělávání, kolaborace, digitální kompetence, projektové dny, gamifikace.

Virtual Reality in the World of Education

Abstract: This article explores the integration of Virtual Reality (VR) into education, with a focus on the development of some key competencies via simulations, interactive learning and traditional learning. The article briefly introduces the technology of VR and its use in many areas of education, targeting (primarily) elementary and high school students. It is based on experiences gained during project days with VR, which more than 25 classes from the South Bohemian Region have already participated in.

Key words: virtual reality, STEM education, collaboration, digital competencies, project days, gamification.

Úvod

Pojem virtuální realita představuje v tomto příspěvku technologii, která uživateli umožňuje ocitnout se v počítačem generovaném prostředí, které může simulovat skutečný svět (např. řízení vozidla, lékařství, cestování) nebo fiktivní svět. Tato prostředí umožňují uživateli aktivně se zapojovat do děje simulací (např. historické události), experimentovat (např. chemické pokusy) nebo interagovat s různými objekty. Dále může uživatel toto prostředí využít např. k vizualizaci složitějších konceptů ve 3D prostoru. Virtuální realita nabízí také bezpečný prostor pro mnohé aktivity, které by v reálném světě byly nebezpečné nebo nerealizovatelné. Její vhodné využití může u žáků přispět k rozvoji tvořivého myšlení, logického uvažování, řešení problémů, spolupráce nebo např. komunikačních schopností. V našem případě je uživateli tento zážitek zprostředkován pomocí headsetu pro virtuální realitu s ovladači, který je bezdrátově připojen k počítači s cílem poskytnout uživateli co nejrealističtější prostředí a interakce.

Na základě těchto aspektů se virtuální realita zdá být technologií, kterou bychom mohli zařadit mezi technologie edukační. Její začlenění do výuky by však nemělo být nahodilé nebo nadměrné stejně jako u jiných informačních a komunikačních technologií. Program výuky by měl být plánovaný a doplněný např. o úkoly, které žáci řeší právě pomocí bádání a interakcí ve virtuální realitě.

Po České republice nalezneme několik základních a středních škol, které tuto technologii k dispozici nemají vůbec nebo ji mají v omezeném množství na celkový počet žáků. Rozhodli jsme se tedy ve spolupráci s VR Centrem poskytnout zkušenost s virtuální realitou i žákům z těchto škol. Tyto žákům zprostředkované zážitky jsou velmi různorodé a pokrývají mnohé vzdělávací oblasti, jako jsou např: Člověk a svět práce, Člověk a příroda, Umění, historie a kultura, Matematika a její aplikace a Cizí jazyk.

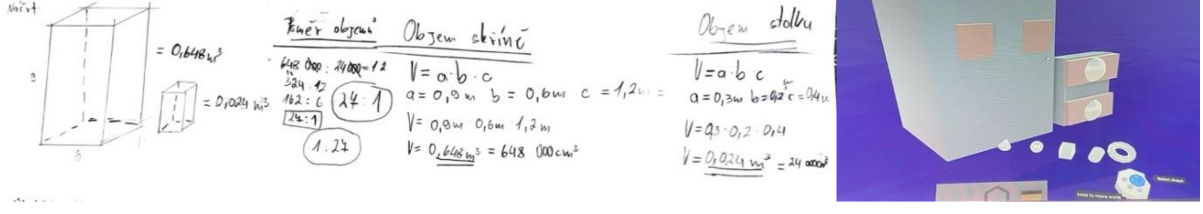
1 Virtuální realita ve výuce matematiky

Virtuální realita nabízí také mnohé aplikace, které můžeme začlenit do výuky matematiky. Dle tzv. „malé“ revize Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání 2023 toto začlenění můžeme navíc považovat za způsob rozvoje digitální gramotnosti u žáků v rámci této vzdělávací oblasti. V následujících odstavcích představíme tři aplikace, které se nám v praxi ukázaly jako vhodné pro rozvoj matematického myšlení u žáků základních a středních škol a zároveň jsou dostupné zdarma. Využití těchto aplikací během projektových dní s VR propojujeme s žákovskou činností na námi vytvořených pracovních listech. Ukázky některých úkolů uvádíme na obrázcích 1 až 6.

VR matematické aplikace

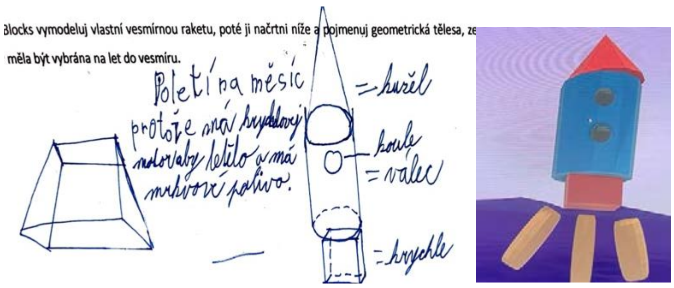
První aplikací, kterou představíme, je aplikace *Google Blocks*. Tato aplikace uživateli umožňuje snadno vytvářet libovolné 3D objekty. K dispozici má uživatel šest jednoduchých nástrojů a 3D tělesa (krychle, kvádr, koule, válec, jehlan, kužel, n-boký hranol) pomocí kterých může v prostředí virtuální reality neomezeně tvořit. Aplikace žákům nabízí zkušenosti s matematickým modelováním. Při vhodném začlenění do výuky může aplikace u žáků přispívat především k rozvoji prostorové představivosti a kreativity. Níže přikládáme ukázky úkolů, které žáci řešili pomocí aplikace Google Blocks. Úkoly jsou doplněny o obrázky 1 a 2, které zachycují vybraná žákovská řešení úkolu 1 a 2.

Úkol 1 (pro žáky 8. ročníků ZŠ): *V aplikaci Google Blocks vymodeluj skříň tvaru kvádru o rozměrech 0,9 m x 0,6 m x 1,2 m. Vedle této skříně vymodeluj noční stolek tvaru kvádru, jehož rozměry jsou (ku skříni) v poměru 1:3. Níže objekty načrtni. Na závěr urči, v jakém poměru je objem skříně ku objemu nočního stolku.*



Obrázek 1: Žákovské řešení úkolu 1 pomocí VR

Úkol 2 (pro žáky 6. ročníků ZŠ): *V aplikaci Google Blocks vymodeluj vlastní vesmírnou raketu, poté ji načrtni níže a pojmenuj geometrická tělesa, ze kterých se skládá. Uveď tři důvody, proč by měla být vybrána na let do vesmíru.*

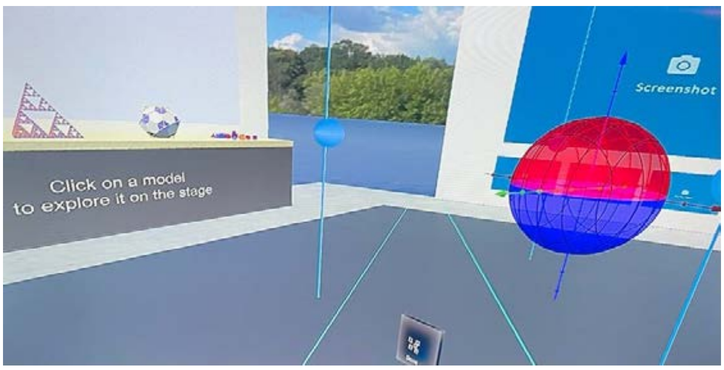


Obrázek 2: Žákovské řešení úkolu 2

Druhou aplikací je *GeoGebra Mixed Reality*, ve které mohou uživatelé na rozdíl od Google Blocks modelovat pomocí zadání libovolného předpisu do vstupního řádku. Tato funkce tedy umožňuje uživateli procházet kolem, zkoumat nebo např. pořizovat snímky kvadratických ploch z různých úhlů pohledu. Toto může žákům usnadnit a přiblížit vzdělávací obsah závislosti a funkční vztahy.

Úkol 1 (pro žáky 8. ročníku víceletých gymnázií): *Do vstupního řádku zadejte předpis* $\boldsymbol{z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}}$. *Poté se pokuste přidat další předpis, tentokrát upravený tak, aby výsledným tělesem byla koule.*

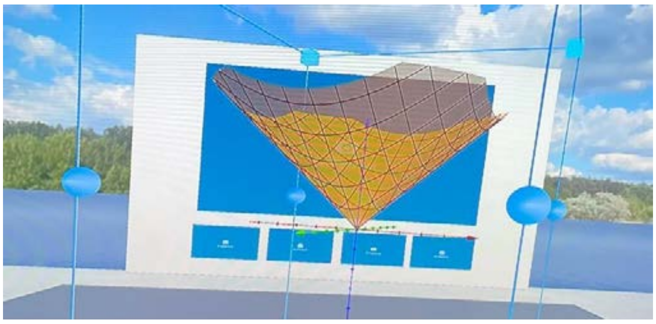
Řešení: $\boldsymbol{z = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$



Obrázek 3: Žákovské řešení úkolu 1-GeoGebra

Úkol 2 (pro žáky 8. ročníku víceletých gymnázií): *Do vstupního řádku zadejte předpis* $\boldsymbol{z} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2}$. *Jaký rovinný útvar je průsečíkem tohoto tělesa a roviny* $\boldsymbol{z} = \mathbf{3}$.

Řešení: kružnice



Obrázek 4: Žákovské řešení úkolu 2 - GeoGebra

Aplikace *Escape Room – Der kranke Kollege* je příkladem simulace skutečné únikové místnosti. Uživatel má za úkol vyřešit několik dílčích úkolů v co nejkratším časovém limitu s cílem dostat se ven. Dílčí úkoly uživatel vyřeší, podaří-li se mu najít odpovědi na několik skrytých hádanek. Uživatel pracuje na řešení problémů, spolupracuje s kolektivem a učí se na základě vlastní zkušenosti. Simulace může přispívat k rozvoji např. kritického myšlení.

Úkol 1 (2. ročník čtyřletého gymnázia): *V jedné z místností únikové hry naleznete zámek, který obsahuje 3 řady čísel (viz obr. 5). Zámek se otevře, když na každém z šesti kotoučů nastavíte správnou číslici. Těchto číslic je na každém kotouči 10. Určete největší možný počet pokusů, které byste mohli provést v jednom řádku za účelem zámek otevřít.*

Obrázek 5: Escape room – zámek

Úkol 2 (2. ročník čtyřletého gymnázia): *Prohledej prostor a najdi kalkulačku z obrázku níže. Kód, který je v kalkulačce vepsán zapiš do bílého pole níže a pomocí klíče vylušti zprávu, kterou ukrývá. Tato zpráva tě zavede k další indicii.*

	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F
00	NUL	STX	SOT	ETX	EOT	ENQ	ACK	BEL	BS	HT	LF	VT	FF	CR	SO	SI
10	DLE	DC1	DC2	DC3	DC4	NAK	SYN	ETB	CAN	EM	SUB	ESC	FS	GS	RS	US
20	SP	!	"	#	$	%	&	'	(	)	*	+	,	-	.	/
30	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	:	;	<	=	>	?
40	@	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
50	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	[	\	]	^	_

1 = 0D40/ ′0 = 0F40/0 = 0A50/9 = 0140/′1 = 0940/10=0B40+0140

Obrázek 6: Escape room – kalkulačka

Aplikací, které mohou přispívat k rozvoji matematických schopností a dovedností bychom našli ve světě virtuální reality bezpočet. Navíc je většina z nich je navíc v anglickém jazyce, žáci se tedy učí tzv. metodou CLIL (integrovaná výuka předmětu a cizího jazyka). Vzhledem k tomu, že virtuální realita nabízí kombinaci anglického jazyka, ICT a matematiky, mohlo by její využití motivovat i žáky, pro které matematika není zrovna nejoblíbenějším předmětem.

Obrázek 7: VR projektový den

Závěr

V tomto článku jsme se zabývali začleněním virtuální reality do výuky matematiky. Toto začlenění je poměrně komplexní problematikou. Zkoumání této problematiky však vnímáme jako relevantní, a to v různých oblastech lidského poznání. Aktuálně již můžeme konstatovat, že virtuální realita umí žákům a studentům zprostředkovat vzdělávací (audiovizuální) obsah. Na druhou stranu se domníváme, že by nebyl tento audiovizuální obsah pro žáky (především ZŠ) příliš přínosný, nedoplnili bychom ho např. o předem plánovaný program (zahrnující očekávané výstupy a možnost zpětné vazby) práce s touto technologií. Z tohoto důvodu jsme se rozhodli připravovat individuální a unikátní programy pro žáky a školní třídy dle jejich potřeb. Naší aktuální snahou je získávat další zkušenosti s využitím této technologie, abychom mohli detailněji zkoumat její edukační potenciál ve výuce matematiky.

Literatura:

[1] Wexelblat, A. (2014). *Virtual Reality: Applications and Explorations*. Velká Británie: Elsevier Science.

[2] Vališová, A. (2021). *Obecná didaktika: A její širší pedagogické souvislosti v úkolech a cvičeních*. Praha: Grada.

[3] Klement, M., Dostál, J., Kubrický, J., Bártek, K. (2017) *ICT nástroje a učitelé: adorace, či rezistence?* Univerzita Palackého v Olomouci.

[4] Cai, Y., Nay, Z. T., Huang, L. (2017). Design and development of VR learning environments for children with ASD. *Interact. Learn. Environ.* 25, 1098–1109. doi: 10.1080/10494820.2017.1282877

[5] Hussein, M., Nätterdal, C. (2015). *The benefits of virtual reality in education: a comparison study.* (Bachelor of science thesis in software engineering and

management student essay), Chlamers University of Technology, University of Gothenburg, Göteborg, Sweden.
https://gupea.ub.gu.se/bitstream/2077/39977/1/gupea_2077_39977_1.pdf

Nikola Brůžková
ZŠ a MŠ Dobrá Voda u Českých Budějovic
Tř. Čsl. Legií 96, 37006
e-mail: bruzkovan@seznam.cz

JAK NAMÍCHAT MALTU (STEM ÚLOHY)

Adam Čech

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta

Abstrakt: V příspěvku je představen pracovní list obsahující úlohy pro STEM vzdělávání. STEM vzdělávání nabízí integraci různých oborů – přírodní vědy, technologie, technika a matematika. Pracovní list obsahuje nově vytvořené úlohy zabývající se reálnou situací míchání malty. V úlohách si například spočítáme potřebné množství malty na renovaci plotu, náklady na opravu nebo počet namíchaných míchaček. K řešení využijí žáci znalostí z přírodovědných předmětů, finanční gramotnosti i informačně-komunikačních technologií.

Klíčová slova: STEM, slovní úlohy, matematika, malta.

How to mix mortar (STEM tasks)

Abstract: This paper presents a worksheet containing tasks for STEM education. STEM education offers the interaction of different disciplines – science, technology, engineering and mathematics. The worksheet contains newly created tasks dealing with a real situation of mixing mortar. For example, the problems calculate the amount of mortar needed to renovate a fence, the cost of a repair, or the number of mixers needed. Students will use their knowledge of science, financial literacy and ICT to solve the problems.

Key words: STEM, tasks, mathematics, mortar.

Článek je publikován v časopise *South Bohemia Mathematical Letters*, Vol. 31 (2023), No. 1

Dostupné z: https://home.pf.jcu.cz/~sbml

OHROMUJÍCÍ PREZENTACE VE VÝUCE MATEMATIKY – PREZI

Iva Dřímalová

Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta Masarykovy Univerzity

Abstrakt: V příspěvku se pokusím učitele motivovat k použití programu Prezi ve výuce matematiky. Cílem příspěvku je ryze motivace, program Prezi je velmi intuitivní. Cílem příspěvku je pouze upozornění na výhody programu a příslib, že jeho ovládání zvládne uživatel sám. Příspěvek je motivační, neopírá se o žádný výzkum a v jeho textu prezentuji zejména svůj pohled na věc, jde o sdílení nápadu.

Klíčová slova: Prezentace ve výuce matematiky, vizuální efekty a animace, prezentační dovednosti ve výuce.

Breathtaking presentation in math lesson - PREZI

Abstract: In the post, I will try to motivate teachers to use the Prezi program in teaching mathematics. The goal of the post is purely motivation, the Prezi program is very intuitive. The aim of the post is only to warn about the benefits of the program and promise that the user can manage it himself. In the post I share my ideas and thoughts, I am not supporting them by any survey.

Key words: Presentation in teaching mathematics, visual effects and animation, presentation skills in teaching.

Úvod

Matematika se některým žákům i učitelům jeví jako krásná exaktní věda, některým nikoli. Učit matematiku je pro mnoho z nás ryzí potěšení a být přítomen hodině matematiky je pro přítomné radostná kratochvíle, pro některé zúčastněné tomu tak není. Jako učitelé často hledáme způsoby, jak osvěžit naše hodiny matematiky.

Při rozhovorech s učiteli matematiky základních škol a nižších gymnázií, které jsem dělala v březnu až květnu roku 2023, jsem si všimla následující věci. Učitelé a učitelky cítí z mnoha různých stran tlak na zvýšení atraktivity své výuky. Mnoho z nich vidělo jako jedinou nevyužitou cestu k tomuto cíli „stavět se na hlavu“. Ačkoli by mnoho žáků tento trik jistě ocenilo, nabízejí se i jiné cesty. Jednou z nich je využít pozlátka, které nám nabízí program Prezi. Jde o alternativu dobře známého programu Power Point nebo Beamer. Zatímco prezentace v těchto programech jsou lineární a bez větší časové investice často úmorné, program Prezi nabízí možnost tvorby dynamických poutavých barevných a neokoukaných prezentací. Navíc poměrně snadno a rychle. O programu více v další kapitole.

Otázka, jaký program použít při tvorbě prezentací v hodinách matematiky, je zodpovězena. Daleko zásadnější otázky jsou: Kdy a proč používat prezentace v hodinách matematiky? Na otázku „Kdy" je odpověď: Tehdy, když z toho budou profitovat žáci i učitelé. Ne pouze žáci, a ne pouze učitelé. Použití prezentace ve výuce by mělo být prospěšné pro všechny zúčastněné. Zařazení by mělo výuku učinit atraktivnější, efektivnější. Vytvářet motivující prostředí, nabízet čas pro individuální práci s žáky. Ne pouze ušetřit učitele od psaní na tabuli. Z toho je jasné, že prezentace se nehodí do každé hodiny matematiky. Pokud z překlopení obsahu do prezentace neplyne žádný benefit pro žáky, nemá smysl tak činit.

Na otázku, proč používat prezentace, existuje celá řada odpovědí. Dynamické prezentace s animacemi, překvapivými prvky, zábavným chováním, obrázky a multimediálními prvky mají tendenci přitahovat pozornost žáků. To pomáhá udržet jejich zájem prakticky o cokoli, tedy i o matematiku. Bezhlavé překlopení obsahu, který učitel běžně vyučuje bez použití prezentace, do Prezi, zřejmě nepovede k lepšímu výsledku žáků v matematice. Osobně věřím, že používání prezentací k transmisivnímu předávání pravd matematiky vede dokonce k horším výsledkům než frontální výklad, neboť předkladatel matematiky, ač ne příliš zábavný, je alespoň naživu.

Vytvoření krátké prezentace vložené na vhodné místo ve výuce matematiky může posloužit jako osvěžující vyrušení od běžného stereotypu. Grafika, obrázky a videa mohou efektivněji ilustrovat a zdůraznit klíčové pojmy, které se žákům snažíme přiblížit, například v geometrii. Vizuální prvky jsou často lepší než pouhý text při vysvětlování složitých konceptů.

Dynamické prezentace mohou obsahovat interaktivní prvky, jako jsou kvízy, otázky vedoucí k diskusi a odkazy na externí zdroje, na které můžeme snadno přeskočit. Program Prezi dobře spolupracuje se všemi interaktivními tabulemi a díky tomu nám nabízí nástroj, jak je využít skutečně interaktivně. Obsah prezentace je „klikatelný" prstem/myší, žáci všech stupňů vzdělávání toho mohou využít. To zvyšuje angažovanost studentů a umožňuje jim aktivněji se účastnit výuky.

Dynamické prezentace jsou často flexibilnější a snáze upravitelné než statické prezentace. Umožňují rychle reagovat na potřeby žáků nebo aktualizovat obsah podle nových nápadů vycházejících z vlastní praxe. Snadno se v nich vynechávají aktivity, na které není čas, při troše praxe se naučíte schovávat do prezentace aktivity tak, že je žáci bez vaší pomoci nenajdou.

Výzkum naznačuje, viz seznam literatury, že vizuální prezentace mohou zlepšit paměť a porozumění informacím. Poutavá prezentace s vhodnými vizuálními prvky může podporovat lepší zapamatování a chápání obsahu.

Dynamické prezentace umožňují kombinaci vizuálních, auditivních a interaktivních prvků, což může lépe oslovit různé smysly studentů a podporovat různé učební styly. Používání moderních prezentací může vytvořit pozitivní prostředí pro učení. Věřím, že používání uživatelsky i vizuálně příjemného nástroje jako je Prezi může vést k lepší motivaci žáků ve výuce matematiky a budovat jejich dobrý vztah k učiteli a tím i k matematice.

1 Představení programu Prezi

Úvodů do programu Prezi existuje bezpočet, nahlédněte například do [3]. Protože snaha o vytvoření návodu k používání Prezi by bylo nošení dříví do lesa, slíbím jen, že uživatel si po instalaci poradí sám, program je skutečně uživatelsky přívětivý a intuitivní. Tím velmi konkuruje například Beameru. Dobrá zpráva je, že pokud si neporadí učitel, s jistotou si poradí žáci. Proč je to výhoda uvedu v poslední kapitole příspěvku.

Prezi je nástroj pro tvorbu prezentací, který se odlišuje od tradičních prezentací ve slidovém formátu. Místo lineárního postupu pomocí jednotlivých snímků Prezi umožňuje vytvářet dynamické prezentace s neomezenými možnostmi pohybu a zoomu ve virtuálním prostoru. To prostě a jednoduše vypadá zajímavě.

Program umožňuje vytvářet prezentace, které nejsou vázány na lineární postup. Uživatelé se mohou volně pohybovat mezi jednotlivými částmi prezentace, což poskytuje nový a nekonvenční způsob prezentace informací. Prezi nabízí širokou škálu vizuálních efektů, animací a přechodů, což umožňuje vytvářet atraktivní a poutavé prezentace. To pomáhá zachytit pozornost žáků. Tvůrce prezentace působí pro nezkušené oko jako kouzelník, aniž by jím skutečně byl.

Unikátní schopnost Prezi pracovat s pohybem a zoomem ve virtuálním prostoru umožňuje uživatelům plynule přibližovat a oddalovat se k jednotlivým částem prezentace. Ze vzdělávacího hlediska je k ničemu, nicméně lidsky je to prostě zábava, a to pomáhá žákům i učiteli udržovat pozornost.

Prezi je cloudová služba, což znamená, že uživatelé mohou své prezentace ukládat online a sdílet je s ostatními. Tím se umožňuje efektivní online spolupráce při vytváření obsahu. Program lze spouštět na různých platformách a zařízeních s připojením k internetu. To usnadňuje prezentování obsahu na různých místech a za různých podmínek.

Prezi podporuje vkládání různých multimediálních prvků, odkazů a interaktivních prvků, což umožňuje uživatelům vytvářet bohatší a interaktivnější prezentace. Nabízí širokou škálu předem navržených šablon a možností designu, to usnadňuje uživatelům vytvářet profesionálně vypadající prezentace.

2 Jaký obsah se do prezentací hodí

Zásadní trik a výhoda při tvorbě vhodných prezentací do hodin matematiky je ten, že učitel nemusí tvořit prezentace sám. Žáci jsou natolik kompetentní k používání nových programů, že práci s Prezi zvládnou lépe než učitel. Při vhodných nápadech, některé nabídnu, jiné vymyslíte sami, si může učitel ulehčit práci, a navíc nabídne žákům možnost uspět novým způsobem. Tím, že učitel zadá, jaký program má žák použít, mu zkrátí rozhodovací proces a posune ho blíž k úspěšnému splnění cíle. Takovým zadáním se přirozeně objevují mezipředmětové vazby mezi informatikou, výtvarnou výchovou a matematikou. Žák ovládnutím nového programu rozvíjí své kompetence.

Za velmi zásadní považuji vhodný výběr zadání námětu pro žáka. Existuje celá řada nevhodných strategií, jednou z nich je volit takové zadání, pro jehož zpracování by se nejlépe hodila lineární prezentace nebo prostý text. Jako nevhodné pro zpracovávání pomocí Prezi se mi jeví předvádění početních postupů. Například zadání „Vyřeš těchto 10 příkladů a dej to do prezentace“ povede spíš k znechucení žáka než k jeho motivaci.

Jako učitelé jistě vymyslíte celou řadu dobrých nápadu. Já nyní předložím některé, možné ne až tak dobré, jako budou ty vaše, nabízím možnost se od nich odrazit a zlepšit je. První nápad je vytvořit prostor pro žáky, kteří bývají v matematice spíše neúspěšní, nejsou dobří počtáři, nejsou obratní v algoritmech, matematice nerozumí, není jimi oblíbená. Pokud má takový žák potenciál jinde, je možné jej využít v hodině matematiky tak, že učitel nabídne možnost zpracování prezentace v Prezi na téma s matematikou sice související, které se liší od běžné náplně hodin. Žák může dostat možnost vypracovat prezentaci o historické osobnosti – Thales, Eukleides, Pythagoras, Newton, Apollonius, … Druhá podobná možnost je možnost vypracovat prezentaci o daném pojmu bez toho, aby žák v prezentaci počítal náročné nebo vůbec nějaké příklady. Jako takové téma se nabízí „Co je to interval a co s nimi umíme?“ nebo „Co je to funkce/trojúhelník/cokoli vás napadne a (například) jaké známe?“. Můžete volit čistě rekreační téma a nabídnout například možnost zpracovat téma směřující do výtvarné výchovy jako „Kružnice/trojúhelník/tělesa/cokoli ve světě okolo nás.“ Kde žáci nasbírají nápady, kde mohou modely matematikou zkoumaných objektů vidět v reálním životě. Takové prezentace mohou ve výuce zabrat jen několik minut, nabízí vám možnost pozitivně sumativně hodnotit žáka a budovat tím jeho dobrý vztah k matematice. Možnost zpracovat takovou prezentaci můžete dát buď komukoli, nebo přímo vybrat slabší žáky a nabídnout jim možnost zlepšit si například známku v matematice. Věřím, že pokud budete svůj záměr transparentně sdílet ve třídě, uvedete tedy že například žákyně Maruška dostává možnost vypracovat prezentaci právě proto, že jí chcete dát možnost uspět, a nabídnete tuto možnost v budoucnu i ostatním, bude to ve třídě přijato pozitivně. Je možné, že žáci v budoucnu přijdou s vlastními nápady na téma prezentace.

Druhý nápad je nechat uspět žáky, kteří mají rádi algoritmy, vzorce a formalizované postupy. Takovým žákům můžete nabídnout možnost zpracování shrnutí daného tématu. Například „Jak se řeší kvadratická rovnice?“ nebo „Jak se rýsuje (doplňte si sami)“. Na vyšším stupni pak například „Různé rovnice přímky/kružnice/paraboly/čehokoli, co se hodí.“ nebo „Jak narýsuji řez krychle rovinou.“

Třetí nápad je nechat uspět tradičně úspěšné žáky. Nabídněte nadaným žákům možnost využít svůj potenciál. Nechte je zpracovat náročné téma, nové téma, vytvořit kvíz pro spolužáky, shrnutí náročných témat nebo jim dejte možnost zpracovat cokoli, co je zajímá. Fraktály, Apolloniovy úlohy, řešení kubické rovnice, nalezení Pythagorejských trojic, odvození vzorce pro druhou mocninu součtu čísel, binomickou větu, důkazy Pythagorovy věty. Zde se nabízí nespočet témat. Název prezentace může být například „Jak lze dokázat Eukleidovy věty?“ nebo „Jak narýsovat kružnici dotýkající se dvou přímek a kružnice?“.

Zpracovává-li prezentaci učitel, nechť to činí snadno, rychle a inspirativně. Doporučuji vždy dobře rozmyslet, zda čas, který investujete do tvorby prezentace, bude mít dobrý dopad. V první prezentaci mějte na paměti, že pokud budete tvorbu prezentace nabízet žákům, při svém prvním použití jim jdete vzorem. Domnívám se, že nemá smysl pravidelně vytvářet různá shrnutí. Je možné je nalézt v učebnici nebo v sešitě, navíc z předchozího komentáře víme, že to zvládnou žáci. Je nicméně možnost vyzkoušet první motivační krok právě takový, že vytvoříte poutavé shrnutí probrané látky sami a později budete nabízet takové zpracování žákům. Ti budou (snad a někteří) následovat váš vzor. Pro ostatní spolužáky má navíc žákem zpracované shrnutí motivační charakter a zpracovatel žák se při tvorbě prezentace naučí jistě víc než zpracovávající učitel.

Jako učitelé si tedy klademe otázku jak „za málo peněz zařídit hodně muziky“, ještě navíc s požadavkem, aby se hezky poslouchala. Nabízím následující nápad, který se mi v praxi osvědčil. Protože matematika se obvykle dělá s tužkou a papírem v ruce, je pro mě nejrychlejší a nejpřirozenější použít podobný přístup. Při tvorbě prezentací využívám Microsoft Whiteboard a grafický tablet. Na tabuli v počítači si ručně napíši, co potřebuji. Načrtnu zadání příkladu, napíšu jej ručně, díky použití grafického tabletu je i po zvětšení na plátno libovolné velikosti text ve výborné kvalitě. Tento výtvor potom do prezentace vložím jako obrázek, do prezentace jej vložíte CTRL+V a dál s ním manipulujete myší. Při použití na chytré tabuli ve výuce je pak prezentace „klikatelná“, ve chvíli, kdy žák vezme elektronickou tužku tabule, ta na plátno umístí virtuální folii a žák může psát malovat do mnou připraveného zadání. Jedinou nevýhodou je, že svou práci pak musí smazat a nelze ji uložit, resp. nenapadá mě jiná cesta než screenshot, pokud to vaše tabule dokáže. Takto můžete vytvořit frontální kvízy, rychle si připravit zadání příkladů, v prezentaci schovat odpovědi na otázky a řešení příkladů, které žákům můžete rychle ukázat. Jistě vymyslíte vlastní nápady, jak Prezi využít. Stejně jako vlastní náčrtky můžete do prezentace snadno vložit exportované nákresny z programu GeoGebra, fotografie postupu žáků ze sešitu nebo písemky a cokoli, co vás napadne a chcete to ukázat a komentovat.

Témata, která lze takto zpracovat, jsou například řezy těles, kde žák u tabule pouze črtá řešení. Na základní škole pak můžete přichystat doplňování obrázků, náčrtky staveb z kostek, vybarvovaní ve čtvercové síti a podobně. Žákům v lavicích je potřeba buď nachystat pracovní listy nebo jim dát čas na obkreslení situace, případně pracovat s prezentací jako s námětem k diskuzi s tím, že žáci si neopisují obsah prezentace. Prezentace poskytuje žákovi u tabule čas se seznámit pečlivě se zadáním v době, kdy si jej ostatní opisují, pokud tak mají činit. Vy jako učitel, který nezapisuje zadání, můžete využít čas na individuální práci s žáky, věnovat se jejich zvláštním potřebám, ujišťovat se, že vědí, co mají, dělat, pozorovat je při práci a všímat si klimatu třídy. V mezičase můžete mít radost z pěkné prezentace, která se líbí i těm, kterým se nelíbí matematika v ní. Prezentace vám nabízí možnost dát tématu strukturu, díky nelinearitě prezentace žáci vidí, co už mají za sebou a co je v dnešní hodině ještě čeká, aniž by to učitel musel neustále opakovat.

Užití programu Prezi se nehodí do každé vyučovací hodiny matematiky. Vnímám jej jako možnost nabídnou žákům nezvyklý způsob práce, vytvořit si relativně rychle poutavý materiál přesně podle svých představ, a hlavně nabídnout žákům nový způsob, jak uspět v hodinách matematiky.

3 Odkazy na existující prezentace

Program už nějakou dobu využívám a uvedu pro zajímavost některé prezentace, které jsem v něm vytvářela. Sami můžete posoudit, zda je Prezi nástroj, který byste chtěli ve své výuce matematiky využít. Prezentace jsem nastavila jako veřejné a některé navíc jako „Reusable“, což znamená, že kdokoli může kopírovat jejich obsah a upravovat si jej podle vlastních potřeb. Tuto možnost můžete využít k opravě všech chyb, které se v mých prezentací vyskytují.

- Prezentace z příspěvku na konferenci:
    - https://prezi.com/view/McHikPM7jTgyfMODx4Kf/
    - https://prezi.com/view/bgcR3HYHRufwTWEAsEh9/
- Prezentace, které jsem použila ve výuce na VŠ
    - https://prezi.com/view/u0UnkifJ1XQvaWDKXI4Z/
    - https://prezi.com/view/lEVDbfOiWIKJdIk26WMv/
    - https://prezi.com/view/OlA6U6Wo7y6aMr6bZ21R/ (obhajoba závěrečné práce)
- Prezentace vytvořená pro manžela, maturitní a učňovský obor

- https://prezi.com/view/IxgkJBb0pFRnj7AeR27y/
- https://prezi.com/view/2qu2tdpCFjYrYxGz0qfD/

- Prezentace vytvořená studentkou bez jakýchkoli předchozích zkušeností s Prezi
    - https://prezi.com/view/xDLzmiot8hElZu9hrRuj/

Literatura:

[1] Arcavi, Abraham, The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 52(3), 215-241, Educational Studies in Mathematics, 2003.

[2] O'Keefe, Visual Learning and Teaching: An Essential Guide for Educators K-8, Free Spirit, 2018.

[3] https://clanky.rvp.cz/clanek/k/Prezi/13133/NETRADICNI-ZPUSOB-PREZENTACE-INFORMACI-VE-VYUCE-S-PREZI.html

Iva Dřímalová
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta Masarykovy Univerzity
Kotlářská 2, Brno 602 00
e-mail: drimalova@mail.muni.cz

ROZVOJ DIGITÁLNÍCH DOVEDNOSTÍ VE VÝUCE MATEMATIKY

Eduard Fuchs[1], **Eva Zelendová**[2]

[1]Masarykova univerzita Brno, [2]AMBIS vysoká škola, a.s., Praha

Abstrakt: Stručné představení úloh, které pomáhají rozvíjet digitální kompetence v hodinách matematiky.

Klíčová slova: Digitální kompetence, malá revize RVP ZV, digiúloha.

Developing digital skills in teaching mathematics

Abstract: A brief presentation of tasks that help develop digital competence in mathematics lessons.

Key words: Digital competence, revision of curriculum documents, digital task

Úvod

V malé revizi RVP ZV v roce 2022 proběhlo několik zásadních změn kurikulárního dokumentu. Vznikla nová oblast *Informatika* a obsah původní oblasti *Informační a komunikační technologie* byl rozpracován do nové digitální kompetence (Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, 2021). To znamená, že praktické využívání digitálních technologií bude probíhat ve všech předmětech. Na každé škole tak díky promyšlenému školnímu vzdělávacímu programu bude žák na konci základního vzdělávání:

- ovládat běžně používaná digitální zařízení, aplikace a služby; využívá je při učení i při zapojení do života školy a do společnosti; samostatně rozhoduje, které technologie pro jakou činnost či řešený problém použít
- získávat, vyhledávat, kriticky posuzovat, spravovat a sdílet data, informace a digitální obsah, k tomu volit postupy, způsoby a prostředky, které odpovídají konkrétní situaci a účelu
- vytvářet a upravovat digitální obsah, kombinovat různé formáty, vyjadřovat se za pomoci digitálních prostředků
- využívat digitální technologie, aby si usnadnil práci, zautomatizovat rutinní činnosti, zefektivnit či zjednodušit své pracovní postupy a zkvalitnit výsledky své práce
- chápat význam digitálních technologií pro lidskou společnost, seznamovat se s novými technologiemi, kriticky hodnotit jejich přínosy a reflektovat rizika jejich využívání

- předcházet situacím ohrožujícím bezpečnost zařízení i dat, situacím s negativním dopadem na jeho tělesné a duševní zdraví i zdraví ostatních; při spolupráci, komunikaci a sdílení informací v digitálním prostředí jedná eticky.

Je zřejmé, že výše uvedené požadavky na digitální kompetence žáků základní školy zcela jistě ovlivní i výuku v hodinách matematiky.

1. Sbírka digiúloh pro každého

Na seminářích pro učitele matematiky, které již více než deset let pořádáme ve všech krajích České republiky, se pravidelně setkáváme s rozpaky učitelů nad malou revizí RVP ZV a s jejich nedůvěrou ve vlastní digitální kompetence. Tyto obavy byly hlavním motivem vzniku hybridní *Sbírky digiúloh pro každého* (viz Fuchs, Zelendová 2023). Při její realizaci jsme vycházeli z výše uvedených teoretických požadavků, které jsme propojili s méně obvyklými matematickými aktivitami.

Aby se uživatel sbírky nemusel dlouze zabývat pochopením práce v málo známých programech a mohl se o to víc věnovat matematickému obsahu úloh, byla pro realizací úloh vybrána bezplatně dostupná aplikace Mapy.cz a programy Word, Malování 3D, Excel a PowerPoint. Předkládané úlohy lze však řešit i v jiných odpovídajících programech.

Ve *Sbírce digiúloh pro každého* je uvedeno 27 digiúloh, které jsou rozděleny do sedmi kapitol. U první úlohy v každé kapitole je podrobně rozepsáno komentované řešení. Žáci a učitelé si v něm mohou zopakovat nebo se seznámit s některými základními dovednostmi v daných programech. Zbývající úlohy jsou seřazeny podle obtížnosti a u všech úloh jsou vysvětleny další dovednosti, které jsou k řešení potřeba. Jestliže žák neví, jak v řešení postupovat, může si na konci sbírky vyhledat první a druhou nápovědu. Na závěr je u každé úlohy uvedeno možné řešení.

Textový editor Word a Malování 3D jsou využívány v kapitole *Kreslit nemusíš jen na papír*. V kapitolách *Zkoumat tvrzení slavných matematiků může být zábavné*, *Tabulka ti pomůže s výpočty*, *Vizualizace dat pomáhá porozumět* a *Matematické modelování nemusí být těžké* se k řešení úloh převážně používá tabulkový procesor Excel. Aplikace Mapy.cz je využita k formulaci aktivit v kapitole *S mapou se neztratíš*. PowerPoint pomůže žákům prezentovat výsledky jejich bádání v poslední kapitole *Pochlub se tím, co víš*.

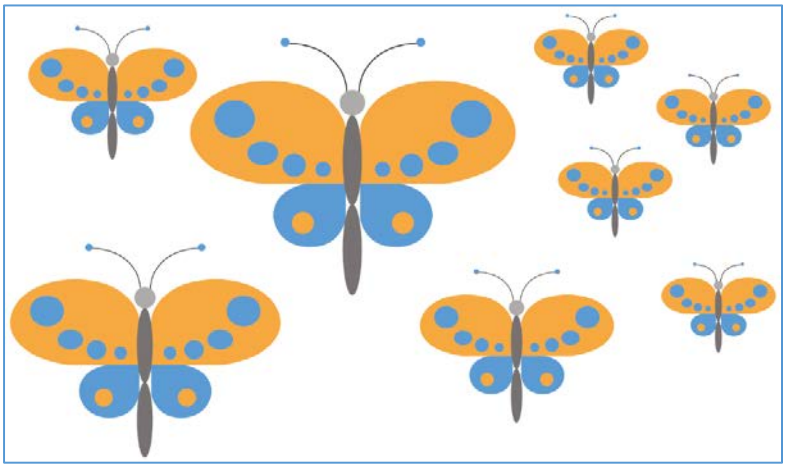
Protože se jedná o hybridní učebnici, naleznou žáci a učitelé pro všechny úlohy na www.skolasnadhledem.cz soubory s pracovními listy i soubory s ukázkami správných řešení. V následujícím textu se blíže seznámíme s pěti digiúlohami, které jsou do *Sbírky digiúloh pro každého* zařazeny.

Hnědásek podunajský

ZADÁNÍ:
Nový druh motýla objevili přírodovědci z CHKO Český les během exkurze pro veřejnost. Genetická analýza potvrdila, že jde o hnědáska podunajského, o kterém se předpokládalo, že se v České republice vyskytuje pouze na lesostepích jižní Moravy. Současný nález z Českého lesa tak lze považovat za senzaci. (Seznam Zprávy, 5. 1. 2022)
Když si Viki na internetu přečetla článek o objevu nového druhu motýla, napadlo ji, že si nakreslí motýla, kterého by objevila ona. Protože věděla, že motýl by měl být souměrný a že se

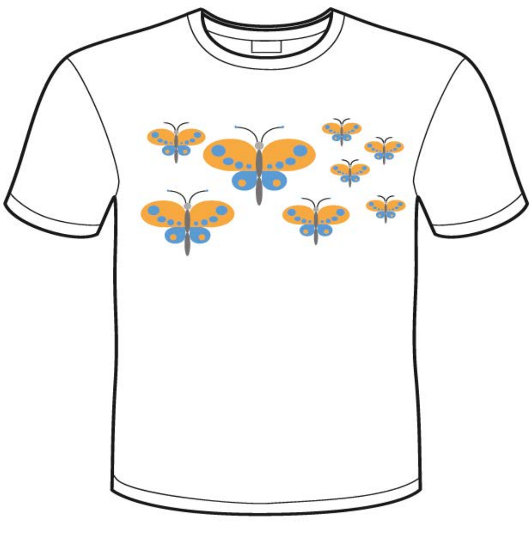
v přírodě může nacházet v různých velikostech, rozhodla se, že motýly nakreslí v textovém editoru a s výhodou využije vše, co se dosud naučila.

ÚKOL:
Vytvořte podobně jako Viki sbírku několika exemplářů nového druhu motýla.



Obrázek 1: Nový druh motýla *Modropuntík oranžový* (Fuchs, Zelendová, 2023)

ŘEŠENÍ: Pomocí vkládání obrazců nakreslíme hlavičku, tělíčko a jedno tykadlo největšího motýla spolu se dvěma nestejně velkými křídly na jedné straně tělíčka. Seskupíme všechny zakreslené obrazce a ořízneme seskupený obrázek tak, aby nám z hlavičky a tělíčka zůstala jen polovina. Takto upravený obrázek zkopírujeme. Zkopírovanou polovinu motýla zobrazíme v osové souměrnosti do levé části obrázku. Stačí využít u aktivního obrázku boční úchyt pro změnu velikosti. Úchyt přetáhneme na druhou stranu přes pomyslnou osu souměrnosti. Pečlivě upravíme velikosti obou polovin motýla, přisuneme je k sobě a opět je seskupíme. Vytvořeného motýla zkopírujeme v různých velikostech. Bude-li třeba, využijeme možnost průhledné barvy.



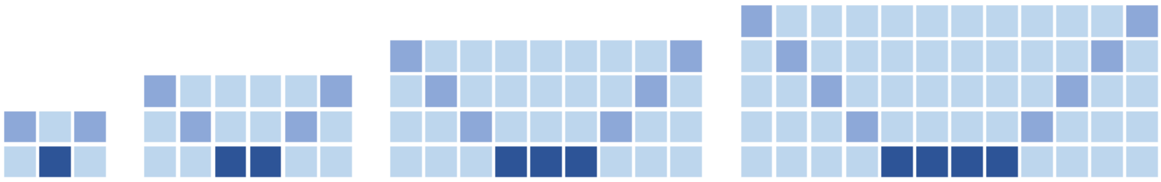
Obrázek 2: Realizace aktivity *Hnědásek podunajský* (Fuchs, Zelendová, 2023)

Soubor s vytvořenou sbírkou motýlů si uložíme. Ve specializovaných obchodech si můžeme motýly nechat vytisknout na tričko nebo na hrníček. Získáme tak originální dárek.

MATEMATICKÝ OBSAH: osová souměrnost.

Bazénové čtverečky

ZADÁNÍ:
Marek a jeho malá sestra Adélka navštívili nový plavecký bazén. Dno bazénu bylo pokryto bledě modrými, modrými a tmavě modrými dlaždičkami. Pod hladinou na ně byl úžasný pohled! Když se sourozenci vrátili domů, nakreslila si Adélka na papír obdélníkovou mozaiku.



Obrázek 3: Adélčina obdélníková mozaika (Fuchs, Zelendová, 2023)

Marek si všiml, že Adélka obrázky kreslila podle určitého pravidla. Zaujalo ho, že počet tmavě modrých čtverečků vždy odpovídá pořadí obrázku. Počet modrých čtverečků je dvojnásobkem pořadí. Po chvilce se mu podařilo najít vztahy i pro počet řádků a sloupců v obdélníku a počet bledě modrých čtverečků v závislosti na pořadí obrázku. Uvědomil si, že kdyby si zapsal odpovídající vzorce do tabulkového procesoru, může určit počty čtverečků v dalších obrázcích, aniž by tyto obrázky kreslil.

ÚKOLY:
Nalezněte obecné vztahy, které určí počty tmavě modrých, modrých a bledě modrých čtverečků a počet řádků a sloupců v obdélníku, jestliže pořadí obrázku označíme n.
Do připravené tabulky zapište vzorce podle nalezených vztahů a zkopírujte je do následujících sedmi řádků. Do buňky E20 zapište vzorec, který určí, o kolik se liší počty bledě modrých čtverečků ve třetím a v osmém obrázku.

ŘEŠENÍ:
Označme si pořadí obrázku n. Potom počet tmavě modrých čtverečků je roven n, počet modrých čtverečků je roven $2 \cdot n$, počet řádků je roven $n + 1$, počet sloupců je roven $3 \cdot n$. Počet bledě modrých čtverečků určíme tak, že od celkového počtu čtverečků odečteme počet tmavě modrých a počet modrých čtverečků:

$$(n+1) \cdot 3 \cdot n - n - 2n = 3 \cdot n \cdot n + 3n - 3n = 3 \cdot n \cdot n.$$

Do připravené tabulky zapíšeme vzorce podle nalezených vztahů a zkopírujeme je do následujících sedmi řádků. Zapíšeme vzorec, který určí, o kolik se liší počty bledě modrých čtverečků ve třetím a v osmém obrázku. Na následujícím obrázku vidíte číselné hodnoty po vyplnění tabulky odpovídajícími vzorci.

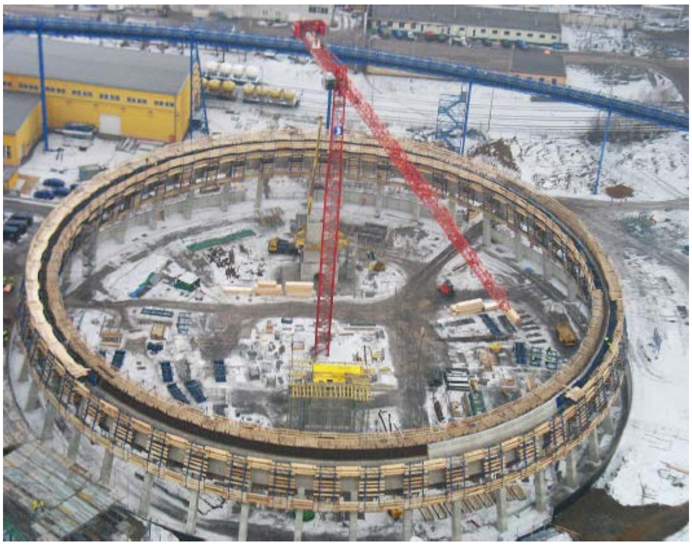
Pořadí obrázku	Počet čtverečků				Počet řádků	Počet sloupců	Počet čtverečků celkem
	tmavě modrých	modrých	bledě modrých	celkem			
1	1	2	3	6	2	3	6
2	2	4	12	18	3	6	18
3	3	6	27	36	4	9	36
4	4	8	48	60	5	12	60
5	5	10	75	90	6	15	90
6	6	12	108	126	7	18	126
7	7	14	147	168	8	21	168
8	8	16	192	216	9	24	216
			165				

Obrázek 4: Realizace aktivity *Bazénové čtverečky* (Fuchs, Zelendová, 2023)

MATEMATICKÝ OBSAH: využití proměnné při popisu reálné situace.

Chladící věže

ZADÁNÍ:
Pan Blažek, který pracoval na stavbě 155 metrů vysoké chladící věže elektrárny, vyprávěl, že vždy, když se během stavby díval z jeřábu dolů, viděl kruhový obvod věže. Jen průměr kruhu se během stavby měnil. Když potřeboval vědět, jaká je velikost průměru v určité výšce nad zemí, stačilo dosadit výšku za *v* do výrazu $0{,}0038 \cdot v^2 - 0{,}9 \cdot v + 131$.



Obrázek 5: Stavba chladící věže elektrárny (Fuchs, Zelendová, 2023)

ÚKOLY:
Do připravené tabulky zapište odpovídající vzorce pro výpočet poloměru v odpovídající výšce. Vzorec následně zkopírujte do celé tabulky. Čísla zobrazte na dvě desetinná místa.
Číselné hodnoty ve sloupcích C a D využijte pro vložení *skládaného pruhového grafu*. Co vám graf připomíná?

Pomocí tabulky a grafu odhadněte, v jaké celočíselné výšce má chladící věž minimální průměr kruhového průřezu.

	A	B	C	D
1	**Výška nad zemí**	**Průměr věže**	**Poloměr (se záporným znaménkem)**	**Poloměr**
2	**0**			
3	**5**			
4	**10**			
5	**15**			
6	**20**			

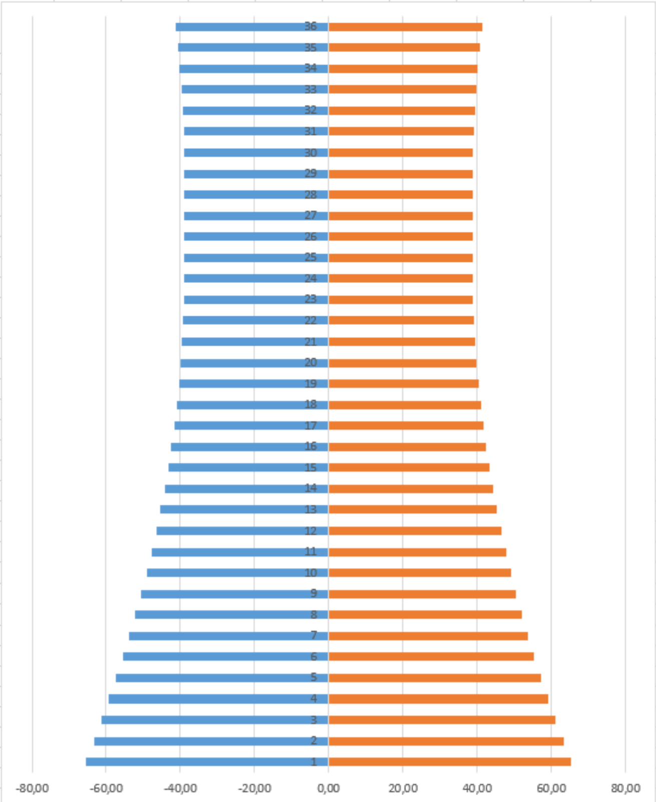
Obrázek 6: Záhlaví připravené tabulky pro aktivitu *Chladicí věže* (Fuchs, Zelendová, 2023)

ŘEŠENÍ:
Do připravené tabulky zapíšeme do buňky B2 vzorec =(0,0038*A2*A2-0,9*A2+131). Do buňky C2 zapíšeme =-B2/2, do buňky D2 zapíšeme vzorec =B2/2. Připravené vzorce zkopírujeme do prázdných buněk, adresy se díky relativnímu adresování změní a vypočítají se odpovídající číselné hodnoty. Nastavíme *Formát buněk* jako *Číslo* a zadáme dvě desetinná místa.

Myší vyznačíme číselné hodnoty ve sloupcích C a D. Na kartě *Vložení* vybereme *Doporučené grafy*. Z nabídky vybereme *skládaný pruhový graf*. Můžeme upravit jeho rozměry, zadat název grafu, upravit barvu pruhů nebo číselné hodnoty na osách. Graf, který získáme svým tvarem připomíná chladící věž jaderné elektrárny.

Z tabulky a grafu lze vypozorovat, že minimální průměr kruhového průřezu se bude vyskytovat mezi výškami 115 a 120 metrů nad zemí. V tabulce provedeme *vložení nových řádků*. Zvýrazníme libovolnou buňku v řádku s hodnotou 120. Po stisknutí pravého tlačítka vybereme z nabídky *Vložit buňky* a *Celý řádek*. Nový řádek se objeví nad zvýrazněnou buňkou. Tento postup zopakujeme a do no nových řádků zapíšeme výšky 116, 117, 118 a 119. Stejné nejmenší hodnoty jsou ve výšce 118 a 119 metrů nad zemí. Kdybychom pro další upřesnění zvolili zobrazení hodnoty průměru na tři desetinná místa, zjistili bychom, že nejmenší průměr se nachází ve výšce 118 metrů.

Výška nad zemí	Průměr věže	Poloměr (se záporným znaménkem)	Poloměr
0	131,00	-65,50	65,50
5	126,60	-63,30	63,30
10	122,38	-61,19	61,19
15	118,36	-59,18	59,18
20	114,52	-57,26	57,26
25	110,88	-55,44	55,44
30	107,42	-53,71	53,71
35	104,16	-52,08	52,08
40	101,08	-50,54	50,54
45	98,20	-49,10	49,10
50	95,50	-47,75	47,75
55	93,00	-46,50	46,50
60	90,68	-45,34	45,34
65	88,56	-44,28	44,28
70	86,62	-43,31	43,31
75	84,88	-42,44	42,44
80	83,32	-41,66	41,66
85	81,96	-40,98	40,98
90	80,78	-40,39	40,39
95	79,80	-39,90	39,90
100	79,00	-39,50	39,50
105	78,40	-39,20	39,20
110	77,98	-38,99	38,99
115	77,76	-38,88	38,88
116	77,73	-38,87	38,87
117	77,72	-38,86	38,86
118	77,711	-38,86	38,86
119	77,712	-38,86	38,86
120	77,72	-38,86	38,86
125	77,88	-38,94	38,94
130	78,22	-39,11	39,11
135	78,76	-39,38	39,38
140	79,48	-39,74	39,74
145	80,40	-40,20	40,20
150	81,50	-40,75	40,75
155	82,80	-41,40	41,40



Obrázek 7: Realizace aktivity *Chladící věže* (Fuchs, Zelendová, 2023)

MATEMATICKÝ OBSAH: modelování reálné situace, práce s grafem.

Náměšť na Hané

ZADÁNÍ:
Náměšť na Hané leží 15 km západně od Olomouce. Hrabě Harrach si krajinu v okolí Náměště tak oblíbil, že zde v šedesátých letech 18. století postavil nové barokní zámecké sídlo. Zámek, který patří k významným památkám, se zachoval v nezměněné podobě dodnes. Ojedinělý kruhový park, v jehož středu je zámecký objekt položen, obíhá úzká silnice.

ÚKOLY:
V aplikace Mapy.cz změřte průměr kruhového parku kolem zámku v Náměšti na Hané.
Pomocí *Měření vzdálenosti* určete délky tří uzavřených lomených čar, které se blíží obvodu kruhového parku. Nejprve zvolte po obvodu parku body ve vzdálenosti cca 83 metrů, při druhém měření volte body ve vzdálenosti přibližně 50 metrů a při třetím měření volte body 20 metrů od sebe. Získané číselné hodnoty zapište do připravené tabulky.

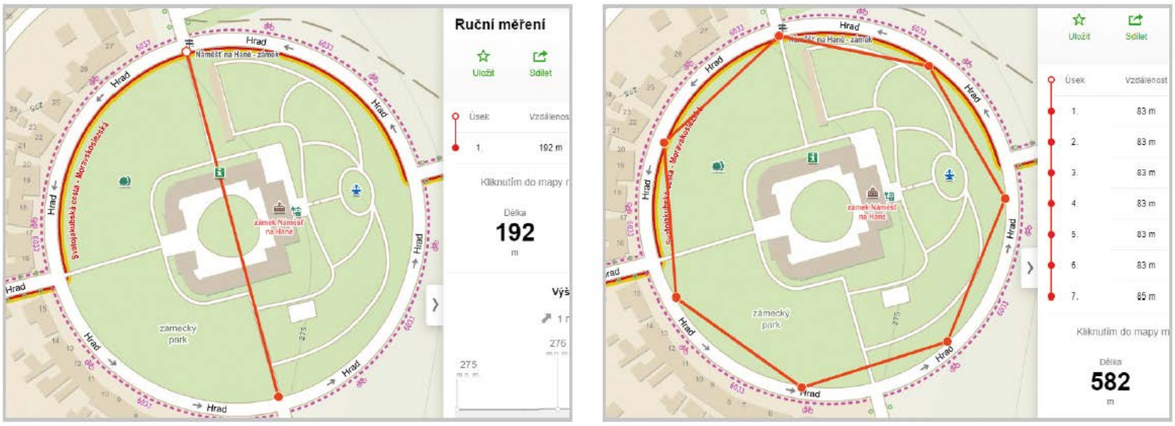
Obrázek 8: Kruhový park v Náměšti na Hané (Fuchs, Zelendová, 2023)

	A	B	C	D
1				
2	**Naměřený průměr v metrech**			
3				
4	Nastavení bodů	Délka čáry v metrech	Průměr určený z obvodu v metrech	Odchylka v procentech
5	po 83 metrech			
6	po 50 metrech			
7	po 20 metrech			

Obrázek 9: Záhlaví připravené tabulky pro aktivitu *Náměšť na Hané* (Fuchs, Zelendová, 2023)

Do buňky C5 zapište vzorec, který určí průměr kruhového parku, jestliže naměřenou délku lomené čáry budeme považovat za obvod parku. Vzorec zkopírujte do následujících dvou řádků. Do buňky D5 zapište vzorec, který určí, o kolik procent se liší hodnota vypočteného průměru od průměru, který jste odměřili v aplikaci Mapy.cz.

ŘEŠENÍ:
Na následujícím obrázku je znázorněno, jak změříme průměr kruhového parku v aplikaci Mapy.cz a jak určíme délku čáry při volbě bodů, které jsou vzdáleny cca 83 metrů. První a poslední bod musíme propojit!



Obrázek 10: Určení délky úsečky a lomené čáry v aplikaci Mapy.cz (Fuchs, Zelendová, 2023)

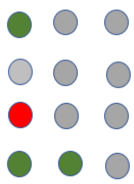
Při volbě bodů ve vzdálenosti přibližně 50 metrů získáme délku lomené čáry rovnu cca 595, při volbě bodů 20 metrů od sebe získáme délku lomené čáry rovnu cca 603.
Do buňky C5 zapíšeme vzorec =B5/PI(), do buňky D5 zapíšeme vzorec =100-C5*100/B$2.

MATEMATICKÝ OBSAH: číslo π, obvod kružnice, výpočet odchylky měření

Nastav číselný kód zámku

ZADÁNÍ:
K otevření zámku je potřeba nastavit číselný kód (tři čísla ve správném pořadí). K určení kódu vám postačí informace o čtyřech neúspěšných pokusech. Šedá tečka znamená, že jedna z uvedených číslic v kódu není. Zelená tečka znamená, že jedna z uvedených číslic v kódu je, avšak na jiném místě. A červená tečka znamená, že jedna z uvedených číslic je na správném místě.

2	7	6
3	8	7
3	6	8
4	7	1



Obrázek 11: Informace o čtyřech neúspěšných pokusech (Fuchs, Zelendová, 2023)

ÚKOL:
Na konec připravené prezentace vložte snímky se zadáním a komentovaným řešením tohoto hlavolamu.

ŘEŠENÍ:
Správný číselný kód zámku je 164.

MATEMATICKÝ OBSAH: logické uvažování.

Závěr

Národní pedagogický institut doporučuje na https://revize.edu.cz/clanky/matematika-a-jeji-aplikace-2-stupen rozvíjet digitální kompetence v matematice tím, že učitelé budou vytvářet situace, kdy žákům využití digitálních technologií napomůže k efektivnímu řešení matematického problému a také tím, že učitelé povedou žáky k využívání digitálních technologií pro správu a vyhodnocení dat, prezentaci a interpretaci výsledků.
Na konci základního vzdělávání by žák tedy měl umět:

- analyzovat a řešit jednoduché problémy, modelovat konkrétní situace, účelně využívat digitální technologie při řešení rutinních výpočtů
- vyhodnocovat a porovnávat soubory dat, prezentovat a interpretovat výsledky i pomocí digitálních technologií
- načrtnout a sestrojit rovinné útvary, účelně používat geometrický software
- načrtnout a sestrojit obraz jednoduchých těles v rovině, účelně používat geometrický software k manipulaci s modely těles.

Většina uvedených doporučení byla ve *Sbírce digiúloh pro každého* zohledněna. Při řešení uvedených aktivit se uživatel seznámí se základními dovednostmi v aplikaci Mapy.cz a programech Word, Malování 3D, Excel a PowerPoint. Aby žáci a učitelé mohli sbírku digiúloh správně využívat, musí však mít některé základní digitální dovednosti. Mezi ně například patří otevření a uložení souboru, povědomí o rozložení tlačítek na klávesnici, práce s počítačovou myší a základní orientace v prostředí výše uvedených programů. Jelikož se jedná o programy uživatelsky příjemné, s trochou trpělivosti (a někdy třeba i metodou pokus-omyl) lze zcela jistě tyto digitální dovednosti zvládnout.

Poděkování

Poděkování patří účastníkům seminářů *Jak v matematice rozvíjet dovednosti pro život* za jejich cenné připomínky a doporučení.

Literatura:

[1] Fuchs, E., Zelendová, E. (2023). *Sbírka digiúloh pro každého.* Fraus.
[2] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (2021). MŠMT

Eduard Fuchs
Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity
Kotlářská 2
611 37 Brno
e-mail: fuchs@math.muni.cz

Eva Zelendová
AMBIS vysoká škola, a.s.
Lindnerova 575/1
180 00 Praha 8 - Libeň
e-mail: eva.zelendova@ambis.cz

POTRUBÍ A TROJROZMĚRNÉ SKLÁDAČKY

Šárka Gergelitsová[1], **Tomáš Holan**[2]

[1]Gymnázium Benešov, [2]MFF UK Praha

Abstrakt: Představíme volně dostupnou aplikaci, která cvičí schopnost orientace v prostoru. Aplikace běží ve webové stránce. Žák sestavuje z dostupných základních těles zadanou sestavu (prostorový „obrázek“) a umístí ji požadovaným způsobem do soustavy souřadnic tak, že pro každý zvolený tvar určí v připravené tabulce rozměry, souřadnice nebo parametry transformací. Sestavená scéna se mu zobrazuje v prostorovém náhledu. Úlohy jsou zasazeny do prostředí systému GeoTest pro automatické vyhodnocování konstrukčních úloh.

Klíčová slova: souřadnice, konstrukce, prostorová představivost.

Pipes and Geometric Building Blocks

Abstract: We present a free web application that practices orientation in 3D space. The student assembles a specified scene (spatial "picture") from the basic solids available in given set and places it in the coordinate system by specifying dimensions, coordinates or transformation parameters for each selected shape and writing them in the prepared table. The assembled scene is displayed and can be manipulated in the 3D view. The tasks are embedded in the GeoTest system – environment for automatic evaluation of construction tasks.

Key words: coordinates, constructions, spatial imagination.

Úvod

Orientace v trojrozměrném prostoru je důležitá dovednost, kterou ve škole podporujeme různými způsoby. Nezastupitelnou roli má manipulace se skutečnými trojrozměrnými objekty v reálném prostředí. Od nich pak můžeme postoupit k abstrakci: modelování prostorových scén a řešení úloh v nějakém softwarovém 3D modeláři. Učitelé mají k dispozici již řadu takových programů, které se liší jak způsoby ovládání, tak členitostí prostředí a dostupnými nástroji. V tomto příspěvku představíme prostředí, které bylo vytvořeno s cílem podpořit pochopení orientace v prostoru opatřeném danou soustavou souřadnic. Nerozptyluje žáky interaktivními nástroji, ale vede přímo k řešení zadané úlohy.

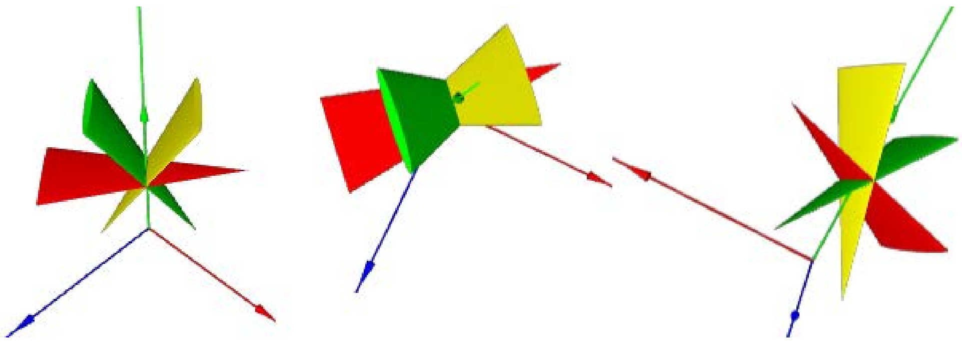
1 Stavebnice

Stavebnice je volně dostupná online aplikace, zadání jsou zahrnuta do systému GeoTest [1]. GeoTest byl vytvořen jako online systém pro zadávání konstrukčních (planimetrických) úloh a automatické vyhodnocování odevzdaných řešení, kde žáci řeší konstrukční úlohy v GeoGebra [2] appletu vnořeném do html stránky. Brzy jsme úlohy rozšířili o konstrukční úlohy v prostoru, o nichž jsme se zmiňovali například ve [3].

Nyní jsme do prostředí GeoTestu začlenili i Stavebnici. GeoGebru v html5 stránce pro řešení úloh, nahradilo x3d plátno, kde žáci vidí dosud vytvořenou scénu a mohou s ní otáčet. Scénu žáci sestavují v textové podobě. Do připravené tabulky (viz obr. 1) vkládají jednotlivé dílky, jejichž tvar vybírají z připravené sady základních těles a jimž nastavují (zapisují) rozměry, polohu a otočení v dané (a zobrazené) pravoúhlé soustavě souřadnic.

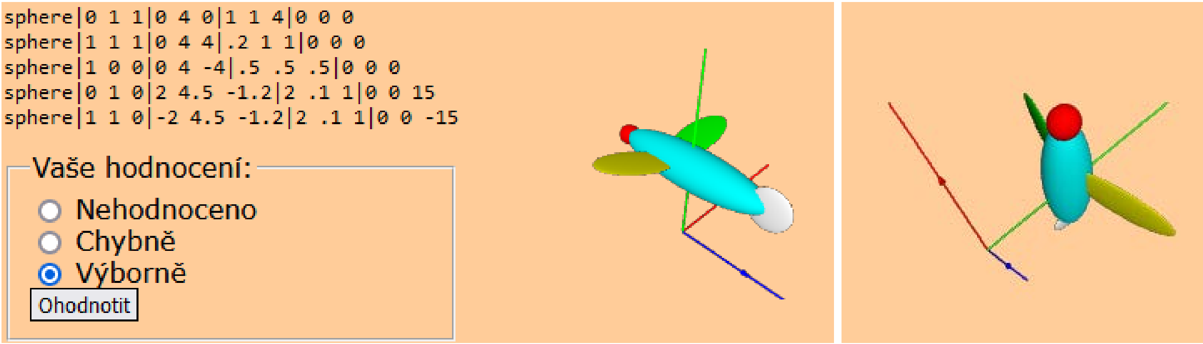
Obrázek 1: Ukázka editace dílků v konstrukci a náhled sestavené scény

Úkolem žáka je sestavit scénu podle předloženého obrázku, na němž je jeden nebo více pohledů na požadovanou výslednou sestavu (obr. 2). Musí tedy rozměry a polohu jednotlivých prvků odhadovat z daných pohledů. Přitom nutně dochází k individuálně různým vyhodnocením předlohy, skryté části scény nejsou jednoznačně určeny, byť se předpokládá, že výsledek neobsahuje žádné zcela skryté části.



Obrázek 2: Ukázka zadání úlohy

Při takovém zadání není možné správnost odevzdaného řešení posuzovat automaticky, jednotlivá řešení nemusí být přesně stejná. Odevzdaná žákovská řešení proto hodnotí učitel. K tomu má k dispozici stránku s oknem, kde řešení vidí, může s ním manipulovat a dle vlastního uvážení rozhoduje, zda žák splnil požadovaný úkol. Viz obrázek 3.

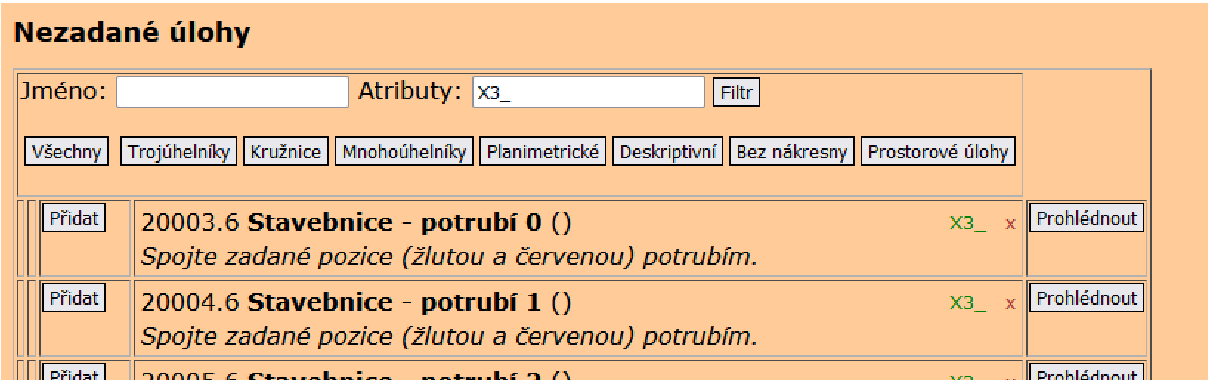


Obrázek 3: Ukázka stránky pro hodnocení žákova řešení, otáčení sestavenou scénou

Všechny další části aplikace jsou stejné, jako v „základním“ GeoTestu: zadávání úloh vytvářením skupin (jednotlivých úkolů) s určeným datem dokončení, pro žáka přehled vlastních vyřešených úloh a jejich hodnocení, pro učitele přehled odevzdaných řešení všech úloh zadaného úkolu pro celou skupinu/třídu žáků i samostatné zobrazování jednotlivých řešení, výběr úloh z databáze a evidence žáků.

Protože jsou všechny úlohy v jedné databázi a učitel do zadávaného úkolu vybírá jeden typ úloh (někdy planimetrii, jindy prostorové konstrukční úlohy, jindy právě Stavebnici), potřebuje nabídku úloh zúžit. Pro snazší orientaci v připravených zadáních a pro rychlejší výběr slouží jednak připravená tlačítka, jednak tzv. atributy úloh. Úlohy Stavebnice mají atribut X3_ (viz obr. 4). Po jeho zadání a vyfiltrování se učiteli zobrazí v seznamu úloh k zadání jenom požadovaný typ úloh.

Poznámka: Tlačítkem *Prostorové úlohy*, které je vidět na obrázku 4, vyfiltrujeme konstrukční úlohy v prostoru, které žáci řeší v prostředí 3D GeoGebry.

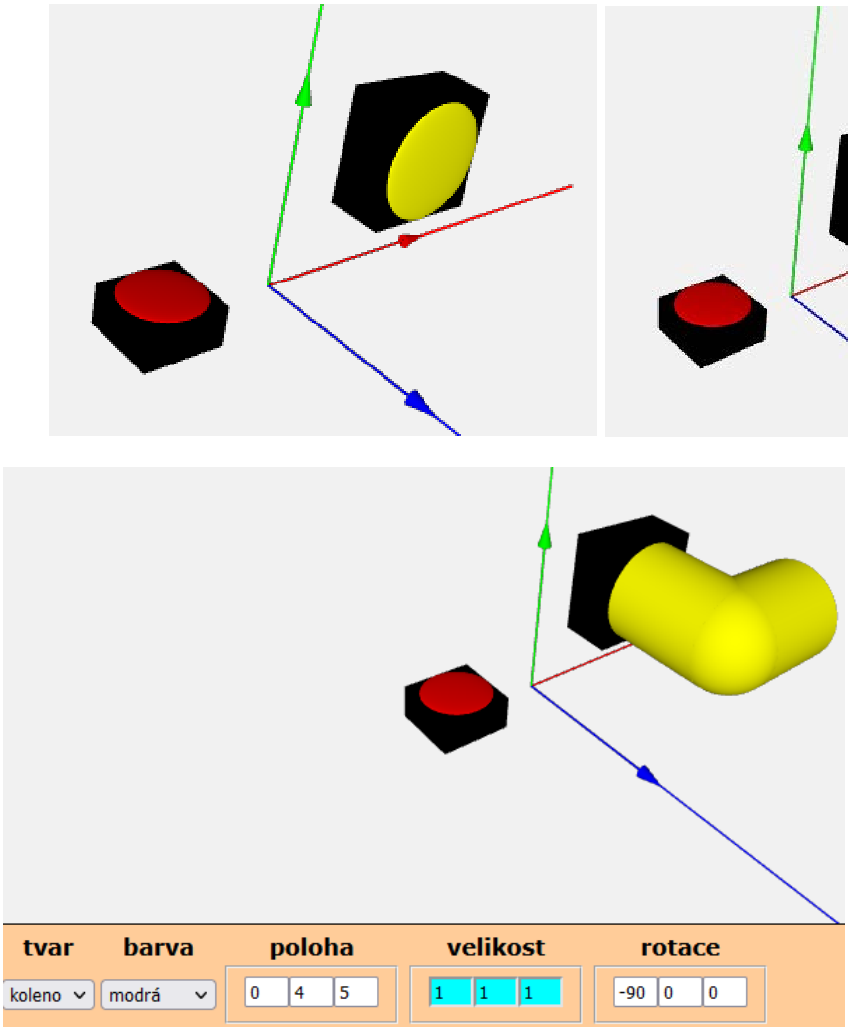


Obrázek 4: Výběr úloh k zadání

1.1 Potrubí

Na obrázku 4 vidíme v seznamu jeden speciální typ úloh Stavebnice: Potrubí. Obecný popis problému a jeho řešení najde čtenář v [4].

Zadání každé úlohy obsahuje dva kruhy – vstup a výstup potrubí – a úkolem je spojit oba průřezy potrubím složeným výhradně z „kolen“. Jiné dílky (tedy ani válcové „roury“) nemá žák k dispozici. Rozměr kolen je dán, není možné (a nedává smysl) ho měnit, kolena jen umisťujeme a otáčíme. Bez ohledu na zvolenou barvu se po správném dosednutí na otvor koleno obarví žlutě. To je pro žáka kontrola správnosti postupu.

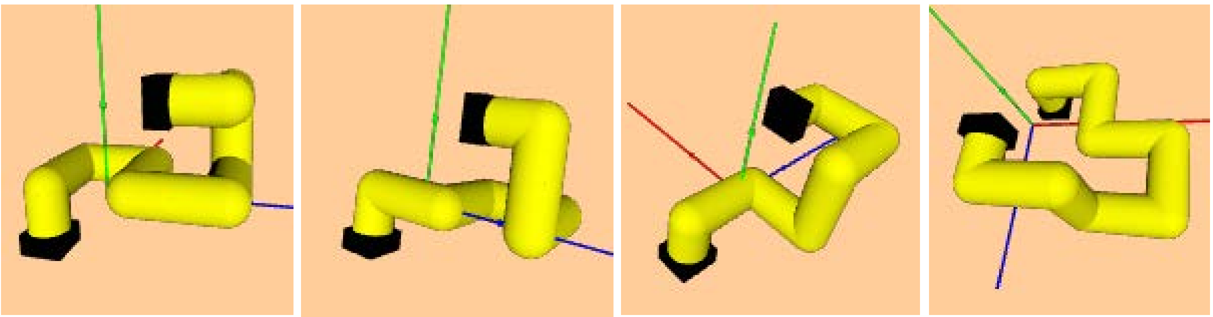


0	-	-	-	-	-	-
0	-	-	-	-	-	-
6	OK	OK	OK	OK	OK	OK
6	OK	OK	OK	OK	OK	-
6	OK	OK	OK	OK	OK	OK
6	OK	OK	OK	OK	OK	OK
7	OK	OK	OK	OK	OK	OK
6	OK	OK	OK	OK	OK	OK
6	OK	OK	OK	OK	OK	OK
0	-	-	-	-	-	-
6	OK	OK	OK	OK	OK	OK
0	-	-	-	-	-	-
0	-	-	-	-	-	-
1	OK	-	-	-	-	-
6	OK	OK	OK	OK	OK	OK
1	-	-	-	-	-	OK

Obrázek 5: Zadání a postupné řešení úlohy o potrubí,
vpravo je tabulka s přehledem řešení šesti zadaných úloh skupinou studentů

Potrubí působí nejprve obtížným dojmem, ale nedají-li se žáci odradit prvním zadáním a najdou postup, pak už celou sadu úloh obvykle vyřeší rychle, jak ukazuje obrázek 5. Malé číslo v levém okraji řádků tabulky je počet pokusů, které studenti k vyřešení celé sady dosud potřebovali.

Někteří žáci hledají nejkratší řešení, jiní trochu „bloudí“, možná i záměrně, a mají potrubí delší, viz obrázek 6.

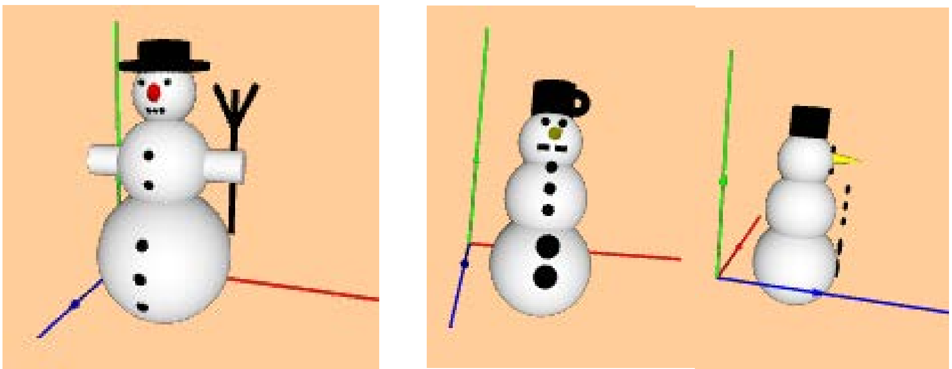


Obrázek 6: Čtyři různá řešení téže úlohy

1.2 Volné úlohy

Úlohy ve Stavebnici (a v celém GeoTestu) jsou připravené v databázi, učitel si nemůže sestavovat vlastní úlohy. Stavebnice však nabízí učiteli možnost zadat volnou úlohu podle slovního zadání. V databázi jsou připraveny tři „volné“ úlohy bez obrázku. Na obrázku 7 ukazujeme několik výtvorů takové volné scény „Sněhulák se vším, co k němu patří“.

Přestože žáci mohou scénu otáčet a prohlížet ji z různých stanovišť, někdy nejsou objekty ve scéně umístěny správně, na obrázku 7 vpravo vidíme levitující knoflíky.



Obrázek 7: Sněhuláci

Závěr

Představili jsme volně dostupnou aplikaci, v níž mohou žáci cvičit svoji schopnost vidět v prostoru a převést svoji představu o poloze objektů do vyjádření v souřadnicích. Hravou formou zjistí význam parametrů transformací a při manipulaci se scénou mohou rychle objevit případné chyby.

Pro učitele je zadání úloh snadné a vyhodnocení žákovských řešení je rychlé, všechna odevzdaná řešení jsou dostupná z jediné stránky. Žáci pak hodnocení mohou ihned vidět ve svém seznamu řešených úloh, správná–chybná–dosud nehodnocená řešení jsou barevně odlišena.

Literatura:

[1] GeoTest: https://geotest.geometry.cz

[2] GeoGebra: https://www.geogebra.org

[3] Gergelitsová, Š., Holan, T.: Třetí rozměr ve školské geometrii – orientace a řešení problémů v prostoru. In: Sborník příspěvků 7. konference Užití počítačů ve výuce matematiky, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2015.

[4] Gergelitsová, Š., Holan, T.: Problém s potrubím, In: Rozhledy matematicko-fyzikální, Ročník 98 (2023), číslo 2, Jednota českých matematiků a fyziků, Praha.

Šárka Gergelitsová
Gymnázium
Husova 470
256 01 Benešov
e-mail: sarka@gbn.cz

Tomáš Holan
Univerzita Karlova
Matematicko-fyzikální fakulta
Katedra softwaru a výuky informatiky
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
e-mail: Tomas.Holan@mff.cuni.cz

IT VE VÝUCE FINANČNÍ GRAMOTNOSTI

Jiří Helus

Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta,
Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Příspěvek představuje několik nástrojů IT, které lze při výuce finanční gramotnosti využít. Uvedeny budou internetové hry, webové stránky, videa, software na tvorbu myšlenkové mapy apod. Nedílnou součástí finanční gramotnosti je i finanční matematika, proto budou v příspěvku zmíněny i programy Microsoft Excel, Google tabulky či GeoGebra. Software bude představen na konkrétní úloze finanční matematiky.

Klíčová slova: finanční gramotnost, IT nástroje, software.

IT in financial literacy education

Abstract: This paper presents several IT tools that can be used in teaching financial literacy. Internet games, websites, videos, mind mapping software, etc. will be presented. Financial mathematics is an essential part of financial literacy, so Microsoft Excel, Google spreadsheets and GeoGebra will also be mentioned. The software will be introduced through specific financial mathematics exercise.

Key words: financial literacy, IT tools, software.

Úvod

V následujících kapitolách budou představeny některé IT nástroje pro výuku finanční gramotnosti. Před využitím nástrojů ve výuce je důležité nástroje vyzkoušet již v průběhu přípravy výuky a s nástroji se seznámit. Pouze tehdy může být jejich zapojení do výuky efektivní.

Webové stránky s pracovními listy

Jedním z nástrojů, který můžou učitelé ve výuce finanční gramotnosti využít, a na který při své přípravě jistě narazí, jsou jednotlivé webové stránky, které se výuce v různé míře a kvalitě věnují. Některé nabízejí pracovní listy pro žáky, jiné definují a popisují pojmy finanční gramotnosti.

Zlatka.in Na webové stránce `https://www.zlatka.in/cs`[1] najdeme mnoho her a aktivit, které žáci mohou plnit. Vše je rozděleno podle jednotlivých stupňů (od 1. stupně ZŠ po SŠ) a témat. Na stránkách si lze vytvořit učitelský, rodičovský nebo žákovský účet. Učitel následně může zadávat domácí úkoly a kontrolovat jejich plnění. Kromě aktivit lze ze stránek stáhnout i připravené pracovní listy, které může učitel rovnou využít ve výuce. Webové rozhraní je připraveno i pro tablety a telefony, tedy lze stránky využít i v případě, že učitel nemůže s žáky navštívit počítačovou učebnu.

Finanční vzdělávání Vhodným zdrojem informací jsou webové stránky `https://www.financnivzdelavani.cz`[2]. Informace na stránkách jsou vzdělávacího a informačního charakteru, slouží tedy vyučujícím a žákům zejména k edukaci formou čtení. Na stránkách naleznete například slovník pojmů finanční gramotnosti nebo návody na různé finanční situace běžného života. Učitelům tak může webová stránka sloužit jako zdroj informací při přípravě hodiny.

Finanční gramotnost (MF ČR) Dalším informativním zdrojem jsou stránky Ministerstva financí České republiky `https://www.financnigramotnost.mfcr.cz`, na kterých se zveřejňují i aktuality z finančního světa. Učitel i žáci tak mohou být v obraze o důležitých změnách a krocích Ministerstva. Opět zde najdeme popisy různých pojmů finanční gramotnosti, slovník, tipy a návody do běžného života, mimo to však i kategorii *Spočítej si*. V této části stránek si lze spočítat RPSN, délku splácení úvěru nebo třeba výši starobního důchodu. Opět stránka může sloužit učitelům při přípravě hodiny.

Podnikavost Na webových stránkách `https://www.podnikavost.cz`[3] naleznete materiály a nástroje na rozvoj podnikavých kompetencí. V sekci *Nástroje rozvoje* naleznete výukové materiály, seznam soutěží nebo zpracované projektové dny. Webové stránky jsou koncipované jako rozcestník k materiálům, které souvisí s rozvojem podnikavých kompetencí.

Finanční gramotnost do škol Jednou z nejkomplexnějších webových stránek a projektů zaměřených na rozvoj finanční gramotnosti je stránka `https://www.fgdoskol.cz`[4]. Tento projekt vytváří výukové materiály pro učitele, vzdělává učitele v oblasti výuky finanční gramotnosti, pořádá soutěže ve finanční gramotnosti a mnoho dalšího. Také založil koncepci *Finančně gramotná škola*. Jedná se o dlouhodobý certifikační proces, do kterého se může kterákoliv škola zapojit. Při cestě za tímto certifikátem musí škola dosáhnout jisté úrovně finančního vzdělávání svých žáků, s čímž jí však pracovní skupina projektu pomůže. Certifikát se získává na 3 roky, poté následuje tzv. recertifikace.

[1] Webovou stránku připravuje neziskové sdružení Matika.in z.s. od roku 2017 za podpory Raiffeisenbank.

[2] Webové stránky připravuje Česká bankovní asociace od roku 2008.

[3] Webové stránky připravuje společnost yourchance, o.p.s. od roku 2018.

[4] Webové stránky připravuje společnost yourchance, o.p.s. od roku 2012

Video-audio materiály

Videa

Pro žáky atraktivním nástrojem jsou edukační videa. Taková zpracovává například Akademie věd České republiky ve svém projektu *NEZkreslená věda*. První série byla zveřejněna v roce 2014. Ke všem videům jsou připravené i metodické listy. Odkazy lze nalézt na stránkách Akademie věd[5]. K tématu financí se doposud váží celkem 4 videa, konkrétně:

- Finanční gramotnost (2. série, 10. díl, délka 8 minut 25 sekund)
- Dějiny peněz (3. série, 1. díl, délka 9 minut 49 sekund)
- Nebojte se ekonomie (5. série, 4. díl, délka 9 minut 20 sekund)

Pro pochopení podstaty kryptoměn nám může pomoci dokumentární video *Bitcoin: Beyond The Bubble - Full Documentary*[6] [1] v délce 35 minut. Je v něm popsána historie vzniku měny Bitcoin, důvod vzniku a princip fungování.

Znalosti ohledně pasivního investování můžeme sbírat z YouTube kanálu *Investiční brambora* [2]. To je i přezdívka autora, Richarda Rumpela.

Součástí finanční gramotnosti je i problematika předlužení a exekuce. Tuto problematiku mapuje minisérie *V exekuci* [3] z produkce České televize. V šesti epizodách popisuje příběhy konkrétních dlužníků na cestě k jejich oddlužení.

Podcasty

Obliba podcastů v posledních letech stoupá, a jelikož se přirozeně snaží nabídka vyrovnat poptávce, veliké množství jich vzniká. Tedy i těch, kteří se zaměřují na oblast financí. Sami žáci již v dnešní době poslouchají podcasty, např. při cestování hromadnou dopravou, a tak lze využít podcast jako mimoškolní zdroj informací a aktualit ze světa financí. Případně některé díly podcastu zapojit do domácího úkolu s vypracováním otázek.

Vhodným podcastem je například projekt *Ve vatě* [4] z dílny *Seznam zpráv* s Markétou Bidrmanovou a jejími hosty - odborníky ze světa investic a financí. Podcastem zaměřeným na investování je *Rozbité prasátko* [5], který připravuje Jakub Dvořák alias Rozbité prasátko. Rozhovory se zajímavými osobnostmi z oblasti byznysu, investování, nemovitostí a kryptoměn můžete poslouchat v podcastu od Vojty Žižky[7] [6].

Internetové kvízy a hry

Peníze na útěku Pro zpestření výuky můžeme zařadit i různé internetové kvízy a hry. Jednou z webových stránek, které takové kvízy nabízí je `https://www.penizenauteku.cz/` z dílny České národní banky (dále jen ČNB). Zde mohou žáci projít jednotlivé oblasti finančního rozhodování jako je tvorba rozpočtu, pojištění, půjčky nebo spoření, které

[5] Odkaz: `https://www.avcr.cz/cs/pro-verejnost/vyukova-videa/`
[6] Pouze v anglickém jazyce.
[7] Podcast se podle autora nazývá *Vojta Žižka*.

jsou zpracovány edukační formou a zakončeny kvízem. Na stránkách lze najít i informace o důchodech, pořízení bydlení či auta, dluzích, cestování, ale i o podvodech.

Chráníme korunu Další stránkou z dílny ČNB je webová stránka `https://www.chranimekorunu.cz`. Na ní mohou žáci objevit informace o historii ČNB a české koruny, o patronech ČNB a o rolích ČNB. V některých z těchto částí na žáky čekají malé hry. Tuto webovou stránku ČNB vytvořila k dvacátým narozeninám české koruny.

FinGr Play V internetová hře `https://www.fingrplay.cz`[8], kterou provozuje společnost ABC finančního vzdělávání o.p.s., je cílem každého hráče provést svoji fiktivní rodinu 30 lety života, v průběhu kterých si musí vzít hypoteční úvěr, našetřit peníze pro své potomky a našetřit peníze na stáří. Finanční situace rodiny je vygenerována zcela náhodně, každý hráč začíná se zcela jinými podmínkami. Hra se hraje na 10 kol po 3 letech. V průběhu každého kola se může hráč rozhodnout sjednat rodině pojištění, investovat volné finanční prostředky nebo je odložit na spoření, sjednat úvěr a mnoho dalšího. Dále pak hráč sleduje, jak se chová trh, a jestli nepřišla nějaká událost (např. krádež, úraz, vytopený dům, apod.). Na závěr kola přichází jeho vyhodnocení.

Hra *FinGr Play* je zcela zdarma, k jejímu hraní je potřeba si založit účet. Není potřeba studovat pravidla hry, hra má i edukační variantu, která hráče procesem hraní provede. Ve hře se pořádají soutěže. Ze zkušenosti autora jsou žáci[9] schopni se hru během 1 vyučovací hodiny naučit a alespoň 1krát ji celou dohrát. V další vyučovací hodině jsou schopni hru dohrát několikrát za sebou. Není tedy nutné hraní hry věnovat více než 2 vyučovací hodiny v řadě.

Virtuální burza

Z autorovy praxe vychází najevo, že již žáci posledních ročníků ZŠ jsou zvědaví na oblast investic. Znají pojmy burza, broker, akcie, cenné papíry, byť zcela přesně nevědí co představují. Obchodovat[10] s cennými papíry mohou až od osmnácti let a do té doby musím nasbírat mnoho znalostí. Pro počáteční představu chování trhu jim však může posloužit tzv. virtuální burza. To je místo, kde mohou žáci obchodovat fiktivní finance a sledovat, co se s nimi, v důsledku jejich rozhodnutí, děje. Jednou z možností takové simulace je virtuální burza na stránkách MarketWatch: `https://www.marketwatch.com/games`[11]. Zde si žáci od 16 let výše mohou založit účet a bez rizika obchodovat na burze, která zrcadlí skutečné hodnoty a ceny cenných papírů a komodit. Pro učitele je výhodou, že může založit, hru, do které se celá třída přihlásí a sleduje navzájem svůj (ne)úspěch.

[8] Hra se velice podobá deskové hře *Finanční svoboda* [7].

[9] 1. ročník SŠ.

[10] Myšleno prostřednictvím brokera.

[11] Prostředí je pouze v anglickém jazyce.

Myšlenkové mapy

Myšlenkové mapy jsou populárním výukovým nástrojem, který lze uplatnit v libovolné fázi hodiny, nejčastěji však na začátku ve fázi evokace a na konci ve fázi reflexe[12]. Zároveň jsou hojně využívány i pracovními týmy ve firmách při projektové práci či jednotlivci při plánování běžných životních záležitostí.

Nástrojem, který toto umožňuje skrze počítače, tablety a telefony je *Coggle*, který nalezneme na webových stránkách `https://coggle.it`. Po vytvoření účtu můžeme na stránkách tvořit myšlenkové mapy a dokonce na nich i spolupracovat s ostatními. Snadno můžeme měnit jejich vzhled a po celou dobu jsou uloženy na tomto našem účtu, tedy se k nim můžeme připojit odkudkoliv.

Ve verzi zdarma můžeme vytvořit až 3 soukromé myšlenkové mapy a neomezené množství veřejných. Placené verze[13] nám umožňují neomezené množství soukromých myšlenkových map a větší volnost v úpravě vzhledu.

Software k výuce finanční matematiky

Při výuce finanční matematiky, která je nedílnou součástí finanční gramotnosti, můžeme využít software *GeoGebra*[14]. Jedná se o dynamický matematický software, který je využíván zejména pro výuku geometrie a ukázku řešení konstrukčních úloh. Lze v něm například sestrojit graf funkce a proměnnou dynamicky měnit pomocí posuvníku. V reálném čase vidíme změnu grafu funkce.

Dále můžeme využít tabulkový procesor *Microsoft Excel*[15] nebo některou z jeho alternativ, kterými jsou například *Tabulky Google*[16] nebo *LibreOffice Calc*[17]. V tabulkovém procesoru můžeme počítat hodnotu výrazu s proměnnou na základě sestaveného vzorce. Proměnnou může představovat hodnota v jiné buňce, na kterou se odkazujeme. Při změně hodnoty proměnné se nám automaticky přepočítá hodnota výrazu. Tento výpočet lze snadným pohybem přenést i na sousední buňky bez nutnosti vzorec znovu přepisovat.

Těchto možností využijeme při řešení následující úlohy. Úlohu budeme názorně řešit v obou programech.

Zadání: *Aleš si na počátku roku odloží na spořicí účet 1 000 Kč. Jak vysoká by musela být roční úroková sazba, aby měl Aleš po jednom roce na spořicím účtě alespoň 1 050 Kč? Daň ze zisku je 15 %, úročení je měsíční, Aleš v průběhu roku na spořicí účet další částky neodkládá.*

[12] První a poslední fáze třífázového modelu učení, známého jako E-U-R.
[13] Verze *Awesome* za 5 USD/měsíc a verze *Organization* za 8 USD/měsíc/osobu
[14] Volně dostupné na stránkách `https://www.geogebra.org`.
[15] Volně dostupná pouze zkušební verze.
[16] Dostupné po přihlášení na stránkách Google `https://docs.google.com/spreadsheets/`.
[17] Volně dostupné na stránkách `https://cs.libreoffice.org/`.

Řešení v programu GeoGebra

V programu nejprve musíme vytvořit graf funkce zůstatku v závislosti na počtu měsíců spoření. Vzhledem k tomu, že Aleš peníze odložil na spořicí účet a žádné další peníze na něj neodkládá, využijeme vzorec pro složené úročení z [8]:

$$K'_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n,$$

kde K'_n představuje výsledný kapitál, K_0 počáteční kapitál, k zdaňovací koeficient, i setinu roční úrokové sazby[18], t počet dní úrokovacího období a n počet úrokovacích období.

Dle zadání naší úlohy se snažíme určit roční úrokovou sazbu $i' = 100i$. Hodnoty ostatních parametrů[19] jsou:
$K'_n > 1\,050$; $K_0 = 1\,000$; $k = 0,85$; $t = 30$; $n = 12$. Hodnotu n však nedosadíme, jelikož chceme vykreslit graf funkce v závislosti na počtu měsíců. Vzorec tedy nyní vypadá po úpravě následovně:

$$K'_n = 1\,000 \cdot \left(1 + 0,85 \cdot \frac{i'}{12 \cdot 100}\right)^n.$$

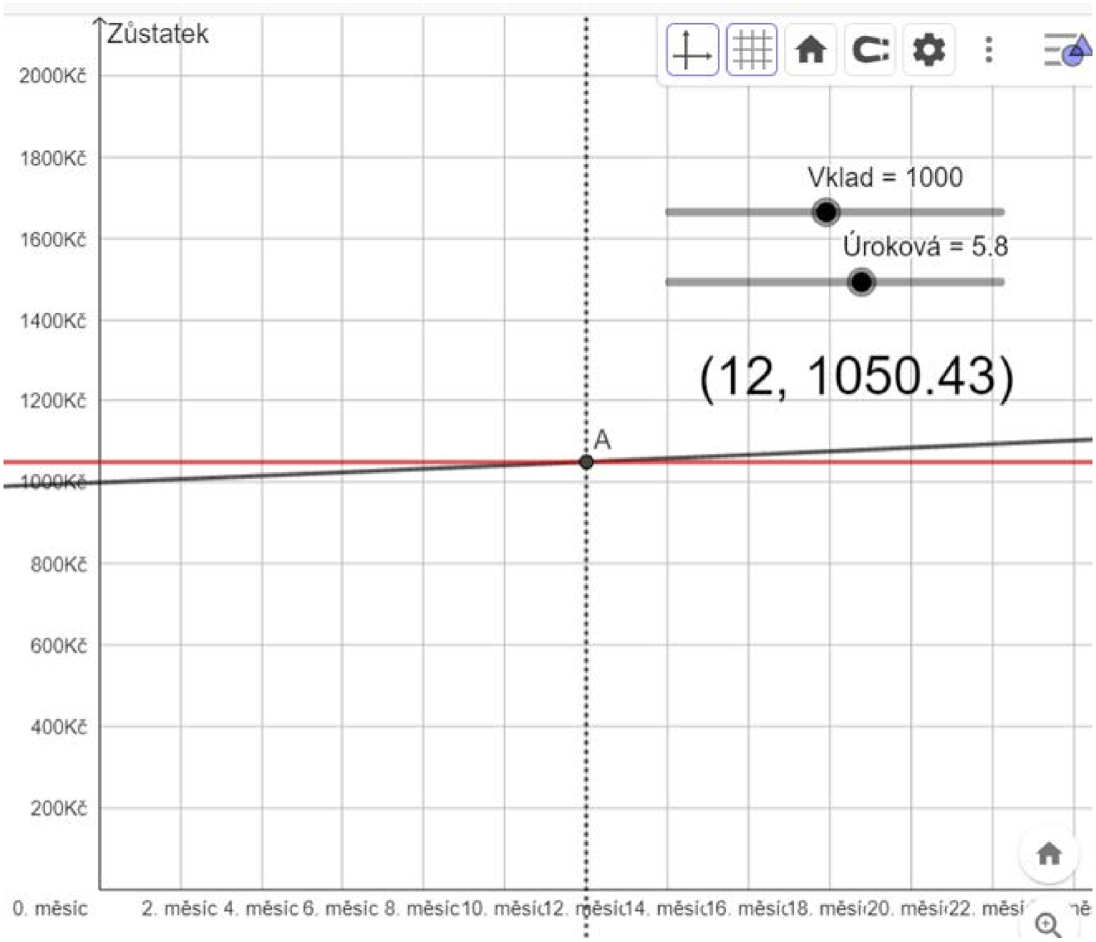
Před samotným zadáním předpisu funkce do příkazového řádku[20] si vytvoříme posuvníky. V tomto případě by nám stačil i jeden posuvník, jelikož hledáme výši roční úrokové sazby i'. Můžeme si však vytvořit dva posuvníky a využít je pro ukázku toho, jak výše počátečního kapitálu ovlivňuje výsledný kapitál. Vytvoříme si tedy dva posuvníky, *Vklad*, který odpovídá počátečnímu kapitálu a *Úroková*, který odpovídá roční úrokové sazbě. Nyní již vytvoříme graf funkce tak, že do příkazového řádku napíšeme předpis funkce:

$$g(x) = \text{Vklad} \cdot \left(1 + 0,85 \cdot \frac{\text{Úroková}}{12 \cdot 100}\right)^x$$

Místo n jsme zvolili proměnnou x a pro zjednodušení na ni nekladli podmínky, tedy nechali $x \in \mathbb{R}$. Posuvníkem nastavíme výši vkladu na 1 000 Kč.

Dále si nastavíme hranici 1 050 Kč, kterou se snažíme vkladem pokořit. Tu bude představovat graf konstantní funkce $y = 1\,050$. Barvu grafu funkce, tedy přímky rovnoběžné s osou x, můžeme zvolit například červenou, abychom ji odlišili od grafu funkce zůstatku, tedy exponenciály. Na závěr vytvoříme křivku $x = 12$, která ukazuje hranici 1 roku spoření a vytvoříme průsečík A této přímky s exponenciálou. Na obrazovce si zobrazíme souřadnice bodu A, abychom mohli pozorovat moment, kdy naspořená částka přesáhne hodnotu 1 050 Kč. Při posouvání posuvníkem *Úroková* zjistíme, že se tak děje u hodnoty roční úrokové sazby 5,8 % p. a.

[18] Neboli roční úrokovou sazbu vyjádřenou v desetinném čísle.
[19] Využíváme tzv. *Evropský standard* (30E/360), ve kterém má 1 rok 360 dní a 1 měsíc 30 dní.
[20] Příkazovým řádkem je myšlena kolonka *Vstup*.



Obrázek 1: Řešení úlohy v software GeoGebra.

Řešení v programu Tabulky Google

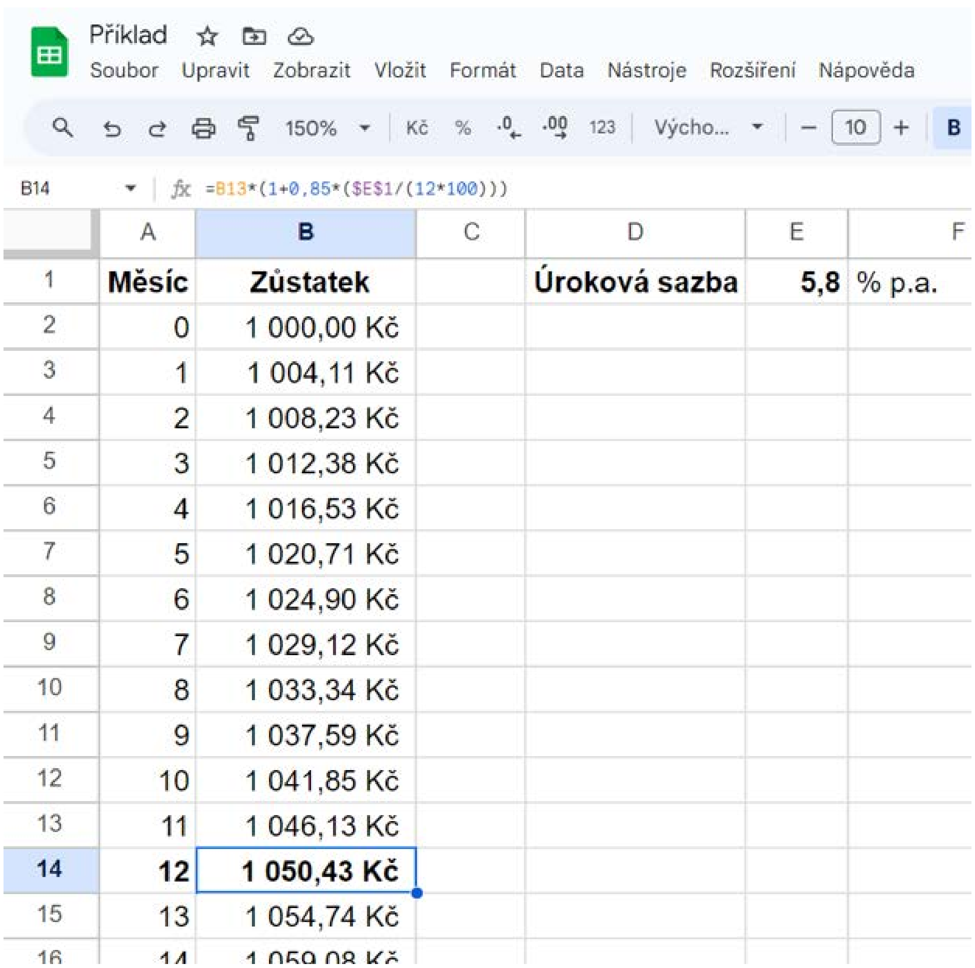
Tuto úlohu také můžeme řešit za pomocí tabulkového procesoru, např. *Tabulky Google*.

Nejprve si do prvního sloupce rozepíšeme měsíce. Začneme od 0, která představuje moment, kdy na účet peníze vkládám. Na konci prvního měsíce proběhne zúročení vkladu. Ve vedlejším sloupci se nám bude počítat hodnota vkladu (tj. zůstatek). Do první buňky ve druhém sloupci (vedle měsíce 0) napíšeme 1 000 Kč, tedy počáteční vklad. I v tomto programu můžeme počáteční hodnotu měnit a sledovat, jak nám počáteční kapitál ovlivní výslednou hodnotu.

Dále si do některé z vedlejších buněk v jiném sloupci zapíšeme libovolnou roční úrokovou sazbu, např. 3 % p. a. Tu budeme měnit a pozorovat, pro kterou hodnotu roční úrokové sazby nám výsledný kapitál na konci 12. měsíce přesáhne částku 1 050 Kč.

Nyní můžeme přistoupit k zapsání samotného vzorce. Ten zapíšeme do druhé buňky do sloupce zůstatku, tedy pod hodnotu 1 000 Kč. Využijeme stejného vzorce pro složené úročení z předchozí části. Ve vzorci se objeví stejné dvě proměnné jako v předchozím řešení. Tedy počáteční částka a roční úroková sazba. Pro názornější vysvětlení předpokládejme, že počáteční vklad je zapsán v buňce B2 a úroková sazba v buňce E1. Potom do buňky B3 (kam zapisujeme náš vzorec) napíšeme `=B2*(1+0,85*($E$1/(12*100)))` a stiskneme klávesu enter. Znaky dolaru vkládáme do vzorce proto, abychom zafixovali pozici buňky s roční úrokovou sazbou, na kterou se budeme po celou dobu odkazovat. Pozice buňky s kapitálem bude proměnlivá, proto u jejích souřadnice znaky dolaru nejsou.

Nyní znovu označíme buňku B3 a pomocí tečky v pravém dolním rohu buňky roztáhneme vzorec na všechny další buňky v sloupci až k měsíci 12. Vzhledem k nezafixovaným souřadnicím buňky s výchozím kapitálem se současná hodnota vkladu počítá v závislosti na předchozím měsíci, což chceme. Vedle měsíce 12 vidíme hodnotu kapitálu na konci roku při roční úrokové sazbě 3 % p. a. Nyní můžeme zkoušet měnit roční úrokovou sazbu a pozorovat, při které výši roční úrokové sazby pokoříme hranici 1 050 Kč. Opět vidíme, že se jedná o roční úrokovou sazbu o hodnotě přibližně 5,8 % p. a.



	A	B	C	D	E	F
1	Měsíc	Zůstatek		Úroková sazba	5,8	% p.a.
2	0	1 000,00 Kč				
3	1	1 004,11 Kč				
4	2	1 008,23 Kč				
5	3	1 012,38 Kč				
6	4	1 016,53 Kč				
7	5	1 020,71 Kč				
8	6	1 024,90 Kč				
9	7	1 029,12 Kč				
10	8	1 033,34 Kč				
11	9	1 037,59 Kč				
12	10	1 041,85 Kč				
13	11	1 046,13 Kč				
14	12	**1 050,43 Kč**				
15	13	1 054,74 Kč				
16	14	1 059,08 Kč				

Obrázek 2: Řešení úlohy v software Tabulky Google.

Literatura:

[1] 100thMonkeyChannel. (19. 4. 2018). *Bitcoin: Beyond The Bubble - Full Documentary* [Video]. YouTube. `https://www.youtube.com/watch?v=LszOt51OjXU`

[2] Investiční brambora. *Domovská stránka* [YouTube kanál]. YouTube. Dostupné 1. 12. 2023 z `https://www.youtube.com/@Investicnibrambora`

[3] Hoznauerová, J. (Výkonná producentka). (2023). *V exekuci* [Televizní seriál]. Česká televize.

[4] Bidrmanová, M. (Moderátorka). (2021–současnost). *Ve vatě* [Podcast]. Seznam zprávy. `https://podcasty.seznam.cz/podcast/ve-vate`

[5] Dvořák, J. (Moderátor). (2020–současnost). *Rozbité prasátko* [Podcast]. Rozbité prasátko.
`https://podcasty.seznam.cz/podcast/rozbite-prasatko-u-mikrofonu`

[6] Žižka, V. (Moderátor). (2021–současnost). *Vojta Žižka* [Podcast]. Vojta Žižka.
`https://podcasty.seznam.cz/podcast/investicni-podcast-vojta-zizka`

[7] Kořený, K. (2008). *Finanční svoboda* [Desková hra]. Finanční svoboda.

[8] Odvárko, O. (2022). *Matematika pro SŠ – Posloupnosti*. Prometheus.

Jiří Helus
Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky
Sokolovská 49/83, 186 75 Praha 8
e-mail: Jiri.Helus@seznam.cz

INTERAKTÍVNE APLIKÁCIE Z MATEMATIKY PRE ŽIAKOV ZÁKLADNÝCH ŠKÔL

Roman Horváth, Milan Pokorný

Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita

Abstrakt: Príspevok sa zaoberá interaktívnymi aplikáciami z matematiky, ktoré sú voľne dostupné na adrese https://matematika.truni.sk/cvicenia. Sú využiteľné ako doplnkový študijný materiál pri precvičovaní vedomostí z matematiky žiakov základných škôl. Dôležitou vlastnosťou aplikácií je ich súlad s obsahovým a výkonovým štandardom určeným v Štátnom vzdelávacom programe. Aplikácie sú spustiteľné na veľkom počte rôznych zariadení s rôznymi operačnými systémami.

Kľúčové slová: interaktívne aplikácie, IKT vo vyučovaní, počítače vo vyučovaní matematiky.

Interactive Applications from Mathematics for Primary and Secondary School Pupils

Abstract: The paper deals with interactive applications from mathematics, which are available at https://matematika.truni.sk/cvicenia. They can be used as additional study material for practising the mathematics knowledge of secondary school students. An important feature of the applications is their compliance with the content and performance standards determined in the State Education Program. Applications can be run on a large number of different devices with different operating systems.

Key words: interactive applications, ICT in education, computers in teaching mathematics.

Úvod

Dnes využívame moderné technológie takmer vo všetkých oblastiach ľudskej činnosti. Je úplne prirodzené, že využívame ich potenciál aj na efektívne dosiahnutie vzdelávacích cieľov na všetkých typoch škôl, pretože dnes už má väčšina žiakov základných škôl potrebné zručnosti pri práci s notebookmi, mobilmi, tabletmi a inými modernými zariadeniami. Naviac, väčšina žiakov pracuje s modernými technológiami s radosťou. Preto by sme sa mali snažiť integrovať moderné technológie aj do vyučovania matematiky na druhom stupni základných škôl.

Význam integrácie moderných technológií sme mohli naplno pocítiť počas nedávnej pandémie COVID-19, ktorá spôsobila prerušenie prezenčného vzdelávania. Bez adekvátnej predchádzajúcej prípravy sa učitelia a ich žiaci museli spoliehať na rôzne dištančné formy vzdelávania. V snahe napĺňať vzdelávacie ciele aj v komplikovaných podmienkach dištančného vzdelávania, vyučovali mnohí učitelia prostredníctvom synchrónnej komunikácie, napríklad v Teams či Zoom. Inou možnosťou bola asynchrónna komunikácia, kedy učitelia zasielali žiakom materiály na vypracovanie a žiaci ich potom posielali naspäť. Pandémia COVID-19 poukázala na potrebu kvalitne didakticky spracovaných materiálov na vyučovanie matematiky, pretože stále pociťujeme ich nedostatok. Je nemožné predpokladať, že učitelia si budú na každú vyučovaciu hodinu pripravovať takéto materiály sami. Aby sme aspoň čiastočne prispeli k zmierneniu nedostatku voľne dostupných interaktívnych vzdelávacích materiálov z matematiky, pripravili sme pre učiteľov druhého stupňa základnej školy a ich žiakov interaktívne aplikácie z nasledujúcich oblastí: pomer, priama a nepriama úmernosť; premenná, výraz; desatinné čísla; kombinatorika. Tieto aplikácie opíšeme v hlavnej časti článku.

Je všeobecne známe, že vo vyučovaní matematiky treba preferovať aktívny prístup žiaka. Novotná, citujúc (Petty, 1996), píše: „K aktivnímu přístupu k učení lze žáky podněcovat různými způsoby. Nabídneme jim činnosti, při nichž si budou práci opravovat a kontrolovat sami (buď svou vlastní, nebo vzájemně) a při nichž budou potřebovat vyhledat některé informace sami z různých zdrojů. Povedeme je k aktivnímu experimentování a k tomu, aby využívali svých zkušeností“ (Hejný et al., 2004, s. 357).

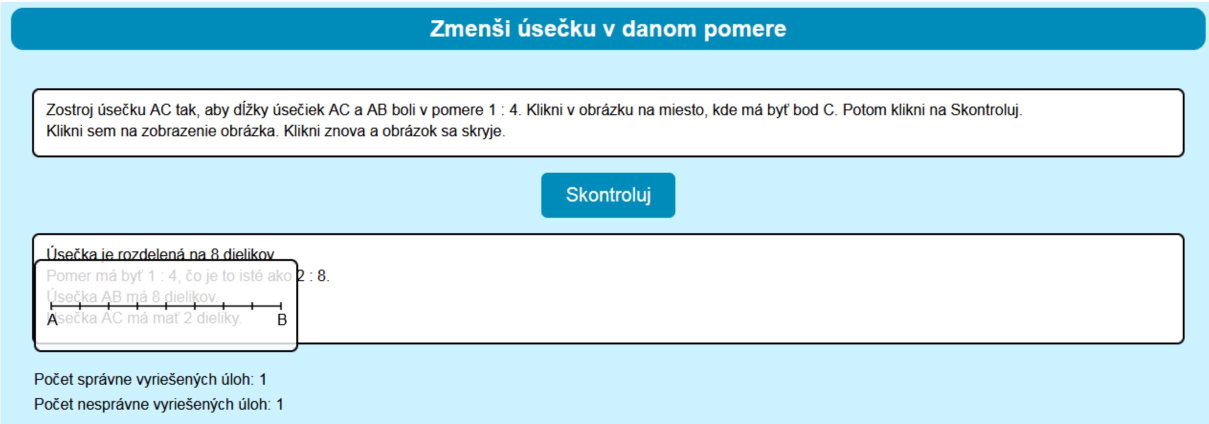
Z prác viacerých autorov vyplýva, že integrácia moderných technológií do vyučovania matematiky dokáže podporiť aktívny prístup žiaka k učeniu sa. Kumar a Kumaresan uvádzajú: „Počítače ponúkajú množstvo didaktických výhod, ktoré možno využiť na podporu aktívnejšieho prístupu k učeniu sa. Študenti môžu byť zapojení do procesu objavovania a porozumenia a už nevnímajú matematiku ako prijímanie a zapamätanie si algoritmov a vzorcov“ (Kumar & Kumaresan, 2008).

Vhodnosť používania interaktívnych aplikácií vo vyučovaní matematiky na druhom stupni základných škôl bola preukázaná napríklad v štúdii Malatinskej et al. (2015), kde autori preukázali nielen pozitívny vplyv integrácie interaktívnych aplikácií do vyučovania matematiky na úroveň vedomostí žiakov, ale aj ich pozitívny vplyv na zlepšenie postojov žiakov k matematike.

1 Ukážky interaktívnych aplikácií

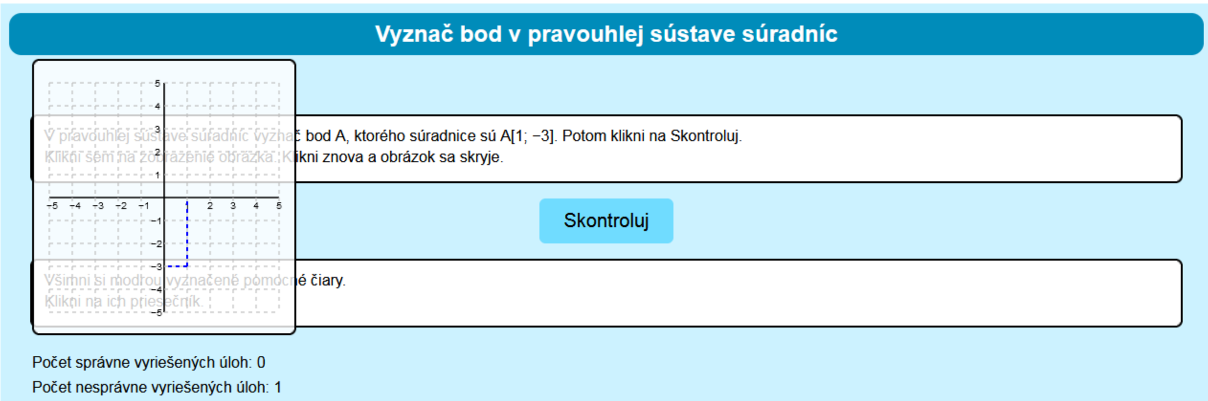
V tejto časti článku predstavíme nami vytvorené interaktívne aplikácie z matematiky na témy: pomer, priama a nepriama úmernosť; premenná, výraz; desatinné čísla; kombinatorika. Aplikácie sú voľne prístupné na adrese https://matematika.truni.sk/cvicenia.

Prvá séria obsahuje 24 interaktívnych aplikácií na témy pomer, priama úmernosť, nepriama úmernosť. Vďaka týmto aplikáciám si žiaci precvičia zápis pomeru v základnom tvare, zmenšenie a zväčšenia čísla a úsečky v danom pomere, rozdelenie čísla a úsečky v danom pomere, riešenie slovných úloh s tematikou pomeru, postupného pomeru, mierky, priamej úmernosti, nepriamej úmernosti a riešenie slovných úloh trojčlenkou. Príklad aplikácie vidíme na obrázku 1.



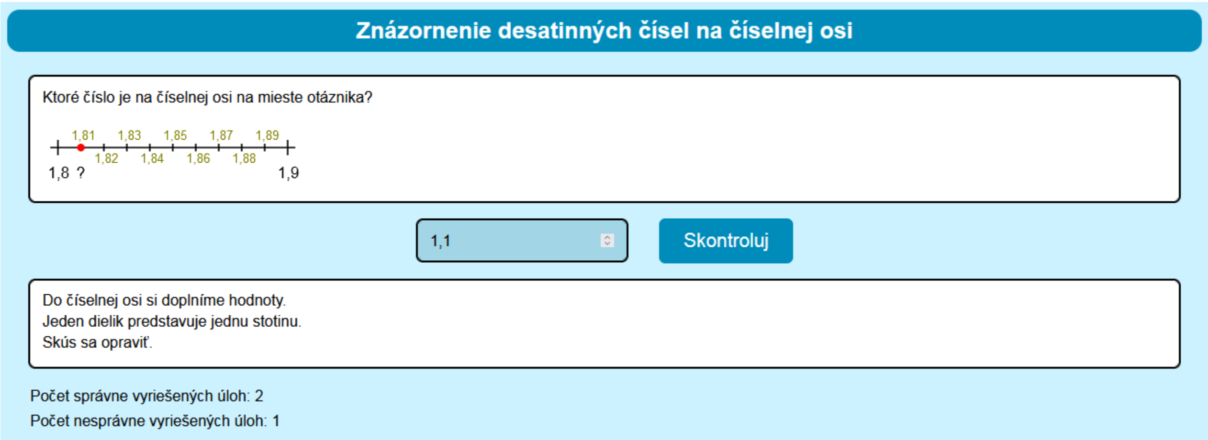
Obrázok 1: Ukážka interaktívnej aplikácie „Zmenši úsečku v danom pomere“ a ukážka spätnej väzby po nesprávnej odpovedi žiaka.

Druhá séria obsahuje 19 interaktívnych aplikácií na tému premenná a výrazy. Vďaka týmto aplikáciám si žiaci precvičia určenie hodnoty výrazu s jednou a dvomi premennými, vyjadrenie vzťahu medzi premennými, výpočet hodnoty neznámej zo vzorca a vyjadrenie neznámej zo vzorca, sčítanie a odčítanie výrazov s premennými, násobenie a delenie výrazov v zátvorke kladným a záporným číslom, vynímanie čísla pred zátvorku, určenie súradníc bodu v pravouhlej sústave súradníc a vyznačenie bodu v pravouhlej sústave súradníc. Príklad aplikácie vidíme na obrázku 2.



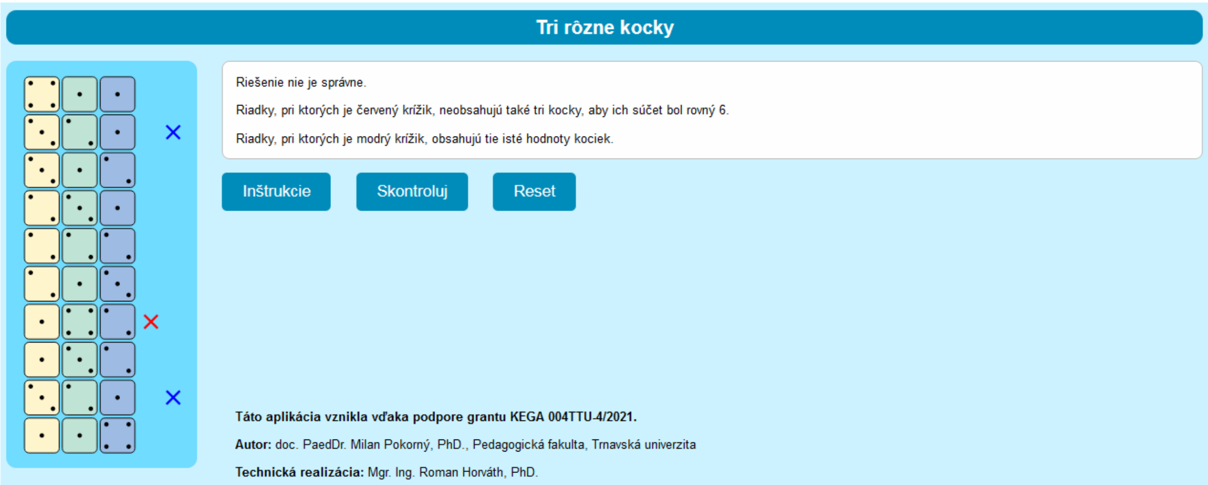
Obrázok 2: Ukážka interaktívnej aplikácie „Vyznač bod v pravouhlej sústave súradníc“ a ukážka spätnej väzby po nesprávnej odpovedi žiaka.

Tretia séria obsahuje 38 interaktívnych aplikácií na tému desatinné čísla. Vďaka týmto aplikáciám si žiaci precvičia zápis desatinných čísel, ich porovnávanie, zaokrúhľovanie, sčítanie, odčítanie, násobenie, delenie, určenie hodnoty číselných výrazov, riešenie slovných úloh s desatinnými číslami, premenu jednotiek dĺžky, hmotnosti, objemu, obsahu, znázornenie desatinných čísel na číselnej osi, výpočet aritmetického priemeru. Príklad aplikácie vidíme na obrázku 3.



Obrázok 3: Ukážka interaktívnej aplikácie „Znázornenie desatinných čísel na číselnej osi“ a ukážka spätnej väzby po nesprávnej odpovedi žiaka.

Štvrtá séria obsahuje 26 interaktívnych aplikácií na nájdenie všetkých možností v úlohe z kombinatoriky. Tieto úlohy sú vhodné pre žiakov prvého aj druhého stupňa základnej školy. Príklad aplikácie vidíme na obrázku 4.



Obrázok 4: Ukážka interaktívnej aplikácie, v ktorej treba nájsť všetky možnosti, ako môže na troch rôznych kockách padnúť súčet 6 a ukážka spätnej väzby po nesprávnej odpovedi žiaka.

2 Možnosti použitia interaktívnych aplikácií

Ovládanie aplikácií je jednoduché a intuitívne a žiaci si na neho zvyknú za niekoľko minút. Napríklad aplikáciu na obrázku 4 ovládame tak, že klikáme priamo na kocku a tým na nej postupne meníme počet bodiek od 1 po 6 a znova od 1. V prípade, že si žiak chce správnosť svojho riešenia skontrolovať, klikne na tlačidlo Skontroluj a získa okamžitú spätnú väzbu o správnosti svojho riešenia. V prípade nesprávneho riešenia sú duplicitné možnosti označené modrým krížikom, zatiaľ čo nesprávne možnosti (teda tie, ktoré nezodpovedajú podmienkam v zadaní úlohy) sú označené červeným krížikom (pozri obrázok 4). Po zobrazení spätnej väzby môže žiak ďalej pokračovať v riešení úlohy a samostatne si opraviť svoju chybu.

Výhody integrácie vyššie opísaných interaktívnych aplikácií do vyučovania matematiky vidíme vo viacerých rovinách:

1. Aplikácie majú rôzne možnosti využitia, či už priamo na vyučovacej hodine, alebo v školskom klube detí, počas zastupovanej hodiny, pri domácej príprave žiakov, pri rôznej záujmovej a krúžkovej činnosti. Aby sme dosiahli to, že žiak bude pri práci s aplikáciami aktívny, odporúčame, aby každý žiak mal svoje vlastné zariadenie (notebook, tablet…).
2. Žiak sa naučí oveľa viac, ak k učeniu pristupuje aktívnou činnosťou. Pri práci s našimi aplikáciami sú žiaci nútení pracovať samostatne aj preto, lebo v zadaniach úloh sú všetky číselné vstupy náhodne generované. Teda ak má napríklad žiak na svojom tablete úlohu z obrázka 1, jeho vedľa sediaci spolužiak má v nej iné čísla, a preto musia obaja pracovať samostatne.
3. Aplikácie poskytujú žiakovi počas jeho práce okamžitú spätnú väzbu o správnosti riešenia. Ak riešenie žiaka nie je správne, má možnosť sa opraviť. Toto považujeme za výhodu najmä pri domácej príprave žiaka, keď mu aplikácia sama kontroluje správnosť riešenia domácej úlohy (pri riešení domácej úlohy v pracovnom liste takáto spätná väzba neexistuje).
4. Aplikácie podporujú vlastné tempo práce žiaka. Každý žiak pracuje tempom, ktoré mu vyhovuje. Jeden ešte stále rieši prvú úlohu, iný je už na tretej. Tak dosiahneme, že pomalší žiaci stíhajú bez toho, aby tí rýchlejší museli nečinne čakať.
5. Aplikácie sú spustiteľné na veľkom počte rôznych zariadení (počítačoch, notebookoch, tabletoch aj mobiloch) s operačnými systémami Windows, macOS, Android, iOS a inými s podporovanými prehliadačmi.
6. Aplikácie náhodne generujú číselné hodnoty v úlohách, takže pri opätovnom spustení sa výsledky neopakujú. Toto odlišuje naše aplikácie od mnohých iných aplikácií z internetu, kde je pri opätovnom spustení očakávaný stále rovnaký výsledok.
7. Keď sa učiteľ prejde po triede, na monitore vidí, ako sa žiakom darí. Vie, koľko úloh vyriešili správne a koľko nesprávne (pozri obrázky 1 – 3).
8. Aplikácie je možné využiť v skupinovej práci žiakov. Napríklad: žiak, ktorý s aplikáciou už nemá problém, pracuje spolu so spolužiakom a pomáha mu.

3 Záver

Na našich školách stále pribúdajú interaktívne tabule, počítače, notebooky, tablety. Podobne pribúdajú tieto zariadenia aj v domácnostiach našich žiakov. Je však všeobecne známe, že kúpou interaktívnej tabule, počítačov či tabletov automaticky nezlepšíme výsledky vzdelávania. Na to je potrebné, aby mal učiteľ k dispozícii kvalitne didakticky spracovaný softvér a vedel ho vhodne použiť na dosiahnutie vzdelávacích cieľov. Jednoznačne súhlasíme so Žilkovou, ktorá tvrdí, že kvalita elektronického vzdelávania je determinovaná predovšetkým kvalitným e-obsahom (Žilková, 2014).

Hoci na internete nájdeme veľké množstvo interaktívnych aplikácií, často nám v ich efektívnom používaní na prvom stupni základnej školy bráni napríklad jazyková bariéra. Mnohé aplikácie v slovenskom jazyku zasa nedosahujú potrebnú kvalitu, najmä ak sa zameriame na ich súlad so Štátnym vzdelávacím programom, mieru ich interaktivity či správnosť ich didaktického spracovania. Veríme, že aj nami opísané aplikácie poslúžia učiteľom pri efektívnej integrácii moderných technológií do vyučovania matematiky.

Žiaľ, zatiaľ sme nemali možnosť realizovať výskum efektívnosti použitia týchto aplikácií vo vzdelávacom procese. Spoliehame sa však na výsledky výskumu realizovaného s našimi staršími interaktívnymi aplikáciami, ktorý preukázal pozitívny vplyv na úroveň vedomostí žiakov, ako aj na ich vzťah k matematike (Malatinská et al., 2015). Preto privítame možnosť spolupracovať na realizácii takéhoto výskumu s učiteľmi z praxe.

Ďalšou nevýhodou našich aplikácií je, zatiaľ, skutočnosť, že sú dostupné iba v slovenskom jazyku. V prípade záujmu sme pripravení spolupracovať na rozšírení aplikácií o iné jazykové mutácie.

4 Poďakovanie

Tento článok vznikol aj vďaka podpore grantov KEGA 004TTU-4/2021 Vyučovanie matematiky a informatiky pomocou elektronických interaktívnych komponentov a KEGA 001UMB-4/2023 Implementácia blended learningu do prípravy profesijného bakalára z informatiky a budúcich učiteľov matematiky a informatiky.

Literatúra:

[1] Hejný, M., Novotná, J., & Stehlíková, N.: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Univerzita Karlova v Praze, 2004.

[2] Kumar, A., & Kumaresan, S.: *Use of Mathematical Software for Teaching and Learning Mathematics*. ICME 11 Proceedings, 2008, 373–388.

[3] Malatinská, S., Pokorný, M., & Híc, P.: *Efficiency of Blended Learning in Teaching Mathematics at Primary School. Information, Communication and Education Application*, Advances in Education Research, 2015, 85, 6–11.

[4] Petty, G.: *Moderní vyučování*. Portál, 1996.

[5] Žilková, K.: *Prednosti a riziká vzdelávania prostredníctvom e learningového kurzu manipulačná geometria*. Didmattech 2013 : New Technologies in Science and Education : International Scientific and Professional Conference. University of West Hungary, Györ, 2004, 222–227.

Mgr. Ing. Roman Horváth, PhD.
Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita
Priemyselná 4, P. O. Box 9, 918 43 Trnava, Slovenská republika
e-mail: roman.horvath@truni.sk

doc. PaedDr. Milan Pokorný, PhD.
Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita
Priemyselná 4, P. O. Box 9, 918 43 Trnava, Slovenská republika
e-mail: mpokorny@truni.sk

NETRADIČNÍ SBÍRKA SLOVNÍCH ÚLOH V PREZI

Marika Hrubešová

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta

Abstrakt: Prezentační program Prezi nabízí možnost vytvořit si netradičně pojaté online prezentace, které bezpochyby dokážou zaujmout nejednoho žáka. Prezi umožňuje vytvářet prezentace na „nekonečné ploše“, a proto se hodí např. při vytváření myšlenkových map, různých sbírek úloh, kde si sám učitel s žáky může volit pořadí řešených úloh. Cílem článku je ukázat jednu takovou atraktivní sbírku slovních úloh pro žáky 2. třídy ZŠ zaměřenou na úlohy, které se běžně neobjevují v učebnicích matematiky.

Klíčová slova: slovní úloha, netradiční matematická úloha, sbírka, Prezi.

Collection of non-standard word problems in PREZI

Abstract: The Prezi presentation program offers the opportunity to create nontraditional online presentations that can engage many students. Prezi allows you to create presentations on an "infinite desktop" and is therefore useful for example in creating mind maps, various collections of tasks where the teacher and the students can choose the order of the tasks to be solved. The aim of this paper is to show one attractive collection of word problems for 2nd grade pupils of primary school, focusing on problems that do not normally appear in mathematics textbooks.

Key words: word problem, non-traditional math problem, collection, Prezi.

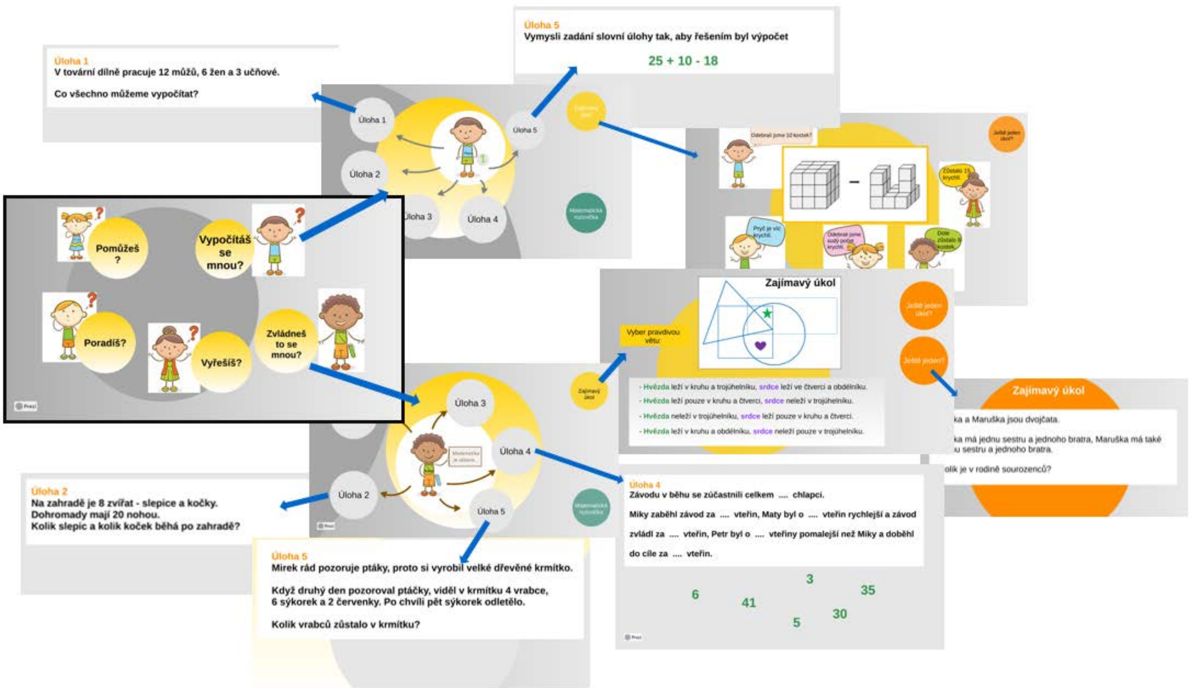
Úvod

V současné době mají učitelé celou řadu možností, materiálů, které mohou využít ve své výuce. Domnívám se však, že nestandardní, netradiční úlohy stojí stále trochu v pozadí, a přitom jejich zařazení do výuky matematiky považuji za velmi důležité. Nejenže mají motivační charakter, ale také rozvíjí např. prostorovou představivost, logické a kombinatorické myšlení, podporují porozumění v matematice a celkově rozvíjí klíčové kompetence žáka. Kromě toho, že existuje celá řada různých zdrojů, kde se netradiční úlohy vyskytují, má každý učitel možnost si netradiční sbírku úloh vytvořit pro konkrétní podmínky ve třídě, kterou učí. Otázkou je pouze jak a v čem. Pro zajímavou a atraktivní sbírku úloh se nabízí například intuitivní prezentační program Prezi.

1 PREZI

Hrkal (2023) charakterizuje Prezi jako prezentační software, který místo jednotlivých snímků využívá velkého plátna, na kterém je umístěn veškerý obsah. Během prezentace se nad plátnem přelétává a přibližuje vybraný text. Na plátně si tvůrce rozvrhneme myšlenky, ke kterým se může libovolně vracet, a především má možnost je vidět z nadhledu.

Jedná se o jednoduchý, velmi intuitivní a neokoukaný prezentační program. Základní verze Public je zdarma a v rámci verze uživatel získá 100 MB úložného prostoru[1]. Vytvořené prezentace jsou však veřejně přístupné všem a pracovat na prezentacích lze pouze online. Prezentaci otevřeme kdekoliv, stačí být připojený k internetu. Prostor pro tvorbu není ohraničen, jednotlivé snímky nejsou lineárně uspořádané jako např. v PowerPointu, ale celá prezentace tvoří jakýsi dynamický příběh. S jednotlivými myšlenkami se pracuje v prezentaci na principu „zaostřování“, tzn. dochází k přibližování myšlenek a vracení se zpět. Pokud cílem prezentace není prezentovat složitější tabulky, různé diagramy či grafy, pro které je PowerPoint vhodnější, ale pouze se jedná o prezentaci tvořenou hesly, obrázky či ikonami, lze vytvořit v Prezi velmi netradiční a poutavou prezentaci, která zcela jistě zaujme všechny zúčastněné. (Prezi, 2023)



Obrázek 1: Ukázka vizualizace struktury sdělovaného obsahu (vytvořená sbírka úloh).

Aplikaci Prezi lze využít téměř kdykoliv, nejen při firemních prezentací či prezentací na různých konferencí, ale i v pedagogické praxi, během vyučování. Je možné vytvořit atraktivní prezentaci pro jakýkoliv vyučovaný předmět. Výhodou je fakt, že Prezi umožňuje stálou vizualizaci struktury sdělovaného obsahu a pedagog se až na místě může rozhodnout, o čem

[1] Další verze jsou již placené a uživatel získává výhody v podobě většího úložného prostoru, získává možnost tvořit neveřejné prezentace a pracovat v offline editoru (http://prezi.com)

začne hovořit, co a v jaké pořadí žákům předloží. Prezentaci lze kdykoliv relativně rychle doplnit o další fakta, zajímavosti či souvislosti, aniž by se narušila předchozí struktura.

2 NESTANDARDNÍ ÚLOHY

V RVP (2023) se pojem „nestandardní úlohy“ objevuje ve čtvrtém tematickém okruhu vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. „Důležitou součástí matematického vzdělávání jsou Nestandardní aplikační úlohy a problémy, jejichž řešení může být do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky, ale při němž je nutné uplatnit logické myšlení. Tyto úlohy by měly prolínat všemi tematickými okruhy v průběhu celého základního vzdělávání. Žáci se učí řešit problémové situace a úlohy z běžného života, pochopit a analyzovat problém, utřídit údaje a podmínky, provádět situační náčrty, řešit optimalizační úlohy. Řešení logických úloh, jejichž obtížnost je závislá na míře rozumové vyspělosti žáků, posiluje vědomí žáka ve vlastní schopnosti logického uvažování a může podchytit i ty žáky, kteří jsou v matematice méně úspěšní.“ (RVP, 2023, s. 31)

Dále Rámcový vzdělávací program (2023) charakterizuje Nestandardní aplikační úlohy a problémy pomocí očekávaných výstupů pro první stupeň ZŠ následovně. „Žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky.“ (RVP, 2023. s. 35) Jedná se o slovní úlohy, číselné a obrázkové řady, magické čtverce či úlohy rozvíjející prostorovou představivost.

Výstižná je charakteristika od Rezka a Liškové (2015), kteří tyto úlohy definují, jako úlohy, které mají často širší kontext navozující konkrétní problémovou situaci. Při zpracování zadaných údajů žáci analyzují více informací, hledají souvislosti a informace dále pracovávají. Při práci s nestandardními úlohami se vytváří vhodný prostor pro narušení žákovských stereotypů, které se při výuce matematiky často vyskytují a jsou pro další vývoj matematického myšlení žáků škodlivé.

Nestandardními úlohami tedy většinou rozumíme takové úlohy, jejichž řešení víceméně nezávisí na obvyklých a známých postupech užívaných ve školách. Nestandardní úlohy nám mohou pomoci ukázat žáků potřebnost matematiky, její využitelnost, rozvíjet logické a kombinatorické myšlení, které je do velké míry nezávislé na znalostech školské matematiky, dále mohou zvýšit zájem o matematiku nejen u nadaných žáků, ale i u těch slabších. Jedná se o úlohy, jejichž cílem je zvýšit nejen motivaci žáků, ale i zájem o matematiku, rozvíjet jejich myšlení a matematické schopnosti a v neposlední řadě obohatit výuku matematiky o zajímavé problémy.

Při řešení nestandardních úloh mohou však nastat problémy, které bych rozdělila do dvou bodů. Problémy související se schopností číst s porozuměním a dokázat odhalit vztahy mezi zadanými údaji. Druhý problém vidím v situaci, kdy žáci začnou úlohu odmítat z důvodu veliké obtížnosti. Je proto velmi důležité volit nestandardní úlohy podle věku, matematických znalostí a schopností žáků.

Neexistuje jednotná kategorizace nestandardních úloh, nicméně i na základě RVP si dovolím jistý seznam vytvořit.

- Slovní úlohy s antisignálem
- Úlohy zaměřené na logický úsudek
- Slovní úlohy kombinatorické povahy

- Kapitánské úlohy[2]
- Úlohy, ve kterých žáci vrací číselné údaje zpět do zadání.
- Slovní úlohy, kde žáci dotváří zadání (tzv. úlohy bez otázky)
- Úlohy „diofantovského“ typu
- Speciální typy složených slovních úloh [3]
- Sestavování úloh na základě obrázku, schématu
- Úlohy podporující prostorovou představivost
- Úlohy ve formě Concept Cartoons (Více viz Samková, 2020)
- Matematické úlohy řešící číselné a obrázkové pravidelnosti
- Matematická schémata (např. magické čtverce, sudoku, algebrogramy, …)
- Inverzně formulované matematické úlohy
- Úlohy rozvíjející prostorovou představivost

Ve svém příspěvku jsem se zaměřila především na nestandardní slovní úlohy, kterých se objevuje v českých učebnicích matematiky velmi málo.

Divíšek (1989) popisuje slovní úlohy následovně: „Slovní úlohou rozumíme obvykle úlohu z praxe, ve které je popsána určitá reálná situace, která vyúsťuje v problém. Předložený problém je možné řešit buď v realitě, nebo matematicky.“ (Divíšek, 1989, s. 123) Na slovní úlohy lze nahlížet jako na určité matematické úlohy zasazené do reálné situace.

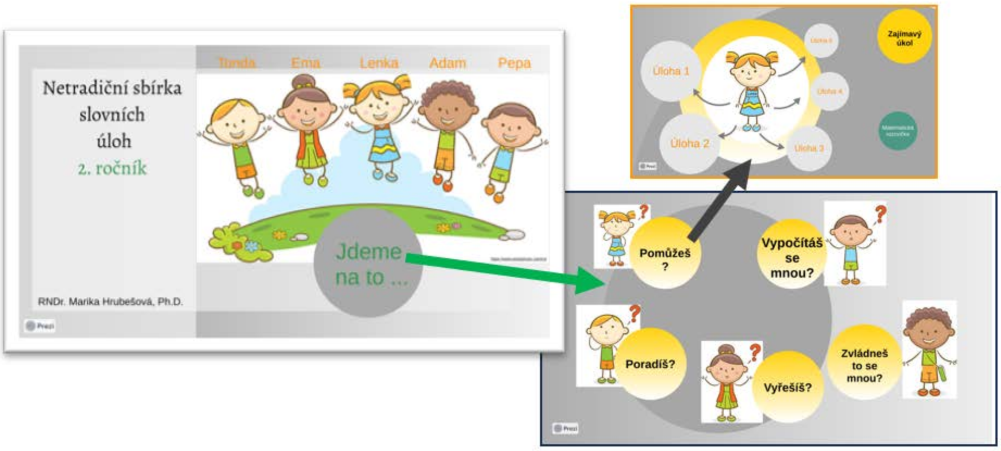
Vondrová a Rendl (2015) uvádějí, že v matematice existují tzv. kritická místa, což jsou oblasti, ve kterých žáci často a opakovaně selhávají. Jedná se o učivo, které žáci nezvládnou na takové úrovni, aby se jejich matematická gramotnost produktivně rozvíjela a také aby mohla být tvořivě užívána v každodenním životě. Během hloubkových rozhovorů s učiteli 1. stupně učitelé uvedli např. některé oblasti aritmetických operací, dále zmínili rýsování, zjišťování obvodu a obsahu, zaokrouhlovaní a v neposlední řadě byly zdůrazněny obtíže žáků v oblasti právě slovních úloh.

3 Sbírka úloh v Prezi

Na ukázku byla vytvořena sbírka slovních úloh pro žáky z druhého ročníku základní školy (viz obr. 1), v níž se vyskytují především nestandardní slovní úlohy. Pro další zatraktivnění a zpestření úloh byly do sbírky přidány i jiné netradiční úlohy. Celou sbírkou žáky provází 5 dětí, které žákům dané úlohy předkládají. Žáci tak mohou nabýt dojmu, že pomáhají dětem předložené úlohy řešit. Především se jedná o úlohy motivující, podporující logický úsudek a porozumění v matematice.

[2] Kapitánské úlohy jsou úlohy, ve kterých ze zadaných údajů není možné vypočítat nový údaj, protože informace v zadání jsou neúplné, nebo nemají s otázkou nic společného. Obvykle Jsou to úlohy nedourčené či přeurčené.

[3] Jedná se o úlohy, které je vhodné na 1. st. ZŠ řešit jen „osvědčeným způsobem“: Úlohy na sjednocení dvou množin s neprázdným průnikem, úlohy na zjištění dvou čísel z jejich součtu a rozdílu či z jejich součtu a podílu. (Divíšek, 1989)



Obrázek 2: Úvod sbírky úloh v Prezi.

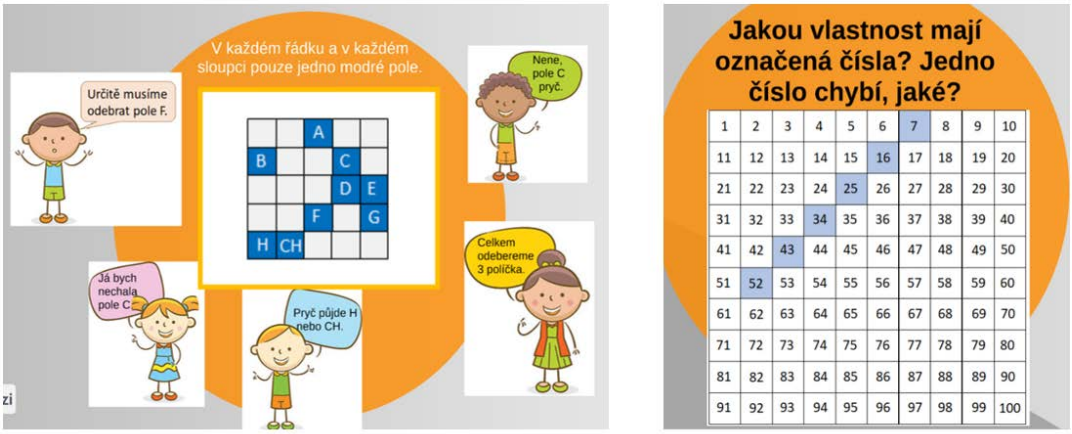
Typy úloh ve sbírce:

- Tvoření či dotváření zadání slovních úloh (k výpočtu, obrázku, tématu, číselným údajům, apod.)
- Problémové slovní úlohy (Problém je tvořen komplikovanou či nestandardní strukturou: slovní úlohy s antisignálem – porovnávání, dynamický model; slovní úlohy typu „Vrať čísla zpět“; přeurčené či nedourčené slovní úlohy; speciální typy složených slovních úloh – viz výše, slovní úlohy rozvíjející logické a kombinatorické myšlení.)

Obrázek 3: Ukázka nedourčené slovní úlohy (úloha vlevo) a úlohy typu „Vrať čísla zpět“.

- Úlohy rozvíjející prostorovou představivost.
- Matematické úlohy podporující porozumění v matematice, logický úsudek (Úlohy ve formě Concept Cartoons[4]; Stovková tabulka; inverzně formulované číselné úlohy; algebrogramy, …)

[4] Concept Cartoons jsou **obrázky situací** souvisejících s probíraným učivem a několika dětí, které prostřednictvím **bublinového rozhovoru** o situacích diskutují. (Samková, 2020)



Obrázek 4: Ukázka úlohy Concept Cartoons (vlevo) a úlohy s využitím stovkové tabulky.

Součástí sbírky je i tzv. matematická rozcvička, která má za cíl procvičit pamětné počítání. Se sbírkou se dá pracovat několika různými způsoby. Během hodin matematiky lze využít pouze jednu či dvě slovní úlohy z dané sbírky, na začátek hodiny lze využít pouze „matematickou rozcvičku“, na závěr vyučovací hodiny lze ukázat žákům „zajímavý úkol“ či lze sbírku použít jako několik příprav na hodinu s netradičními úlohami. Sbírku je možné díky prostředí Prezi obohatit o různé nápovědy, které žákům mohou pomoci při řešení úloh.

Se sbírkou se pracuje způsobem „poklikávání“ na bubliny. Nejprve je třeba dvakrát kliknout na bublinu „Jdeme na to“ a otevře se stránka s dětmi. V pravé části šipka „zpět“ slouží k vracení se zpět na předchozí stránku a ikona „domeček“ vrací sbírku na úvodní stránku. Při procházení sbírky je možné také využít šipek ve spodní části obrazovky.

Během řešení matematických úloh z dané sbírky se posilují následující kompetence:

- Kompetence k učení – rozcvičky slouží k posilování paměti, učí rychlé reakci a soustředění.
- Kompetence komunikativní – během řešení úloh žáci spolu komunikují, vysvětlují si dané řešení, popisují důvody chybného řešení, učí se přesně a srozumitelně se vyjadřovat, formulovat odpověď. Velmi vhodnými úlohami jsou úlohy ve formě Concept Cartoons.
- Kompetence sociální a personální – žáci mohou nad úlohami diskutovat ve skupině, při řešení úloh ve formě Concept Cartoons přijímají roli hodnotitele.
- Kompetence k řešení problémů je rozvíjena při zajímavých slovních úlohách, např. u úloh s antisignálem či úloh typu „Vrať čísla zpět“.
- Kompetence občanská – u matematických rozcviček je kladen důraz na morální stránku, hodnocení závisí na poctivosti žáků.
- Digitální kompetence – učitel a žáci pracují s digitálními technologiemi jako s didaktickými prostředky, které jim pomáhají dosáhnout nejrůznějších vzdělávacích (výukových) cílů.

Závěr

Popsaná sbírka netradičních matematických úloh může posloužit jako vhodný doplňkový materiál pro nejednoho učitele matematiky. Sbírku může využít každý učitel matematiky ve svých hodinách, stačí si zadat do internetového vyhledávače: Prezi, Hrubešová, sbírka slovních úloh.

Domnívám se, že pravidelné zařazování nestandardních úloh různého typu do matematického vyučování představuje vhodný a důležitý nástroj rozvoje osobnosti žáků.

Literatura:

[1] Divíšek, J. (1989). *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. Praha: SPN.

[2] Fuchs, E., Zelendová, E. (2015). *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělání.* Praha: NÚV, 2015, [cit. 2023-11-01]. Dostupné z: https://clanky.rvp.cz/clanek/c/Z/20617/METODICKE-KOMENTARE-K-OBORU-MATEMATIKA-A-JEJI-APLIKACE.html

[3] Hrkal, Marek. *Co je prezi*. Online. Dostupné z: http://odprezentuj.cz/blog/co-je-prezi/ [citováno 2023-11-14].

[4] Lišková, H., Rezek, P. (2015). *Tematický okruh Nestandardní aplikační úlohy a problémy.* In Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání. Praha: NÚV.

[5] *Prezi*. Online. Dostupné z: http://prezi.com [citováno 2023-11-14].

[6] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* Online. Praha: Ministerstvo školství a tělovýchovy, 2023 [cit. 2023-11-01]. Dostupné z: https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/

[7] Samková, L. (2020). *Metoda Concept Cartoons*. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta.

[8] Vondrová, N., Rendl, M. a kol (2015). *Kritická místa základní školy: Metodický portál pro učitele.* Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Marika Hrubešová
Pedagogická fakulta, Jihočeská Univerzita
Jeronýmova 10
České Budějovice
e-mail: mhrubesova@pf.jcu.cz

DIGITÁLNÍ KOMPETENCE PŘI VÝUCE MATEMATIKY NA ZÁKLADNÍ ŠKOLE

Miroslava Huclová

Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy,
Fakulta pedagogická, Západočeská univerzita v Plzni

Abstrakt: První část článku se zabývá změnou v systému kurikulárních dokumentů České republiky, zejména zaváděním nové klíčové kompetence – digitální kompetence – do školních vzdělávacích programů na základní škole. Digitální kompetence ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace jsou konkretizovány na jednotlivé činnosti žáka na 1. a 2. stupni základní školy. Teoretická část se zabývá i nastavenými nástroji a podmínkami školy pro naplňování uvedených kompetencí nejen v matematice. Druhá část článku uvádí konkrétní způsob výuky žáků 9. ročníku základní školy v tematickém okruhu Geometrie v rovině a v prostoru s využitím tradičních metod výuky a s využitím modelovacího software Thinkercad spojeného s 3D tiskem.

Klíčová slova: digitální kompetence, kurikulární dokumenty, RVP ZV – Rámcový vzdělávací plán pro základní vzdělávání), ŠVP – školní vzdělávací program, nová informatika, geometrie v rovině a v prostoru, školní informační systém, modelovací software Thinkercad, 3D tisk.

Digital competences in teaching mathematics at elementary school

Abstract: The first part of the article deals with the change in the system of curricular documents of the Czech Republic, in particular with the introduction of a new key competence – digital competence into school education programs at primary school. Digital competence in the educational field of Mathematics and its application are specified for the individual activities of the pupil in the 1st and 2nd grade of elementary school. The theoretical part also deals with the set tools and conditions of the school for the fulfillment of the mentioned competences not only in mathematics. The second part of the article presents a specific method of teaching pupils of the 9th year of elementary school in the thematic area of Geometry in a plane and in space using traditional teaching methods and using Thinkercad modeling software combined with 3D printing.

Key words: digital competence, curriculum documents, FEP BE – Framework educational program for basic education), SEPs– school educational programs, new informatics, geometry in the plane and space, school information system, Thinkercad modeling software, 3D printing.

Úvod

Opatřením ministra školství, mládeže a tělovýchovy se měnil systém kurikulárních dokumentů České republiky, zaváděla se nová klíčová kompetence – digitální kompetence. Každý pedagog se podílí ve svém vzdělávacím oboru na naplňování této kompetence. [1]

1 NAPLŇOVÁNÍ KLÍČOVÉ KOMPETENCE V ETAPĚ ZÁKLADNÍHO VZDĚLÁVÁNÍ Z POHLEDU KONKRÉTNÍ ŠKOLY

Následné odstavce popisují zavedení nové klíčové kompetence do života konkrétní základní školy od 1. do 9. ročníku. Je zde uveden důraz na digitální kompetence ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. Inspirativní jsou nastavené nástroje školy k naplňování digitálních kompetencí v základních tematických okruzích. Zároveň takto kapitola demonstruje práci všech pedagogů, která vede k naplňování ŠVP školy. Je zde uveden důraz na použité platformy, systém vzdělávání pedagogů a práci metodiků ICT. Neméně přínosný a inspirativní je popis výuky matematiky s využitím konkrétních aplikací a programů.

1.1 Digitální kompetence ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace

V etapě základního vzdělávání jsou za klíčové považovány: kompetence k učení; kompetence k řešení problémů; kompetence komunikativní; kompetence sociální a personální; kompetence občanské; kompetence pracovní; kompetence digitální. [5] Nová podoba RVP ZV přinesla podstatnou změnu. Každý vzdělávací obor musel do svých výchovných a vzdělávacích strategií pro rozvoj klíčových kompetencí zařadit novou kompetenci – digitální. Cíle v oblasti pěstování digitální kompetence mohou být rozpracovány např. následujícím způsobem. Digitální kompetence žáka na 1. stupni v matematice: rozlišuje obrazné symboly, rozumí jejich významu (značky, piktogramy, šipky), posuzuje úplnost dat s ohledem na řešený problém, dohledává chybějící informace potřebné k řešení úloh nebo situací v doporučených online zdrojích a ověřuje informace z více zdrojů, využívá digitálních technologií v situacích, kdy mu jejich použití usnadní činnost, používá kalkulátor při provádění odhadů a kontroly výpočtů. Digitální kompetence žáka na 2. stupni v matematice: používá digitální zařízení, aplikace a služby pro řešení úloh, porovnává využití tradičních a digitálních prostředků, diskutuje o nich, dokáže modelovat matematické situace a řešit matematické úlohy a problémy s využitím digitálních pomůcek, volí efektivní způsoby využití, má možnost a příležitost navrhovat vlastní statistická šetření, posuzovat získaná data, prezentovat své výsledky, zobecňovat, umí diskutovat o metodách a výsledcích své práce [6].

1.2 Nastavené nástroje naší školy pro naplňování digitálních kompetencí v matematice

Po stanovení výchovných a vzdělávacích strategií pro rozvoj klíčových kompetencí uvedená škola rozpracovala pro jednotlivé ročníky konkrétní výstupy v základních tematických okruzích (číslo a proměnná, závislosti, vztahy a práce s daty, geometrie v rovině a prostoru). Po úpravě ŠVP, na kterém pracovali ve škole pedagogové napříč ročníky a vedoucí předmětových komisí spolu s pedagogy daného předmětu, bylo nutné zvolit strategii k naplňování digitálních kompetencí žáka. Byla nutná podpora profesní kompetence učitelů. V této oblasti jim byli nápomocní metodici informačních a komunikačních technologií (dále ICT), kteří koordinovali nabídku vzdělávacích programů pro rozvoj digitálních kompetencí v matematice. Využívali zejména vzdělávací programy NPI (Národní pedagogický institut

České republiky). Jednalo se zejména o jejich projekt SYPO (Systém podpory profesního rozvoje učitelů a ředitelů). V lokalitě města byly využity nabídky seminářů a webinářů Centra robotiky. Sami metodici prováděli školení napříč všemi obory – zejména souboru cloudových služeb Microsoft 365 a školní informační systém Škola OnLine. Metodici ICT využili i zkušenosti z distanční výuky. V platformě Microsoft Teams má každá třída školy založen svůj Tým (IX. C). Vlastníci týmu jsou pedagogové, kteří ve třídě vyučují. Členové týmu jsou žáci třídy. Tým má své kanály s názvem předmětů (Matematika, Český jazyk…). Vznikl i dokument, kde každý ročník a vzdělávací obor má rozpracován plán naplňování digitálních kompetencí, využité programy, či aplikace. Doprovodný je i časový záznam po měsících tak, aby docházelo k efektivnímu zapojení žáků v průběhu celého roku. V neposlední řadě byla stanovena metodika pro efektivní využívání učeben tak, aby každý pedagog školy mohl využívat učebny s digitálním zařízením. K tomu byla využita sdílená tabulka v platformě SharePoint (Microsoft 365). Takto došlo k efektivnímu využití počítačových učeben, či mobilních učeben s iPady. Aktivně je využíván školní informační systém Škola OnLine. Zde pedagogové, žáci i zákonní zástupci nejen digitálně hodnotí, ale i komunikují, či analyzují výsledky vzdělávání.

Škola tak nastavila nástroje, které by měly efektivně zavést digitální kompetence do výuky napříč všemi vzdělávacími obory.

1.3 Výuka matematiky s využitím digitálních zařízení

Výuka ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace s využitím digitálních zařízení je nastavena ve škole v každém ročníku od 3. třídy. Žáci využívají počítačové učebny, nebo iPady v kmenových třídách. Každý žák ve škole má k dispozici svůj přístupový účet k doméně PLZEN/EDU, kterým se přihlašuje do školní počítačové sítě (zajišťuje Správa informačních technologií města Plzně), soubor cloudových služeb Microsoft 365, vlastní e-mail pro komunikaci. Současně mají žáci k dispozici školní informační systém Škola OnLine. Žáci jsou od 4. ročníku schopni využívat tyto platformy a aplikace při výuce. Na konci 5. ročníku žák s využitím digitálních technologií posoudí úplnost dat, vyhledává data, sestaví jednoduché tabulky a vytvoří jednoduchý graf. [6] Využívá platformu Excel, stránky Českého statistického úřadu, či dat v jiných zdrojích. Pro řešení praktických nebo slovních úloh a problémů využívá nástrojů operačního systému (kalkulačka), či aplikací na iPadu.

Na druhém stupni žáci pro tematický obor číslo a proměnná ve vhodné učební látce využívají platformy Excel, nástroje operačního systému (kalkulačka), CAS systémy (Microsoft Math Solver, Wolfram Alpha) a odpovídající aplikace. Pro tematický obor závislosti, vztahy a práce s daty využívají žáci tabulkové kalkulátory a data statistického úřadu, provádějí výpočty s využitím vzorců, třídí data podle jednoho, či více kritérií. Geometrie v rovině a v prostoru je pro rozvoj digitálních kompetencí vyučována s využitím dynamického matematického software Geogebra. S využitím tohoto nástroje řeší žák úlohy odpovídající ročníku. Geometrie v prostoru využívá modelovací software Thinkercad, či Sketchup včetně rozšíření 3D Waterhouse.

2 PRAKTICKÁ ČÁST VÝUKY

V praktické části je zaznamenán příklad dobré praxe s nastavenými nástroji z předchozí, teoretické kapitoly. Na výuce se podílela autorka článku. Časové dotace aktivit jsou uvedeny v následujícím textu jako inspirativní, stejně jako použité nástroje a metody práce, nastavení výuky a ostatní parametry.

2.1 Stanovené cíle

Cíle praktické části jsou v zaznamenání použitých metod výuky a jejich nástrojů. Tyto metody lze použít jako možný vzor k realizaci výuky s využitím digitálních zařízeních. Popisem činností obou skupin, které se podílely na realizaci, dává přehled o interakcích výuky v nastavený parametrech.

2.2 Podklady k výuce

Při výuce bylo postupováno následujícím způsobem:

- revize ŠVP ZV ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace, doplnění digitálních kompetencí;
- analýza situace na vybrané ZŠ – nastavení podmínek efektivního využití digitálních zařízení na konkrétní základní škole;
- výběr vhodných skupin pro výzkum:
  9. ročník (2022/2023) Skupina Dig – 35 žáků.
  9. ročník (2022/2023) Skupina Klasik – 41 žáků.
- výuka podle sestavené metodiky a výukových materiálů a pomůcek.
- analýza vypracovaného rysu pro obě skupiny;
- vyhodnocení.

Časová realizace: výuka probíhala v období školního roku 2022/2023.

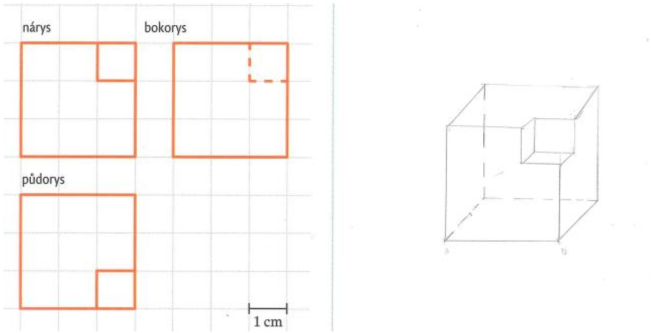
3 NASTAVENÍ A REALIZACE VÝUKY

3.1 Matematika a její aplikace – Geometrie v rovině a prostoru

Příklad dobré praxe se zaměřuje na učivo vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace z tematického okruhu Geometrie v rovině a v prostoru. Očekávaným výstupem žáka je sestrojení obrazu tělesa ve volném rovnoběžném promítání a narýsování tělesa v pravoúhlém promítání. Při rýsování dbá žák na druhy čar a kvalitu rýsování. Využije vhodné měřítko. Rozšiřujícím učivem je vypočítat objem a povrch tělesa. Pro rozvoj digitálních kompetencí žák vytváří model daného tělesa v modelovacím software. Těleso s využitím 3D tiskárny vytiskne.

3.2 Realizovaný způsob výuky pro obě skupiny, použité metody a nástroje

Výuka matematiky na uvedené škole probíhá v 9. ročníku v časové dotaci 5 hodin týdně (4 + 1). Jedna hodina je věnována rozšiřujícímu učivu (základy rýsování, volné rovnoběžné promítání, pravoúhlé promítání, konstrukční úlohy). [6] Tato hodina pro Skupinu Dig (žáci IX. B a IX. C) probíhala každé pondělí ve školním roce 2022/2023. Pro Skupinu Klasik probíhala v IX. A (úterý) a IX. D (středa). Znalosti a dovednosti a počet odučených hodin byl v této části pro obě skupiny stejný. Realizace začala po přijímacích zkouškách na SŠ (duben). Motivačním příkladem pro obě skupiny byly úlohy z pracovního sešitu Matematika s nadhledem 9, strana 123, 124/1. [8] V této úloze měli žáci zobrazená tělesa v pravoúhlém promítání (nárys, půdorys a bokorys). Rozměry tělesa byly určeny čtvercovou síti, kde 1 dílek odpovídal 1 cm. S využitím těchto informací žáci narýsovali do připraveného prostoru v pracovním sešitu tělesa ve volném rovnoběžném promítání. Tělesa (kvádr, jehlan, složené krychle a složené jehlany). Žáci rýsovali tělesa podle daných rozměrů. Využívali předchozích znalostí rýsování (pravidla rýsování, druhy čar, zobrazování těles ve volném rovnoběžném promítání a pravoúhlém promítání). Úlohu demonstruje obrázek 1.

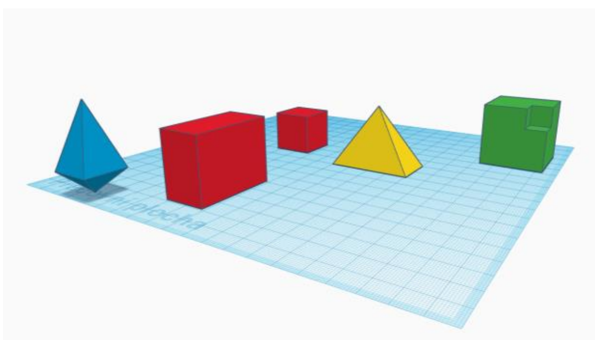


Obrázek 1: Práce žáka v pracovním sešitu

Žáci obou skupin provedli výpočet objemu a povrchu zadaných těles. Pro výpočet těles měli dostatečný matematický aparát. Numerické výpočty prováděli s pomocí kalkulačky. Časová dotace obou aktivit byla 2 vyučovací hodiny.

3.3 Výuka s využitím digitálních zařízení

Skupina Dig pokračovala ve výuce v počítačové učebně. Žáci využili pro modelování těles online 3D modelovací program Autodesk Tinkercad. Program pracuje ve webovém prohlížeči. Každá třída měla k dispozici svoji Třídu, každý žák byl ve Třídě jmenovitě uveden a měl k dispozici informace o přihlášení, včetně odkazu na Třídu. Odkaz měli žáci zaslán ve školním informačním systému Škola OnLine. Žáci v modelovacím programu pracovali poprvé. Vyučující v praktických ukázkách seznámil žáky s nástroji programu, ovládáním, exportem vytvořeného souboru. Následovala praktická práce žáků na tvorbě stejných těles, které žáci rýsovali v předchozích úkolech do pracovního sešitu Matematika s nadhledem 9. Tělesa měla stejné rozměry, které žáci museli dodržet. Pedagog využíval nabídky software Moje třídy a online sledoval práci jednotlivých žáků na obrazovce počítače. Mohl tak ihned reagovat na chyby, nevhodnou práci, či neplnění podmínek zadání. Po ukončení práce každý žák provedl Export návrhu do formátu pro 3D tisk (*.STL). Odevzdání souboru probíhalo na připravený sdílený disk ve formátu *prijemni.stl*. Samotný tisk návrhů probíhal na 3D tiskárně. Časová dotace pro uvedenou část byla 3 vyučovací hodiny. Prostředí programu a návrh žáka demonstruje obrázek 2, tištěná tělesa obrázek 3.



Obrázek 2: Práce žáka v programu Autodesk Tinkercad

Obrázek 3 Tělesa po tisku v 3D tiskárně

3.4 Ověření získaných znalostí a dovedností

Pro ověření získaných znalostí žáci vypracovali připravený kvíz v platformě Microsoft Forms. K prověření získaných dovedností měli žáci narýsovat jedno těleso na formát A4 v pravoúhlém promítání a v měřítku M 2 : 1. Těleso volili z těles, která rýsovali z pracovního sešitu Matematika s nadhledem 9, strana 123, 124/1. [8] Výkres měli doplnit kótovacími čárami a kótami. Uvedené úkoly byly zadány oběma skupinám současně. Časová dotace pro oba úkoly byly 2 vyučovací hodiny.

3.5 Formativní a sumativní hodnocení

Formativní hodnocení probíhalo průběžně během výuky. Žákům byla při práci na úkolech poskytována zpětná vazba v kontaktní výuce. Zejména v grafickém projevu byli upozorňováni na kvalitu rýsování. Sumativní hodnocení probíhalo po konci splněných úkolů v tomto rozsahu: Volné rovnoběžné promítání (práce v hodině [0.75]), Výpočet objemu a povrchu těles (práce v hodině [0.75]), 3D Modelování těles (práce v hodině [0.75]), Rys v pravoúhlém promítání (práce v hodině [0.75]). Váha všech známek byla jednotná. Hodnocení tak zaznamenalo souhrnné informace o znalostech a dovednostech žáků podle nastavených kritérií a v souladu s klasifikačním řádem školy. Hodnocení odpovídalo školnímu řádu a pravidlům pro hodnocení výsledků žáků. [2]

3.6 Zajímavé a inspirativní postřehy z výuky na základě rozhovorů

Žákům se názorná výuka líbila, ovládání programu a modelování bylo jednoduché. Moc cenili, že měli svoje přihlášení, modelovali svá tělesa. Program si vyzkoušeli i doma. Nejvíce je zaujalo odevzdání souboru (export dat do formátu *.STL, vložení na určené místo na disku) a zejména tisk jejich práce. Při rozhovoru prosili, zda by mohli jít ještě modelovat nějaká tělesa do počítačové učebny a zejména je vytisknout. Práce s 3D tiskem pro ně byla velmi zajímavá. Jako výhody výuky s využitím počítače vidí žáci názornost, jiný způsob výuky, více jim výuka dá, baví je. Mezi nevýhody uvádí nutnost pamatovat si hesla, stres z důvodu vytvoření modelu a jeho zaslání elektronickou cestou. Někteří uvádějí, že s využitím počítačů se může učit jen některé učivo.

4 ZÁVĚR

Výuka s využitím digitálních zařízení se stává dnes nedílnou součástí našeho vzdělávacího systému s cílem poskytnout žákům spolehlivý základ všeobecného vzdělání orientovaného zejména na situace blízké životu a na praktické jednání. Uvedený příklad dobré praxe přináší pro tento cíl zajímavý pohled na výuku s využitím digitálních zařízení v matematice. Zaznamenává celou metodiku výuky s využitím modelovacího software a 3D tiskárny v běžné základní škole. Nedílnou součástí je i pohled z pozice žáků.

Článek vznikl v rámci projektu GRAK č. 10/2023 „Integrace matematiky a dalších vzdělávacích oborů“.

Literatura:

[1] Opatření ministra školství, mládeže a tělovýchovy, kterým se mění Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, a to s účinností od 1. září 2023. *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy* [online]. [cit. 2023-09-01]. Dostupné z: https://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/ucebni-dokumenty

[2] Školní řád a pravidla pro hodnocení výsledků žáků. *31. základní škola* [online]. 1. 9. 2020 [cit. 2021-03-21]. Dostupné z: https://zs31.plzen.eu/dokumenty/skolni-rad/skolni-rad.aspx.

[3] Vašutová, J. *Profese učitele v českém vzdělávacím kontextu*. Brno: Paido, 2004. ISBN 80-315-082-4.

[4] Švaříček, R., Šeďová, K. *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách*. Praha: Portál, 2007. ISBN 978-80-7367-313-0.

[5] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. 1. Praha: MŠMT ČR, 2021 [cit. 2021-09-22]. Dostupné z: https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/

[6] Škola pro 21. století – ŠVP 31. základní školy. *31. základní škola* [online]. 1. 9. 2022 [cit. 2023-09-19]. https://zs31.plzen.eu/dokumenty/svp/skola-pro-21-stoleti-svp-31-zakladni-skoly.aspx.

[7] Hendl, J. *Kvalitativní výzkum: základní teorie, metody a aplikace*. Praha: Portál, 2008. ISBN 978-80-7367-485-4.

[8] Tlustý, P. a Huclová, M. *Matematika s nadhledem 9: pracovní sešit pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Nakladatelství Fraus, 2020. Škola s nadhledem. ISBN 978-80-7489-518-0.

[9] Zákon 563/2004 Sb., o pedagogických pracovnících a o změně některých zákonů, ve znění účinném od 1. 9. 2023 (školský zákon). In: *Sbírka zákonů*. Dostupné z: https://www.zakonyprolidi.cz/cs/2004-561?text=školský+zákon

[10] Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy a Národní pedagogický institut České republiky. *Revize RVP* [online]. 2023 [cit. 2023-09-25]. Dostupné z: https://revize.edu.cz/

Miroslava Huclová
ZČU v Plzni, FPE, KMT
Klatovská tř. 51
306 14 Plzeň
e-mail: huclovam@kmt.zcu.cz

ZAČÍNÁME SE STACKEM

Miriam Janíková, Zuzana Pátíková, Lubomír Sedláček

Fakulta aplikované informatiky, Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

Abstrakt: STACK je open source online hodnotící systém pro matematiku a předměty STEM. Je k dispozici mimo jiné jako nadstavba pro Moodle a má mnoho užitečných vlastností. STACK zprostředkovává propojení se systémem počítačové algebry Maxima, který vyhodnocuje matematickou správnost odpovědí. Cílem příspěvku je představit základní rysy prostředí STACK a sdílet zkušenost se začátky práce v něm pro potřeby podpory výuky matematiky na vysoké škole v systému Moodle.

Klíčová slova: Moodle, plugin STACK, hodnotící systém, generování příkladů.

Introduction to STACK

Abstract: STACK is an open source online assessment system for mathematics and STEM subjects. It is available as an add-on for Moodle, among others, and has many useful features. STACK provides a connection to the computer algebra system Maxima, which evaluates the mathematical correctness of the answers. The goal of the contribution is to present the basic features of the STACK environment and to share the experience of the beginnings of working in it for the needs of supporting the teaching of mathematics at a university in the Moodle system.

Key words: Moodle, STACK plugin, assessment system, tasks generating.

Úvod a výchozí stav

Při vyslovení slova COVID se každému z nás vybaví nelehké období izolace a obav o zdraví své i svých blízkých. Odhlédneme-li ale od zdravotního hlediska, jedna věc se tomuto období nedá odepřít. A to, že nás přinutilo velmi nesmlouvavým způsobem doslova ze dne na den změnit své pracovní návyky, začít používat nové technologie a pracovat zcela odlišným způsobem, než jsme byli zvyklí doposud. Mnohde byly přes noc do praxe uvedeny způsoby práce, o kterých se dlouhou dobu uvažovalo, ale z různých důvodů se k nim zatím nepřistoupilo. Nejinak to bylo i v případě využití Moodlu, konkrétně ve výuce matematiky na naší univerzitě.

Moodle byl do roku 2020 využíván především k předávání učebních materiálů studentům. Přes noc však bylo nutno přejít na online výuku a s tím spojené online provádění zkouškových testů. Protože je Moodle tomuto účelu obecně velmi dobře přizpůsoben, stačilo pouze naplnit banku úloh. Potíží se ukázal matematický charakter úloh. Zpočátku jsme jednotlivé příklady i odpovědi vkládali jako výstřižky z pdf a psaním prostého textu. Postupem jsme začali pro zápis matematiky využívat LaTeXovou sytaxi, která je Moodlem podporována. Variabilitu jsme však ve všech případech museli zajistit zvýšeným počtem připravovaných podobných příkladů.

Kromě příprav různých variant zadání testů bylo další oblastí, kde jsme chtěli využít možností systému Moodle, vyhodnocování správných odpovědí. Standardní výběr z několika možností má z pedagogického hlediska mnoho nevýhod, a proto jsme chtěli mít možnost zadávat i otevřené úlohy, které se vyhodnotí automaticky. V Moodlu existuje typ zadávané úlohy „vypočítávaná úloha“, ale její limit je v tom, že zvládne pouze dosazení do vzorce podobně jako kalkulačka. Zápis odpovědi pro porovnání se správným výsledkem musí být zapsaný formálně správně (pouze jako desetinné číslo a se správnou volbou oddělovníku desetinné části), což je podmínka přirozená, ale někdy obtížně dosažitelná.

V obou těchto oblastech (a nejen v nich) může velmi výrazným způsobem pomoct STACK. V tomto příspěvku vám jej chceme představit.

Základní informace o STACKu

STACK je nadstavba pro systémy Moodle a ILIAS, která umožňuje učitelům vytvářet a spravovat matematické úlohy s vysokým stupněm flexibilit. Jeho klíčové vlastnosti zahrnují automatické vyhodnocování, členění nápověd a zpětné vazby a schopnost generovat různé varianty úloh. Pro učitele matematiky to může být klíčový nástroj pro efektivní výuku a hodnocení. STACK zprostředkovává propojení se systémem počítačové algebry Maxima, který vyhodnocuje matematickou správnost odpovědí. Odpovědi lze zadat formálním matematickým zápisem, který je usnadněn tím, že uživatel dostává okamžitou zpětnou vazbu o tom, jak systém aktuální odpověď čte. STACK může generovat náhodné otázky, takže se studentům zobrazují různé varianty otázek, a může opakovat kvízy s novými variantami. Zpětná vazba na odpověď může být rozdělena na částečné kroky a do diferencovaných vláken reakcí a nápověd. Reakce na odpovědi tak mohou být podle potřeby individualizované.

Klíčovou osobou týmu, který STACK vyvinul a rozšířil jeho používání nejen v rámci projektové spolupráce, je Chris Sangwin z The University of Edinburgh [1, 2]. Informace o projektu a možném využití STACKu lze najít v publikaci o případových studiích [3]. Vzhledem k tomu, že využívané nástroje jsou součástí tzv. open source materiálů, kolem STACKu se vytvořila komunita uživatelů, kteří přispívají k jeho průběžnému zlepšování.

Hlavní rysy STACKu

Ekvivalentní zápisy

Díky podpoře počítačové algebry ve STACKu je možné v Moodlu zadávat úlohy, které mají matematickou symboliku nejen v zadání, ale i v odpovědích. Otázky tak nejsou omezeny na výběr z více možností. STACK může přijímat ekvivalentní výrazy a v závislosti na nastavení je může nebo naopak nesmí vyhodnotit jako správné. Například pro úlohu typu „nalezněte derivaci funkce“ může být v pořádku odpověď v různých ekvivalentních zápisech. Na druhou stranu, pokud má být výsledkem faktorizace výrazu v úloze „vytkni vše, co jde“, lze nastavit, aby STACK správně vyhodnotil pouze úplně provedenou faktorizaci. STACK je tedy navržen tak, aby umožnil učitelům specifikovat nezávislé vlastnosti požadované v odpovědi.

Sazba matematiky a grafů

Sazba matematiky v zadání využívá upravené LaTeXové syntaxe, která je při tvorbě matematických textů běžná. Velkou výhodou je, že přímo v zadání lze generovat grafy. K tomu poslouží Maxima nebo JSXGraph či Google Charts.

Zápis odpovědi

Pro zápis matematické odpovědi uživatel musí mít základní znalosti o tom, jak běžně pracovat s matematickou symbolikou v počítači. V průběhu zápisu systém dává okamžitou zpětnou vazbu o tom, jak odpověď vidí. Před vyhodnocením odpovědí uživatel potvrdí, že jejich odpověď byla systémem správně interpretována. Neplatné odpovědi, například s neodpovídajícími závorkami, jsou odmítnuty. Tento rys je dobrý v tom, že uživatelé nejsou penalizováni za překlepy v odpovědi.

Uvedení příkladu

Díky robustnosti podpůrného algebraického systému je možné zadávat úlohy z nejrůznějších oblastí a také v různém znění. Není potřeba se omezit na „výpočet odpovědi“, ale lze pracovat například i s uváděním příkladů požadovaných vlastností. Uživatel může být vyzván třeba aby uvedl příklad sudé/liché funkce, aby uvedl příklad funkce $f(x)$ s minimem v $x = 0$ a maximem v $x = 2$, nebo aby zadal příklad čtyřmístného čísla dělitelného dvanácti. V tomto případě systém neporovná odpověď studenta s odpovědí učitele, ale zkontroluje, zda má odpověď požadované vlastnosti. Uvádění příkladů je dovednost vyššího řádu, která zatím nebývá ve vzdělávacích systémech standardně zabudovaná.

Randomizace

Jednou ze silných stránek STACKu je jeho schopnost generovat různé příklady tím, že mění hodnoty parametrů. Učitelé mohou definovat rozsah hodnot pro tyto parametry a tím vytvářet mnoho různých úloh, přičemž každá zůstává založena na stejném matematickém konceptu. Náhodné otázky jsou neocenitelné pro procvičování a při formálním zkoušení pro omezování sdílení odpovědí. Nastavení rozsahu hodnot pro parametry umožňuje generovat náhodné hodnoty při každém zadání úlohy. To vytváří podobné úlohy s různými čísly nebo hodnotami. Skupinu podobných otázek lze vygenerovat v žádaném počtu a organizovat je v bance úloh podle potřeby.

Zpětná vazba

K diferencování reakcí na odpovědi je ve STACKu možné nastavit strom zpětné vazby (feedback tree), který umožňuje vytvořit strukturovanou a flexibilní zpětnou a také přidělit část bodů za neúplné či částečně správné řešení. Nastavení stromu zpětné vazby vyžaduje přípravu možných situací, pozornost a pečlivou konfiguraci. Je možné vytvořit komplexní vícestupňové stromy zpětné vazby, které se přizpůsobují různým situacím a umožňují studentům lépe porozumět svým chybám. Strom zpětné vazby se skládá z několika úrovní (uzlů), které reprezentují různé možné situace a odpovědi studentů. Pro každý uzel lze vytvořit reakci, která má být studentům zobrazena, pokud se situace shoduje s tímto uzlem. Zpětnou vazbu je možné psát v textovém formátu a lze do ní zahrnout různé informace, vysvětlení nebo další kroky.

Vícedílné otázky

STACK podporuje vícedílné otázky, například a) spočítej derivaci funkce, b) vypočítej funkční hodnotu této derivace v bodě. V případě chybně vyřešené první části, ale při správném dosazení do chybné odpovědi a), STACK dokáže vyhodnotit odpověď b) jako správnou, i když se reálně odpověď od „správné“ odpovědi liší.

Flexibilita

STACK umožňuje zadávat a vyhodnocovat úlohy pro nejrůznější oblasti matematiky (výrazy, rovnice, nerovnice, grafy, důkazy, matice, diferenciální rovnice, kombinatorika, řady, statistika, aj.) ale i dalších věd.

První zkušenost

Výhody, které STACK nabízí, nás motivovaly k prvnímu sbírání zkušeností s tímto pluginem. Jedním slovem se tato zkušenost dá shrnout jako „náročná“. Používání pluginu v Moodlu není nijak intuitivní a určitě není vhodné pro úplné začátečníky. Je dobré mít alespoň uživatelskou zkušenost s Moodlem, LaTeXem a ideálně i nějakým výpočetním systémem (např. Maxima, Maple, Wolfram Mathematica). Programátorské schopnosti (znalost Pythonu, nebo alespoň základní přehled) jsou též velmi vítané. Pro zaučení většího kolektivu kolegů je potřeba organizované proškolení. K individuálnímu základnímu seznámení s prostředím lze využít webovou stránku STACKu [4] a Youtube kanál STACK Online Assessment [5]. Další možností, jak si usnadnit práci na začátku využívání STACKu, je najít a přidat si do testovacího kurzu volně šiřitelné banky úloh jiných uživatelů. V nich lze nalézt nejrůznější druhy úloh, které je jednodušší modifikovat a adaptovat než vytvářet od nuly.

Zadání úloh a některé reakce zpětné vazby je možné samozřejmě psát česky, ale některé automatické reakce systému jsou anglicky. Zatím nevíme, jestli a jak lze převést do češtiny vše.

Jedním z rysů, které nás vedly k používání STACku, je možnost větvení zpětné vazby. Příprava stromu je náročná z více hledisek. Prvním a přirozeným, je mít dobře rozmyšleno větvení situací a reakcí na ně. Náročnost tohoto hlediska je pedagogicko-didaktická. Druhou perspektivou náročnosti je práce ve vnitřní struktuře tvorby STACK otázky, která je uživatelsky náročná a jejíž plynulé užívání vyžaduje automatizovanou zkušenost.

Před zahájením práce s pluginem je potřeba provést instalaci STACKu společně s instalací Maximy. Potenciální nevýhodou kombinace těchto dvou produktů je nutnost udržovat oba v aktualizovaném stavu. Pro tuto práci je vhodné mít zodpovědného pracovníka.

Závěr

Celkově je plugin STACK mocným nástrojem pro tvorbu matematických otázek a testů v Moodle, ale vyžaduje určitou dobu a úsilí na jeho pochopení a efektivní použití. Výhody automatického hodnocení a flexibility vytváření různých typů otázek však přináší výraznou přidanou hodnotu pro učitele a studenty v matematických kurzech.

Literatura:

[1] Sangwin, C. J.: *Computer Aided Assessment of Mathematics*, Oxford University Press, 2013.

[2] Sangwin C. J., Kocher N.: *Automation of mathematics examinations*. Computers and Education, 94:215-227, 2016.

[3] Sangwin, C. J., Sporring, M.: *STACK Online Assessment: A collection of case studies* (project booklet), The University of Edinburgh, 2019.

[4] https://stack-assessment.org/.

[5] Youtube kanál: STACK Online Assessment, https://www.youtube.com/@stackonlineassessment8119.

Miriam Janíková
Fakulta aplikované informatiky
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Nad Stráněmi 4511, Zlín 76005
e-mail: mjanikova@utb.cz

Zuzana Pátíková
Fakulta aplikované informatiky
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Nad Stráněmi 4511, Zlín 76005
e-mail: patikova@utb.cz

Lubomír Sedláček
Fakulta aplikované informatiky
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Nad Stráněmi 4511, Zlín 76005
e-mail: lsedlacek@utb.cz

BÁDÁNÍ V ROBOTICE

Patrik Klofáč

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta

Abstrakt: V tomto příspěvku je představena sada robotických úloh, které jsou zaměřeny na rozvíjení informatického myšlení badatelským způsobem. Na praktických příkladech je demonstrována struktura tvorby robotických úloh a jsou prezentována různá zjištění a doporučení pro takto koncipovanou výuku. Navržené výukové materiály poskytují vyučujícím podporu pro efektivní řízení badatelské výuky, umožňující jim zaměřit se na správné vedení žáků. Je poukázáno na to, jak badatelsky orientovaná výuka robotiky otevírá cesty objevování pro žáky a přispívá k rozvoji jejich dovedností.

Klíčová slova: Robotika, badatelsky orientovaná výuka, informatika.

Inquiry in robotics

Abstract: In this paper, we present a set of robotic tasks aimed at developing computational thinking in an exploratory way. Using practical examples to illustrate various findings and recommendations for such a teaching approach. The proposed teaching materials provide support for teachers to effectively manage inquiry-based learning, in such a way that teachers can focus on guiding students correctly. We want to highlight how inquiry-based learning opens up avenues of discovery and contributes to the development of pupils' skills.

Key words: Robotics, inquiry-based learning, informatics.

Článek je publikován v časopise *South Bohemia Mathematical Letters*, Vol. 31 (2023), No. 1

Dostupné z: https://home.pf.jcu.cz/~sbml

MNOŽINY BODŮ DANÉ VLASTNOSTI – VYUŽITÍ DIGITÁLNÍCH TECHNOLOGIÍ

Soňa Königsmarková

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích,
Pedagogická fakulta, Katedra matematiky

Abstrakt: Množiny bodů dané vlastnosti patří k obtížným tématům školské matematiky. Při řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti je pro studenty obtížné sestavit soustavu rovnic, poté ji upravit, odstranit určité proměnné a určit, o jaký množinu bodů se jedná. S řešením těchto úloh může pomoci počítačový software, například GeoGebra. Program GeoGebra pomáhá s eliminací proměnných a také ukáže studentům množinu všech řešení. Eliminace v GeoGebře je založena na teorii Gröbnerových bází.

Klíčová slova: Množiny bodů dané vlastnosti, soustava rovnic, GeoGebra, Gröbnerovy báze.

Loci of a given property – use of digital technologies

Abstract: Loci of a given property belong to the difficult topics in school mathematics. For students is very difficult to construct the set of equations, then modify the system of equations, eliminate certain unknowns and determine what kind of the locus it is. With the solution of these can help computer software, for example with GeoGebra. The program GeoGebra helps with eliminating variables and also shows students the set of all solutions. Elimination in GeoGebra is based on the theory of Gröbner bases.

Key words: Loci of a given property, system of equations, GeoGebra, Gröbner bases.

Úvod

Téma množiny bodů dané vlastnosti patří mezi obtížná témata ve školské matematice. Řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti je efektivní s využitím počítače, např. použitím softwaru GeoGebra. Při řešení úloh je nejtěžší sestavit rovnice, pak upravit soustavu rovnic, eliminovat určité neznámé a poznat, jaká je to křivka. S vyřešením soustavy rovnic a s určením, o jakou křivku se jedná může pomoci např. program GeoGebra. Studenti mohou s jeho pomocí experimentovat a seznamovat se s novými křivkami.

Program GeoGebra pomůže:

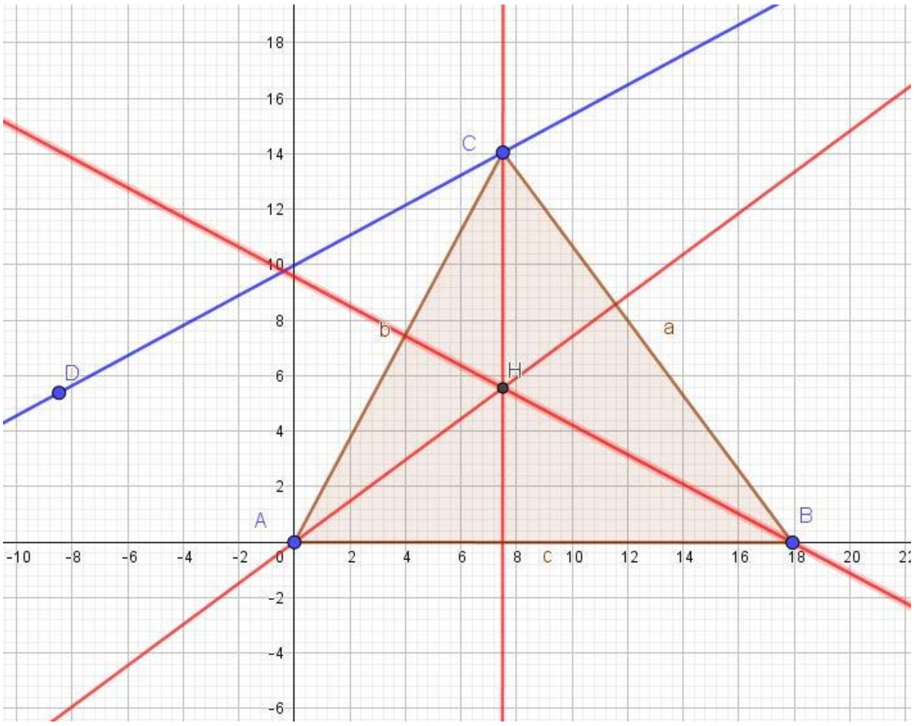
- s eliminací proměnných,
- ukázat množinu všech řešení.

Aplikace teorie eliminace

Eliminace v GeoGebře je založena na použití moderních metod řešení – Gröbnerových bází. Cílem této metody je získat soustavu rovnic, která bude ekvivalentní s danou soustavou, ale bude se snáze řešit. Princip je podobný jako u Gaussovy eliminační metody – úprava na trojúhelníkový tvar. Poslední rovnice často obsahuje jen jednu proměnnou.

Ukážeme nějaké příklady na využití teorie eliminace.

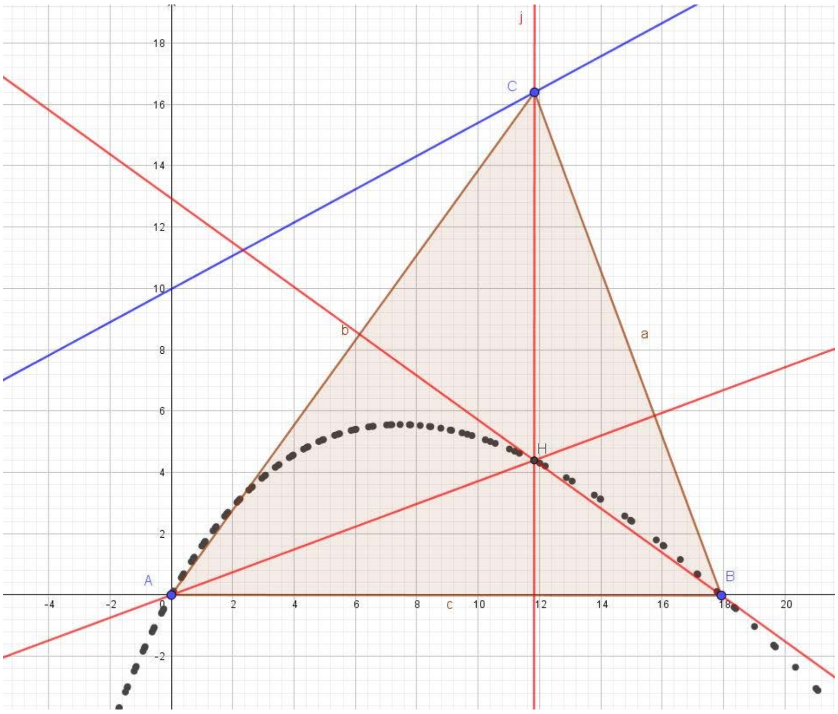
Příklad 1: *Je dána úsečka AB a přímka p. Určete množinu průsečíků výšek H trojúhelníku ABC, jestliže se bod C pohybuje po dané přímce p.*



Obrázek 1: Zadání příkladu 1

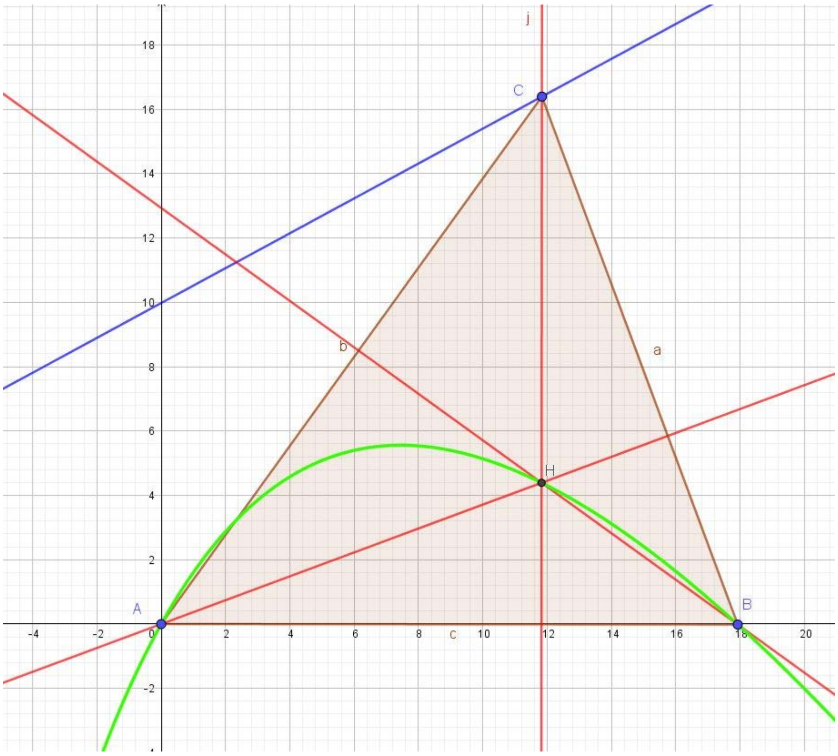
Řešení:

1. Zjistíme množinu bodů pomocí příkazu Stopa v GeoGebře. To nám napoví, o jakou množinu by se mohlo jednat.



Obrázek 2: Množina bodů – Stopa, příklad 1

2. Lze použít i příkaz Locus v GeoGebře (také napoví, o jakou množinu bodů se jedná).



Obrázek 3: Množina bodů – Locus, příklad 1

Vypadá to, že hledanou množinou je parabola. Nemůžeme to ale říci, mohla by to být hyperbola, ale může to být i úplně jiná množina bodů.

Provedeme výpočet:

3. Sestavíme rovnice. Zavedeme soustavu souřadnic.

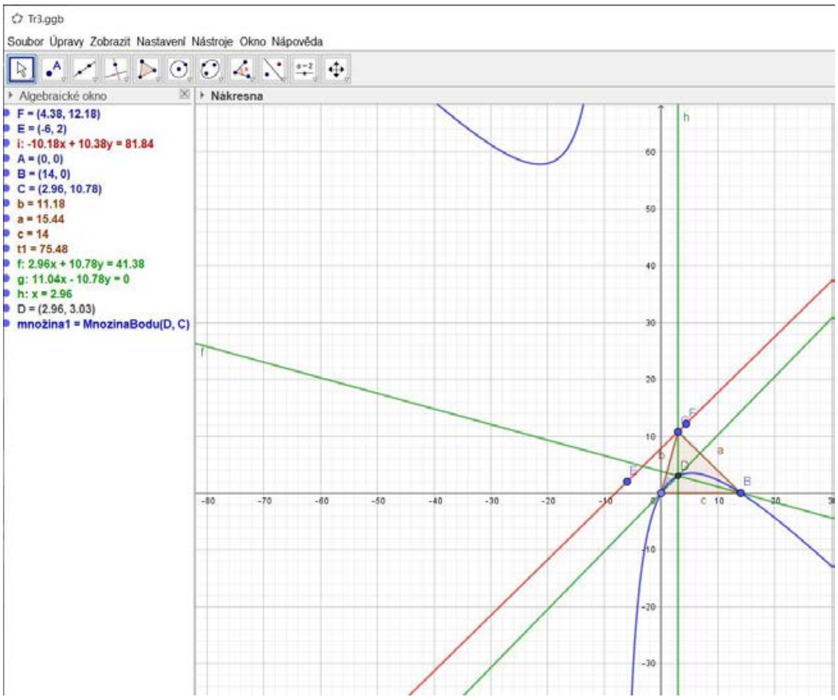
Zvolíme $A = [0, 0], B = [a, 0], C = [u, v], H = [p\ , q]$.

$$\begin{aligned} HC \perp AB\colon\quad p - u &= 0 \\ HA \perp BC\colon\quad p(u - a) + qv &= 0 \\ C \in p\colon\quad ku + lv + m &= 0 \\ v &= -\frac{k}{l}u - \frac{m}{l} \end{aligned}$$

Eliminujeme u, v.

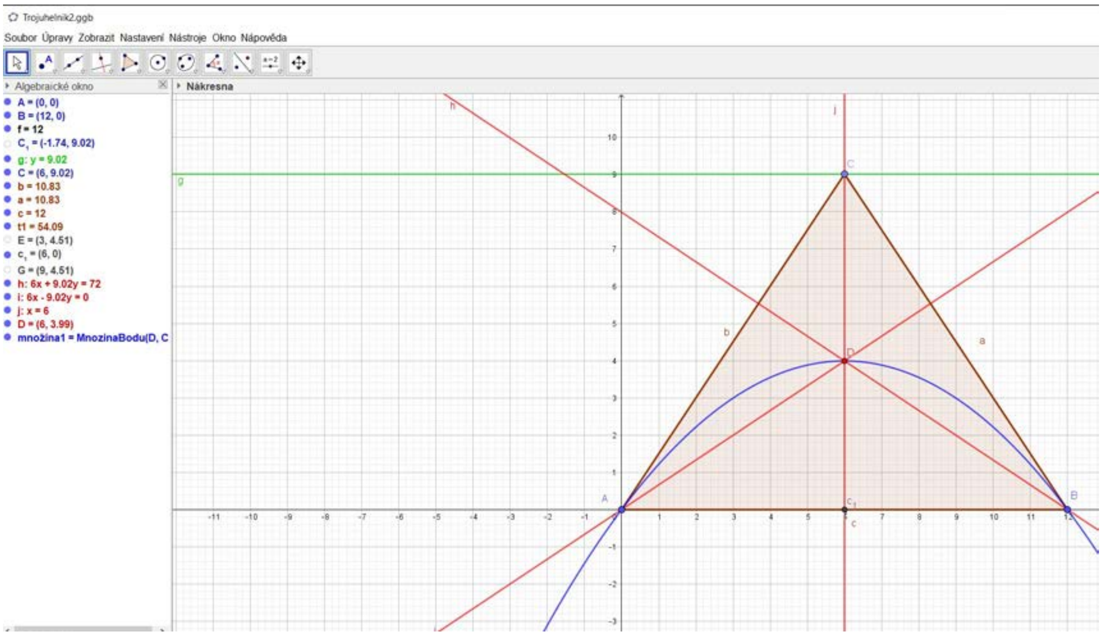
$$\begin{aligned} p &= u \\ p(p - a) + qv &= 0 \\ p(p - a) + q\left(-\frac{k}{l}\,u\ -\ \frac{m}{l}\right) &= 0 \\ lp^2 - lpa - kpq - mq &= 0 \end{aligned}$$

Dostali jsme polynomiální rovnici 2. stupně. Z teorie kuželoseček plyne, že se jedná o **hyperbolu**.



Obrázek 4: Hyperbola

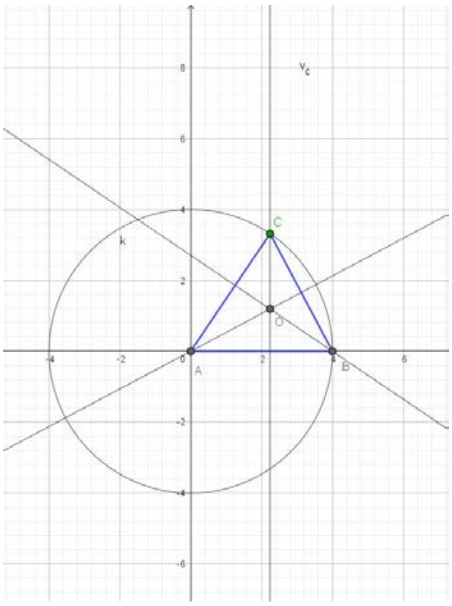
Pokud je přímka rovnoběžná s přímkou $AB \Rightarrow v = -\frac{m}{l}$ dostaneme rovnici $lp^2 - lpa - qm = 0$. Jedná se o **parabolu**.



Obrázek 5: Parabola

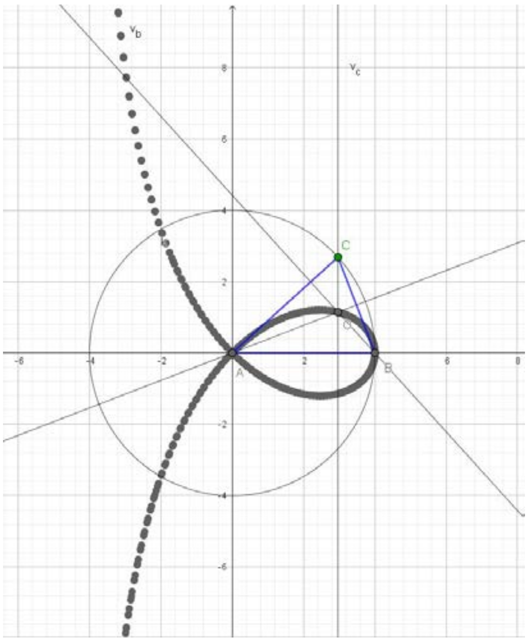
Závěr: Zde se ukazuje, jak je důležitá rovnice množiny bodů. Bez ní nejsme schopni určit, o jakou množinu bodů se jedná. Při využití GeoGebry není hned jasné, že se jedná o hyperbolu, je dobře vidět jen jedna větev hyperboly.

Příklad 2: *Je dána úsečka AB a bod C, který leží na kružnici k se středem v bodě A a poloměrem AB. Určete množinu průsečíků výšek H trojúhelníku ABC, pohybuje-li se bod C po kružnici.*



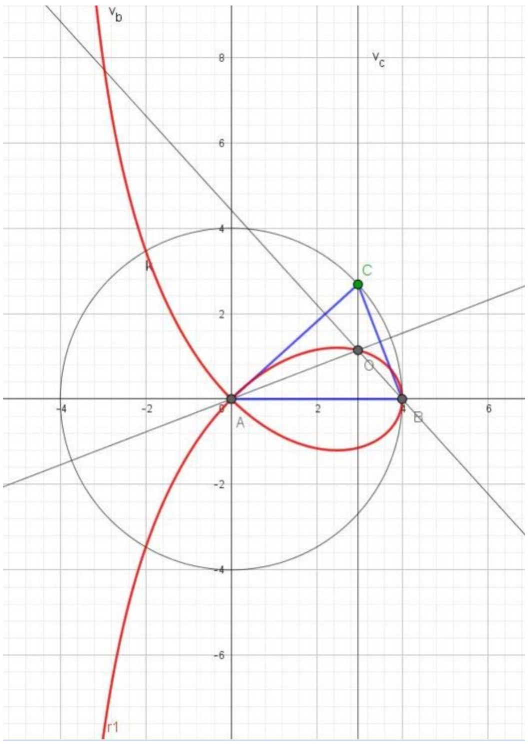
Obrázek 10: Zadání příkladu 2

Řešení:
Zjistíme množinu bodů pomocí příkazu Stopa v GeoGebře.



Obrázek 11: Množina bodů – Stopa, příklad 2

Použijeme příkaz Locus v GeoGebře (the tracer H, the mover C), ukáže nám množinu bodů a tím nám napoví, jak příklad řešit.



Obrázek 12: Množina bodů – Locus, příklad 2

Ruční výpočet:
Trojúhelník umístíme do soustavy souřadnic tak, *že* $A = [0,0], B = [a,0], C = [u,v]$. Bod $O = [p,q]$. Kružnice k má tedy rovnici $x^2 + y^2 = a^2$. Bod $C \in k: u^2 + v^2 - a^2 = 0$.

1. způsob

Výšky trojúhelníku mají rovnice:

$$v_a: (u-a)x + vy = 0$$
$$v_b: ux + vy - ua = 0$$

Bod $O = [p,q]$ leží na výškách:

$$O \in v_a: (u-a)p + vq = 0$$
$$O \in v_b: up + vq - ua = 0$$

Získáme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 - a^2 &= 0 \\ (u-a)p + vq &= 0 \\ up + vq - ua &= 0 \end{aligned}$$

Bod $C = [u,v]$ je pohyblivý bod, proto ze soustavy eliminujeme proměnné u, v, a tím dostaneme rovnici množiny bodů. Eliminace proměnných u, v vyžaduje hodně matematických úprav. Pomocí GeoGebry bychom proměnné snadno eliminovali pomocí funkce *Eliminovat* (u, v).

Ze soustavy eliminujeme ručně proměnné *u, v*.

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 - a^2 &= 0 \\ up - ap + vq &= 0 \\ up + vq - ua &= 0 \end{aligned}$$

Ze druhé rovnice vyjádříme $u = \frac{ap-vq}{p}$ a dosadíme do 1. a 3. rovnice:

$$\begin{aligned} \left(\frac{ap-vq}{p}\right)^2 + v^2 - a^2 &= 0 \\ \frac{ap-vq}{p} \cdot p + vq - \frac{ap-vq}{p} \cdot a &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a^2p^2 - 2apv\,q + v^2q^2}{p^2} + v^2 - a^2 &= 0 \\ ap - vq + vq - \frac{a^2p - v\,qa}{p} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2p^2 - 2\mathrm{a\,pv\,q} + \mathrm{v}^2q^2 + \mathrm{v}^2p^2 - \mathrm{a}^2p^2 &= 0 \\ ap^2 - v\,qp + v\,qp - a^2p + v\,qa &= 0 \end{aligned}$$

Z druhé rovnice po úpravě $ap^2 - a^2p + v\,qa = 0$ vyjádříme $v = \frac{a^2p - ap^2}{qa}$ a dosadíme do 1. rovnice:

$$a^2p^2 - 2a\,p\left(\frac{a^2p - ap^2}{qa}\right)q + \left(\frac{a^2p - ap^2}{qa}\right)^2 q^2 + \left(\frac{a^2p - ap^2}{qa}\right)^2 p^2 - a^2p^2 = 0$$

$$-2p(a^2p - a\,p^2) + \frac{a^4p^2 - 2a^2pa\,p^2 + a^2p^4}{a^2} + \frac{a^4p^2 - 2a^2pa\,p^2 + a^2p^4}{q^2\,a^2} \cdot p^2 = 0$$

$$-2a^2q^2p(a^2p-ap^2)+q^2a^4p^2-2a^3p^3q^2+a^2p^4q^2+a^4p^4-2a^3p^5+a^2p^6=0$$
$$-2a^4p^2q^2+2a^3p^3q^2+q^2a^4p^2-2a^3p^3q^2+a^2p^4q^2+a^4p^4-2a^3p^5+a^2p^6=0$$
$$-a^4p^2q^2+a^2p^4q^2+a^4p^4-2a^3p^5+a^2p^6=0\ /{:}a^2p^2$$
$$-a^2q^2+p^2q^2+a^2p^2-2ap^3+p^4=0$$

Tato rovnice je rovnicí hledané křivky. Rovnici se budeme snažit dále upravit. V tomto okamžiku nám také může pomoci GeoGebra.

$$-a^2q^2+p^2q^2+a^2p^2-ap^3-ap^3+p^4=0$$
$$p(p^3+pq^2-ap^2)-a(p^3+aq^2-ap^2)\ =0$$

Přičteme a odečteme člen apq^2 a dostaneme:

$$p(p^3+pq^2-ap^2+aq^2)-a(p^3+pq^2-ap^2+aq^2)\ =0$$
$$(p-a)\cdot(p^3+pq^2-ap^2+aq^2)=0$$
$$(p-a)\cdot[p(p^2-q^2)-a\,(p^2-q^2)]=0$$
$$p^2(p^2+q^2)-ap(p^2+q^2)-ap(p^2-q^2)+a^2(p^2-q^2)=0$$
$$(p^2+q^2)(p^2-ap)-(p^2-q^2)(ap-a^2)=0$$
$$(p^2+q^2)\cdot p(p-a)-(p^2-q^2)\ \cdot a(p-a)=0$$
$$p(p^2+q^2)-a(p^2-q^2)=0$$

2. způsob

Soustava rovnic pro neznámé p, q s parametry u, v .
$O \in v_a \ \Rightarrow\ (u-a)p+vq=0$
$O \in v_c \ \Rightarrow\ p=u$
$C \in k \ \Rightarrow\ u^2+v^2=a^2$ … podmínka pro parametry u, v

Eliminace parametrů u, v .

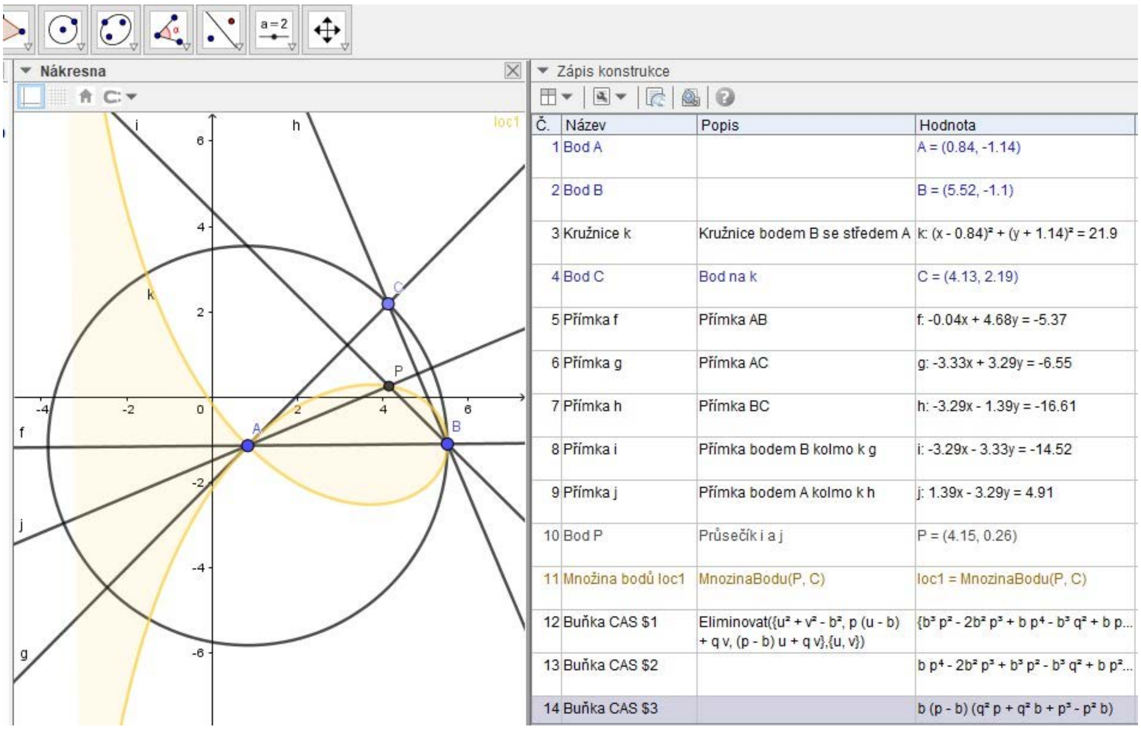
Eliminace u :

$u=p$ dosadíme do 1. a 3. rovnice.

Eliminace v :

$(p-a)p=\ -vq\ |^2,$
$p^2+v^2=a^2 \Rightarrow v^2=a^2-p^2,$
$(p-a)^2p^2=v^2q^2,$
$(p-a)^2p^2=(a^2-p^2)q^2,$
$(p-a)^2p^2+(p^2-a^2)q^2=0 \mid :\ (p-a)\neq 0,$
$(p-a)p^2+(p+a)q^2=0\ \Leftrightarrow\ p(p^2+q^2)-a(p^2-q^2)=0.$

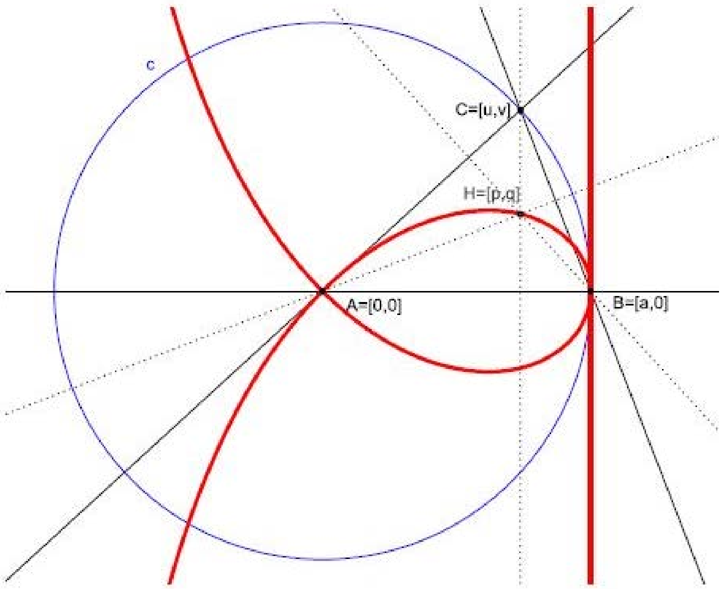
Tuto rovnici napíšeme do GeoGebry a zjistíme, jak křivka vypadá. Jedná se o **strofoidu**.



Obrázek 13: Strofoida, příklad 2

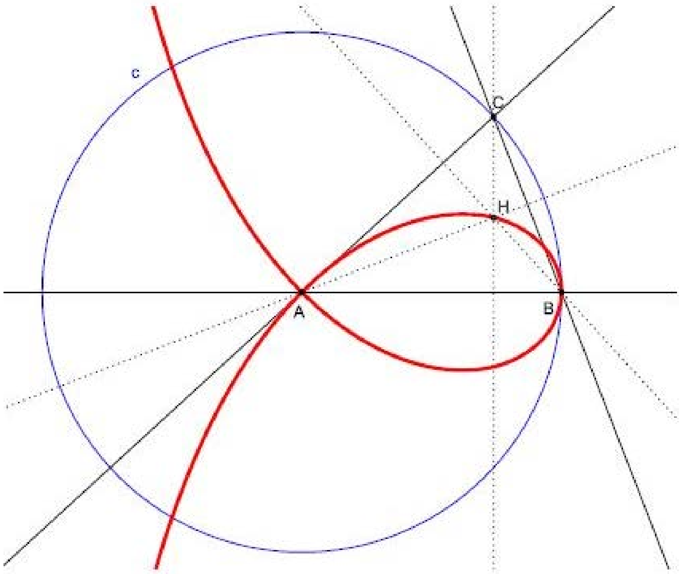
Za použití příkazu Elim v GeoGebře

Dostaneme rovnici 4. stupně, dáme faktorizovat a dostaneme lineární a kubickou rovnici. Lineární rovnice reprezentuje **přímku** a kubická rovnice je **rovnicí strofoidy**.



Obrázek 14: Strofoida a přímka, příklad 2

Problém nastává, když C dojde do B, tedy když přímka BC není definována, tj. když $u = a$, $v = 0$, potom systém $h_1 = 0$, $h_2 = 0$, $h_3 = 0$ přechází v rovnici $p - a = 0$, která reprezentuje přímku. Pokud tedy nechceme tuto přímku, musíme přidat podmínku $B \neq C$. Pak eliminujeme u, v, t. Dostaneme **rovnici strofoidy** $p^3 - ap^2 + aq^2 + pq^2 = 0$.



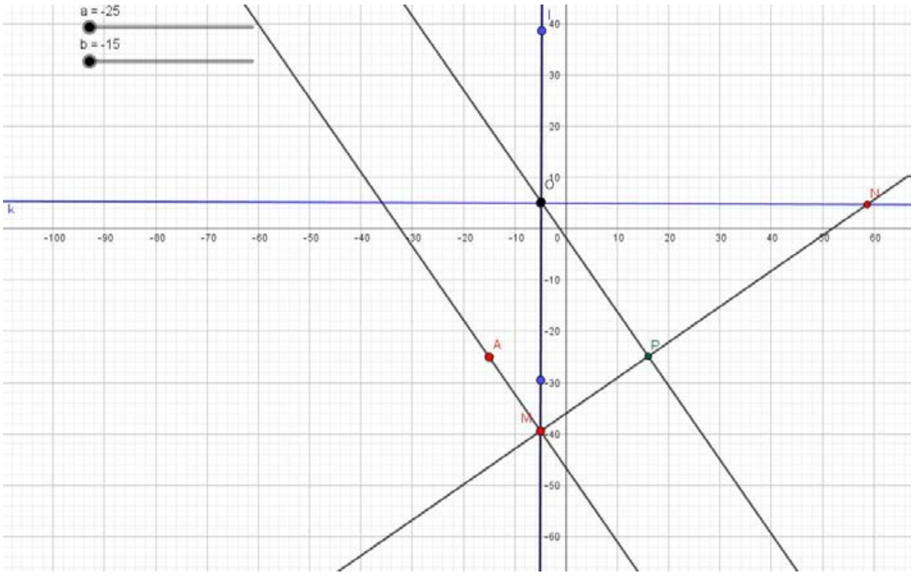
Obrázek 15: Strofoida, příklad 2

Závěr: Při eliminaci proměnných můžeme získat polynomiální rovnici, která ale nereprezentuje křivku.

Příkaz Locus – počítač řeší numericky, tedy každému bodu na ose x přiřadí y, pokud se dostane do $B = C$, bodu na ose x by přiřadil nekonečně mnoho bodů – tuto možnost počítač vyloučí, proto se neobjeví přímka.

Poznámka. Křivku strofoidy jako první popsal ve svých dopisech italský matematik a fyzik Evangelista Torricelli kolem roku 1645. Znovu ji objevil anglický matematik Isaac Barrow ve své práci z roku 1670. Název strofoida z latinského „strophos" („kroucený pás") pochází až z roku 1848.

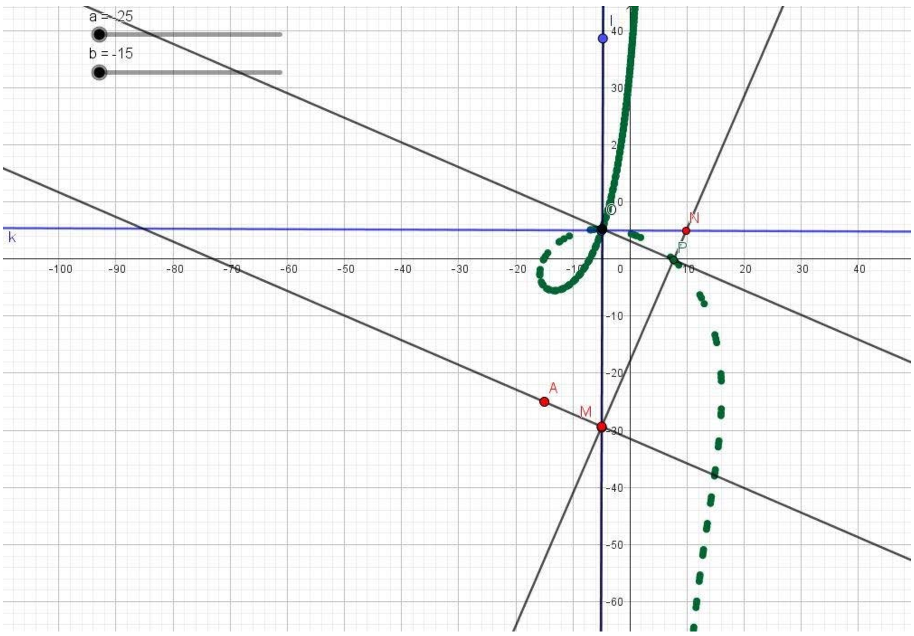
Příklad 3: *Jsou dány dvě na sebe kolmé přímky k, l, bod O je jejich průsečík. Bod A leží ve vzdálenosti b od přímky k a ve vzdálenosti a od přímky l. Pro libovolný bod M ležící na l sestrojme bod N na k tak, že MN je kolmá na AM. Určete množinu všech bodů paty kolmic P, sestrojené z O na MN, pokud se bod M pohybuje po přímce l.*



Obrázek 16: Zadání příkladu 3

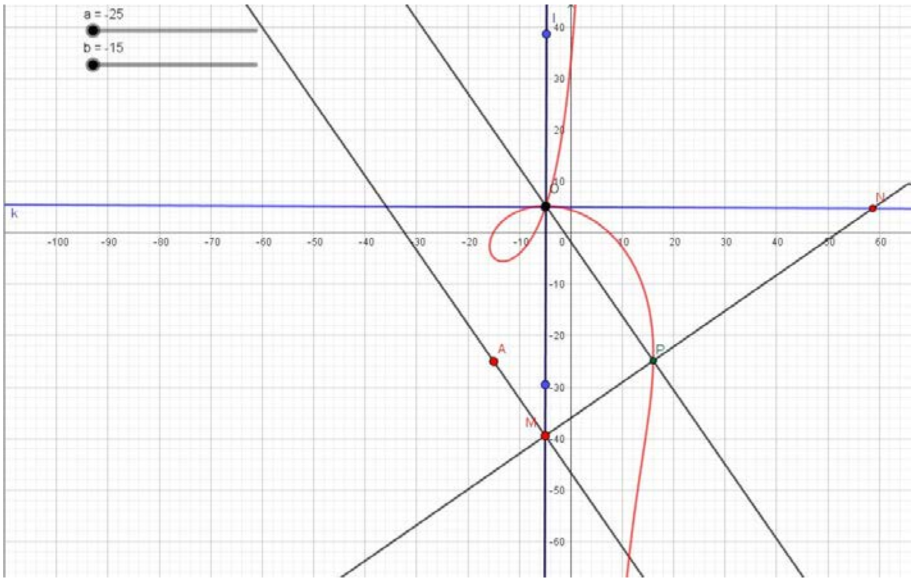
Řešení:

Nejprve zkusíme příkaz Stopa v GeoGebře.



Obrázek 17: Množina bodů - Stopa, příklad 3

Poté použijeme příkaz Locus v GeoGebře.



Obrázek 18: Množina bodů - Locus, příklad 3

Dále vyřešíme ručně.

Označme body: $A = [a, b], M = [0, v], N = [u, 0], P = [p, q], O = [0, 0]$.

1. způsob výpočtu

$$AM \perp MN: \quad (M - A)(N - M) = 0$$
$$(-a, v - b)(u, -v) = 0$$
$$-au - v^2 + vb = 0$$
$$OP \perp MN: \quad (P - O)(N - M) = 0$$
$$(p, q)(u, -v) = 0$$
$$pu - qv = 0$$
$$P \in MN: \quad \vec{u}_{MN} = (u - v),\ \vec{n}_{MN} = (v, u)$$
$$vp + uq - uv = 0$$

Dostaneme tedy soustavu rovnic:

$$-au - v^2 + vb = 0$$
$$pu - qv = 0$$
$$vp + uq - uv = 0$$

Budeme eliminovat proměnné u, v.

$$up = qv$$
$$u = \frac{qv}{p}$$

$$-a\left(\frac{qv}{p}\right) - v^2 + vb = 0$$
$$vp + \left(\frac{qv}{p}\right)q + \left(\frac{qv}{p}\right)v = 0$$

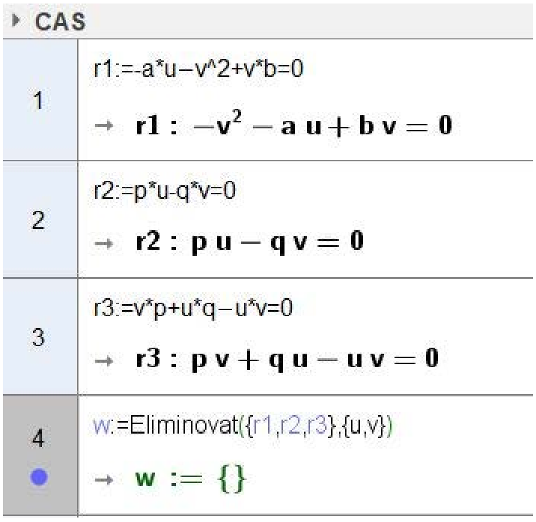
$$\begin{aligned} -aqv - v^2p + vbp &= 0 \\ vp^2 + q^2v - qv^2 &= 0 \\ \hline v &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -aq - vp + bp &= 0 \\ p^2 + q^2 - qv &= 0 \\ -qv &= -p^2 - q^2 \\ v &= \frac{p^2 + q^2}{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -aq - \left(\frac{p^2 + q^2}{q}\right)p + bp &= 0 \\ -aq^2 - p^3 - q^2p + bqp &= 0 \\ aq^2 + p^3 + q^2p - bqp &= 0 \\ p(p^2 + q^2) - q(aq + bp) &= 0 \end{aligned}$$

Dostali jsme křivku, která se nazývá **ofiurida**, neboli **zmijí ocas**.

Pokud použijeme eliminaci v GeoGebře, pak dostaneme **nulový eliminační ideál**.



Obrázek 19: Výpočet v GeoGebře, příklad 3

Proč jsme dostali nulový eliminační ideál? Zřejmě se jedná o součin dvou výrazů, který se rovná nule. Musíme přidat nějakou další podmínku. Při ručním výpočtu jsme využili podmínku $v \neq 0$. Přidáme tedy $vt - 1 = 0$, kde t je pomocná proměnná. Tato rovnice znamená, že v je různé od nuly.

CAS	
1	r1:=-a*u−v^2+v*b=0 $\rightarrow$ $\mathbf{r1: -v^2 - a\,u + b\,v = 0}$
2	r2:=p*u+q*v=0 $\rightarrow$ $\mathbf{r2: p\,u + q\,v = 0}$
3	r3:=v*p+u*q−u*v=0 $\rightarrow$ $\mathbf{r3: p\,v + q\,u - u\,v = 0}$
4	r4:=v*t-1=0 $\rightarrow$ $\mathbf{r4: t\,v - 1 = 0}$
5	Eliminovat[{r1,r2,r3,r4},{u,v,t}] $\rightarrow$ $\{\mathbf{p^3 + b\,p\,q + a\,q^2 - p\,q^2}\}$

Obrázek 20: Výpočet v GeoGebře, příklad 3

Zjistíme Gröbnerovu bázi.

CAS	
1	ro1:=-a*u−v^2+v*b=0 $\rightarrow$ $\mathbf{ro1: -v^2 - a\,u + b\,v = 0}$
2	ro2:=p*u-q*v=0 $\rightarrow$ $\mathbf{ro2: p\,u - q\,v = 0}$
3	ro3:=v*p+u*q−u*v=0 $\rightarrow$ $\mathbf{ro3: p\,v + q\,u - u\,v = 0}$
4	ro4:=v*t-1=0 $\rightarrow$ $\mathbf{ro4: t\,v - 1 = 0}$
5	GB1:=GroebnerDegRevLex({ro1,ro2,ro3,ro4});
6	zm:=p^3-b*p*q+a*q^2+p*q^2 $\rightarrow$ $\mathbf{zm := p^3 + a\,q^2 + p\,q^2 - b\,p\,q}$
7	CountIf(x = zm, GB1) $\rightarrow$ $\mathbf{0}$
8	GB2:=GroebnerDegRevLex({ro1, ro2, ro3, ro4}, {v});
9	CountIf(x = zm, GB2) $\rightarrow$ $\mathbf{1}$
10	GB3:=GroebnerDegRevLex({ro1, ro2, ro3, ro4}, {u});
11	CountIf(x = zm, GB2) $\rightarrow$ $\mathbf{1}$

Obrázek 21: Výpočet v GeoGebře, příklad 3

Pomocí GeoGebry zjistíme,
že polynomy $v \cdot (p^3 + pq^2 + aq^2 - pqb) = 0$ a $u \cdot (p^3 + pq^2 + aq^2 - pqb) = 0$ patří do Gröbnerovy báze, ale nepatří tam polynom $p^3 + pq^2 + aq^2 - pqb = 0$.

2. způsob výpočtu:

Využijeme jen $OP \perp MP$ a $PM \perp AM$. Dostaneme soustavu:

$$p^2 + q^2 - qv = 0$$
$$-pa + qv - qb - v^2 + vb = 0$$

Z první rovnice vyjádříme $v = \frac{p^2 + q^2}{q}$ a dosadíme do druhé rovnice:

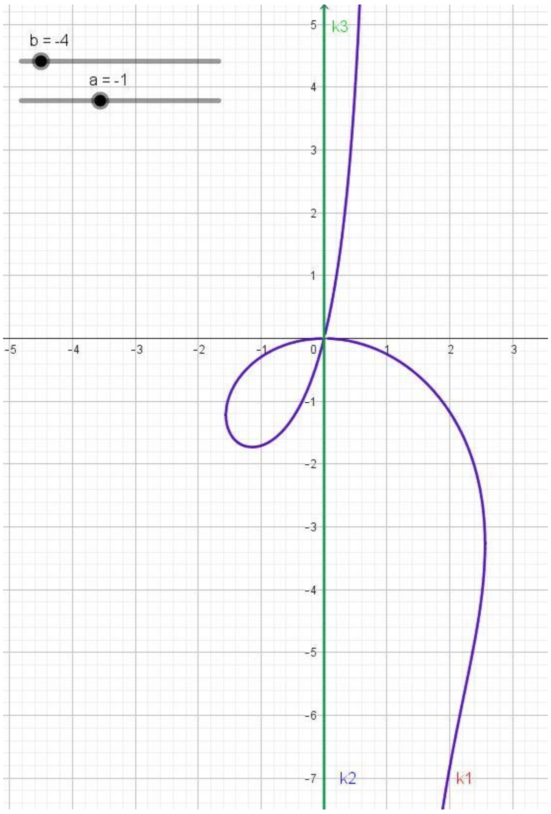
$$-pa + q\left(\frac{p^2 + q^2}{q}\right) - qb - \left(\frac{p^2 + q^2}{q}\right)^2 + \left(\frac{p^2 + q^2}{q}\right)b = 0$$

Po úpravě dostaneme: $p^4 + p^2q^2 + paq^2 - p^2qb = 0$

Rozložíme na součin: $(p^3 + pq^2 + aq^2 - pqb) = 0$

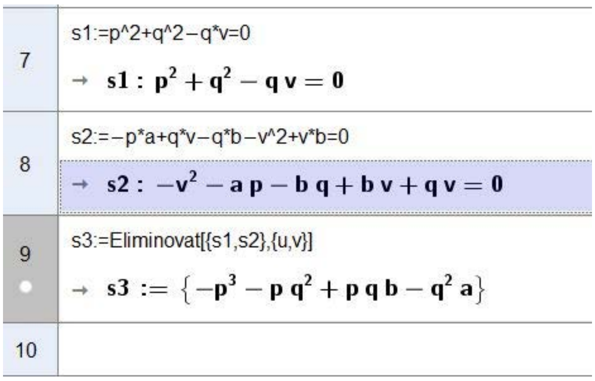
Dostaneme **přímku** $p = 0$ a **rovnici ofiuridy**.

Přidali bychom podmínku $p \neq 0$. (Bod $P \neq O$.)



Obrázek 22: Ofiurida a přímka, příklad 3

Pokud eliminujeme v GeoGebře, pak dostaneme jen **ofiuridu**:



Obrázek 23 Výpočet v GeoGebře, příklad 3

3. způsob výpočtu:

Využijeme: $AM \perp MN$: $-au - v^2 + vb = 0$

MNP jsou kolineární: $vp + uq - uv = 0$

$AM \perp OP$, tedy $\begin{vmatrix} v-b & a \\ -q & p \end{vmatrix} = 0$ a dostaneme $vp - pb + aq = 0$

Dostali jsme opět soustavu tří rovnic:

$$\begin{aligned} -au - v^2 + vb &= 0 \\ -vp + uq - uv &= 0 \\ vp - pb + aq &= 0 \end{aligned}$$

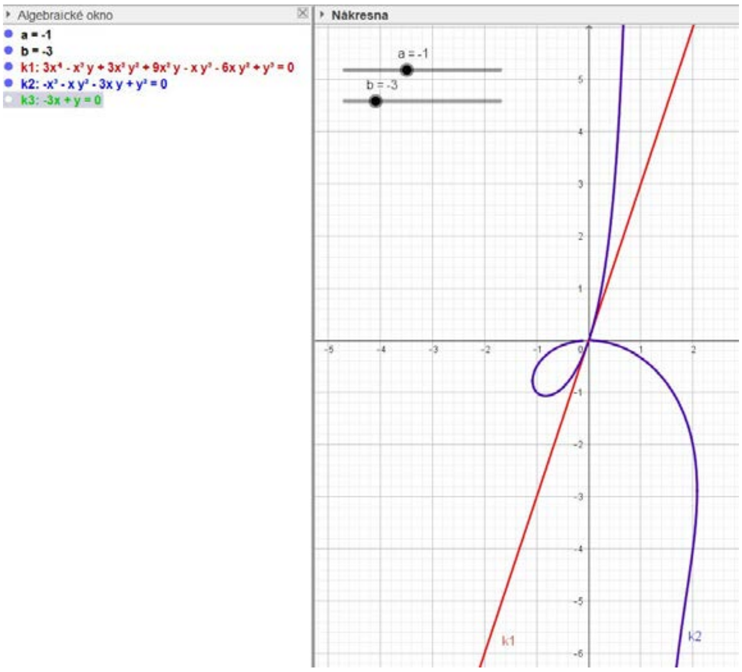
Vyjádříme z první rovnice $u = \frac{vb-v^2}{a^2}$ a z třetí rovnice $v = \frac{pb-aq}{p}$.

Dosadíme do druhé rovnice: $\frac{pb-aq}{p}p + \frac{\left(\frac{pb-aq}{p}\right)\cdot b - \left(\frac{pb-aq}{p}\right)^2}{a}q - \frac{\left(\frac{pb-aq}{p}\right)\cdot b - \left(\frac{pb-aq}{p}\right)^2}{a}\cdot\frac{pb-aq}{p} = 0$

Upravíme a dostaneme: $abp^4 - a^3q^3 + 2a^2q^2pb + p^2q^2ab - aqp^2b^2 - pq^3a^2 - a^2p^3q = 0$

Rozložíme na součin: $-a(bp - qa)\cdot(bqp - q^2p - q^2a - p^3) = 0$

Získáme **rovnici přímky** a **ofiuridy**.



Obrázek 24 Ofiurida a přímka, příklad 3

Pokud se M dostane do O, pak by zbyla rovnice $pb - qa = 0$. Přímku nedostaneme, pokud přidáme podmínku $M \neq O$, nebo jako v předchozím způsobu $vt - 1 = 0$.

Při použití příkazu Eliminovat v GeoGebře dostaneme:

11	t1:=−a*u−v^2+v*b=0 → $\mathbf{t1:\ -v^2 - a\,u + b\,v = 0}$
12	t2:=v*p+u*q−u*v=0 → $\mathbf{t2:\ p\,v + q\,u - u\,v = 0}$
13	t3:=v*p−p*b+a*q → $\mathbf{t3 := a\,q - b\,p + p\,v}$
14	t4:=Eliminovat[{t1,t2,t3},{u,v}] → $\mathbf{t4 := \{a\,b\,p^4 - a\,b^2\,p^2\,q - a^2\,p^3\,q + 2\,a^2\,b\,p\,q^2 + a\,b\,p^2\,q^2 - a^3\,q^3 - a^2\,p\,q^3\}}$
15	t5:=Rozklad(t4) → $\mathbf{t5 := \{-a\,(b\,p - q\,a)\,(b\,q\,p - q^2\,p - q^2\,a - p^3)\}}$

Obrázek 25 Výpočet v GeoGebře, příklad 3

Závěr

Úlohy na řešení množin bodů dané vlastnosti jsem řešila s nadanějšími žáky středních škol a se studenty pedagogické fakulty, budoucími učiteli matematiky. Podle vlastního průzkumu činí tyto úlohy potíže i studentům učitelství matematiky na fakultách připravujících učitele. Problémem je sestavit rovnice a poté řešení soustavy rovnic. Eliminace proměnných ručně bývá také složitá, proto doporučuji využít software GeoGebra.

Článek vznikl v rámci projektu GRAK č. 10/2023 „Integrace matematiky a dalších vzdělávacích oborů“.

Literatura:

[1] Cox, D., Little, J., O´Shea, D.: *Ideals, Varieties, and Algorithms - An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Springer, New York 1997.

[2] PECH, P.: *Klasické vs. počítačové metody při řešení úloh v geometrii*. JČU, České Budějovice 2005.

Soňa Königsmarková
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta, Katedra matematiky
Jeronýmova 10, 371 15 České Budějovice
e-mail: sonakonig@centrum.cz

APLIKACE PC VE VÝUCE MATEMATIKY A STATISTIKY

Josef Košťálek

VŠCHT v Praze, ústav Ekonomiky a managementu

Abstrakt: Příspěvek popisuje dva modely vytvořené v MS Excelu, které slouží pro podporu výuky matematiky a statistiky. První model (matematický) funguje tak, že je možné zadávat rozměry základních geometrických útvarů: čtverec, obdélník, trojúhelník, kruh a tyty útvary se automaticky zakreslí, vypočítá se jejich obvod a obsah, je možnost zadat vykreslení dalších prvků např. kružnice opsané a vepsané, úhlopříček atd. Výpočetně nejkomplikovanější a asi nejhodnotnější částí modelu je ta část týkající se trojúhelníku. Tato část funguje tak, že se vloží délky tří stran trojúhelníku a výstupem jsou výpočty všech důležitých parametrů (délky těžnic, výšek atd.), opět je možné zadat jejich zakreslení. Dále článek popisuje druhý (statistický) model, kde vstupem je tabulka hodnot (výběrový soubor) a hladina významnosti a výstupem jsou výsledky různých druhů parametrických testů. Opět dojde ke grafickému zakreslení výsledků.

Klíčová slova: MS Excel, grafická interpretace výsledků, výpočty, podpora výuky.

The PC Applications in the Teaching of Mathematics and Statistics

Abstract: The paper describes two models created in MS Excel, which are used to support the teaching of mathematics and statistics. Specifically, it is a model where the lengths of the three sides of the triangle are inserted and the output is the calculations of all-important parameters and their plotting. Furthermore, the article describes a model where the input is a table of values (sample set) and the level of significance, and the output is the results of various types of parametric tests. Again, the results will be plotted graphically.

Key words: MS Excel, graphical interpretation of results, calculations, teaching support.

Úvod

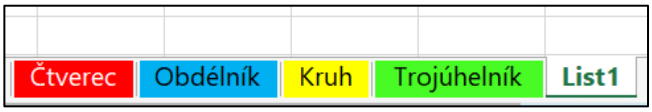
Článek se snaží detailně popsat princip fungování dvou modelů úmyslně vytvořených v MS Excelu, který je každému snadno dostupný. První model byl vytvořen za účelem automatických výpočtů obvodů a obsahů základních obrazců (čtverec, obdélník, kruh, trojúhelník) a také délek úhlopříček a v případě trojúhelníku délek výšek a těžnic. Celá situace je doplněná grafickou interpretací. Tento model byl použitý při výuce matematiky, kde se osvědčil ve dvou oblastech. Jako nástroj pro snadné a rychlé generování různých typů zadání a jejich výsledků. Toto zadání je možné dát studentkám a studentům spolu s výsledky k dispozici, aby měli dostatek příkladů na procvičování. Samozřejmě generovaná zadání se výborně hodí k zadávání testů. Druhou oblastí je jeho využití jako pomůcka při výuce matematiky, neboť díky grafické interpretaci výsledků je dobře patrné, jak se mění např. velikosti a polohy výšek při změně rozměrů trojúhelníků. Sekundární využití tohoto modelu je v hodinách výuky s počítačem jako ukázka toho, jaký je potenciál MS Excelu a co vše je možné v něm vytvářet.

Tento model je určen pro podporu výuky a tvorbu zadání v matematice na druhém stupni ZŠ při výuce geometrie, výpočtů obvodů a obsahů a aplikaci Pythagorovy věty. Ale také pro střední školu, kde se vyučuje sinová a kosinová věta. Jelikož vstupem jsou délky tří stran trojúhelníku a jedním z výstupů jsou velikosti úhlů tohoto trojúhelníku.

Druhý model byl vytvořen jako pomůcka pro výuku vysokoškolské statistiky, konkrétně oblasti parametrického testování statistických hypotéz. Vstupem do modelu je výběrový soubor (resp. dva výběrové soubory v případě dvou výběrových testů) a hladina významnosti. Výstupem je hodnota testovacího kritéria (výpočet se provede podle příslušného typu testu) a kritická hodnota. Z těchto dvou hodnot se automaticky vyhodnotí, zda dochází k zamítnutí či nezamítnutí nulové hypotézy. A hlavně celá situace se zakreslí graficky, jak bude dále ukázáno a popsáno. Tento model se rovněž osvědčil jako pomůcka pro názornou výuku, v reálném čase je vidět, jak se změní výsledek testu při změně vstupních hodnot a samozřejmě tento model je skvělý pomocník při tvorbě zadání zkouškových a zápočtových testů.

1 Model pro matematiku

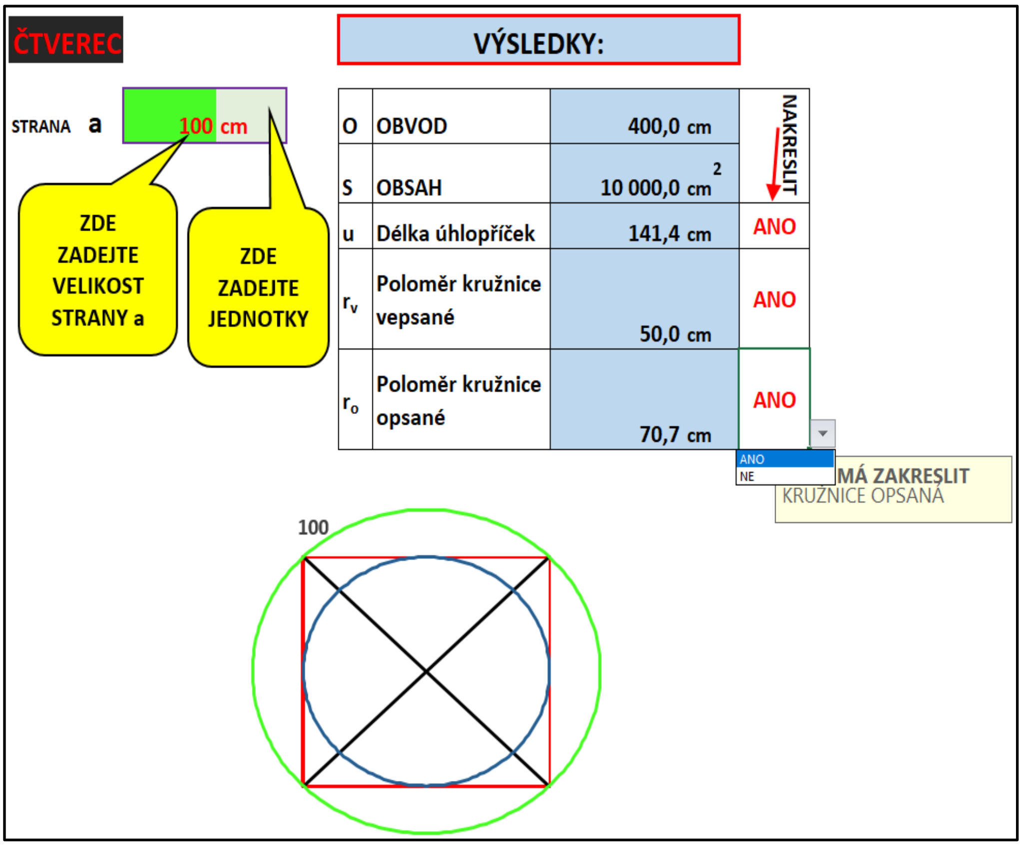
Jak bylo řečeno model je vytvořen v MS Excelu pro automatický výpočet a zakreslení hodnot pro základní obrazce, jedná se o jeden soubor a každý obrazec je umístěn na jednom listu viz obrázek 1.



Obrázek 1: Výběr listu pro čtyři základní obrazce – pohled do modelu; zdroj: vlastní

1.1 Výpočty spojené se čtvercem

Na obrázku 2 je pohled do modelu, když se klikne na list se čtvercem. Jak je vidět je možné zadat hodnotu strany „a“ a jednotku (klikne se na zadané „cm“ a zobrazí se menu, kde je možné vybrat jiné jednotky) vybrané jednotky se automaticky zapíší k vypočteným výsledkům v pravé části. Výpočty v tomto případě nejsou příliš složité např. buňka, kde je vypočítán obvod obsahuje výpočet čtyři krát hodnota buňky, kam se zadává hodnota „a“. U úhlopříčky a poloměrů kružnice opsané a vepsané je možnost kliknout na bílou buňku za výsledkem, která představuje možnost zakreslení daného prvku. Kliknutím na tuto buňku se zobrazí rozevírací seznam, který je vidět u poloměru kružnice opsané, zde je možnost vybrat „ANO“ nebo „NE“, kde volba „ANO“ znamená, že se daný prvek zakreslí. Detailně je tento postup vysvětlen na obrázku 3 (jedná se o stejný princip jako u seznamu, kde je možné zvolit jednotky).



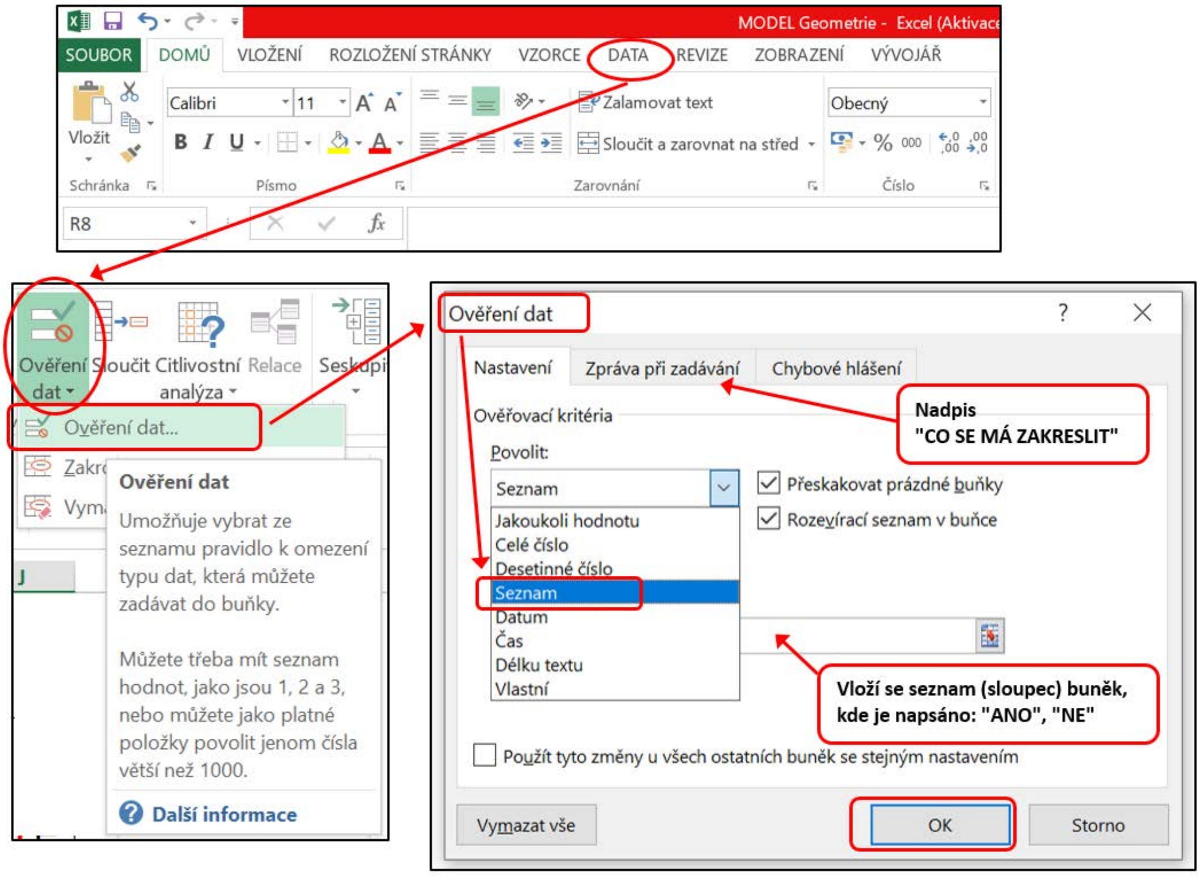
Obrázek 2: Výpočty pro čtverec – pohled do modelu; zdroj: vlastní

Pod tabulkou s výsledky je vidět zakreslený čtverec a v něm zakreslené zvolené prvky: úhlopříčky, kružnice opsaná, kružnice vepsaná. Jak se v MS Excelu docílilo zakreslení? Použit je klasický graf spojující body, kde je nastavená barva spojnice bodů a formát bodů je nastaven jako bez bodů (body nejsou vidět, vidět jsou pouze spojnice). Tak např., když se má zakreslit čtverec o straně délky 100 jednotek, automaticky se vypočítají souřadnice bodů, které nastavený graf zakreslí, tedy body: [0; 0], [100; 0], [0; 100], [100; 100]. Stejným způsobem se zakreslí úhlopříčky. První úhlopříčka je grafem spojujícím body [0; 0], [100; 100]. Tento princip je ještě doplněn o funkci „KDYŽ“, kde je nastaveno, že výše vypočítané souřadnice jsou výstupem jen pro situaci, když u prvku je uvedeno „ANO“ (má se zakreslit) viz obrázek 2. Pokud se nastaví možnost „NE“ výstupem z funkce „KDYŽ“ je nula (potom se žádná spojnice dvou bodů nezakreslí). A stejný princip je použit pro zakreslení kružnice opsané a vepsané, rozdíl je pouze v tom, že souřadnice bodů, které spojuje graf, se spočítají jako polární souřadnice. Vztahy 1 a 2 popisují princip výpočtu souřadnic pro zakreslení kružnice vepsané v závislosti na hodnotě „a“.

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cdot sin\varphi;\ \varphi\epsilon\langle 0; 2\pi\rangle \tag{1}$$

$$y = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cdot cos\varphi;\ \varphi\epsilon\langle 0; 2\pi\rangle \tag{2}$$

Kde do výpočtů vstupují hodnoty φ, za které se dosadí hodnoty ve stupních {0; 5; 10; 15; … 355; 360}, tyto hodnoty se pomocí funkce „RADIANS“ převedou na radiány a následně se pro výpočty ze vztahů 1 a 2 použijí funkce „SIN“ a „COS“. Tímto způsobem se automaticky vypočítá dostatečně velká množina bodů, které se spojí hladkou křivkou a tím vznikne kružnice.

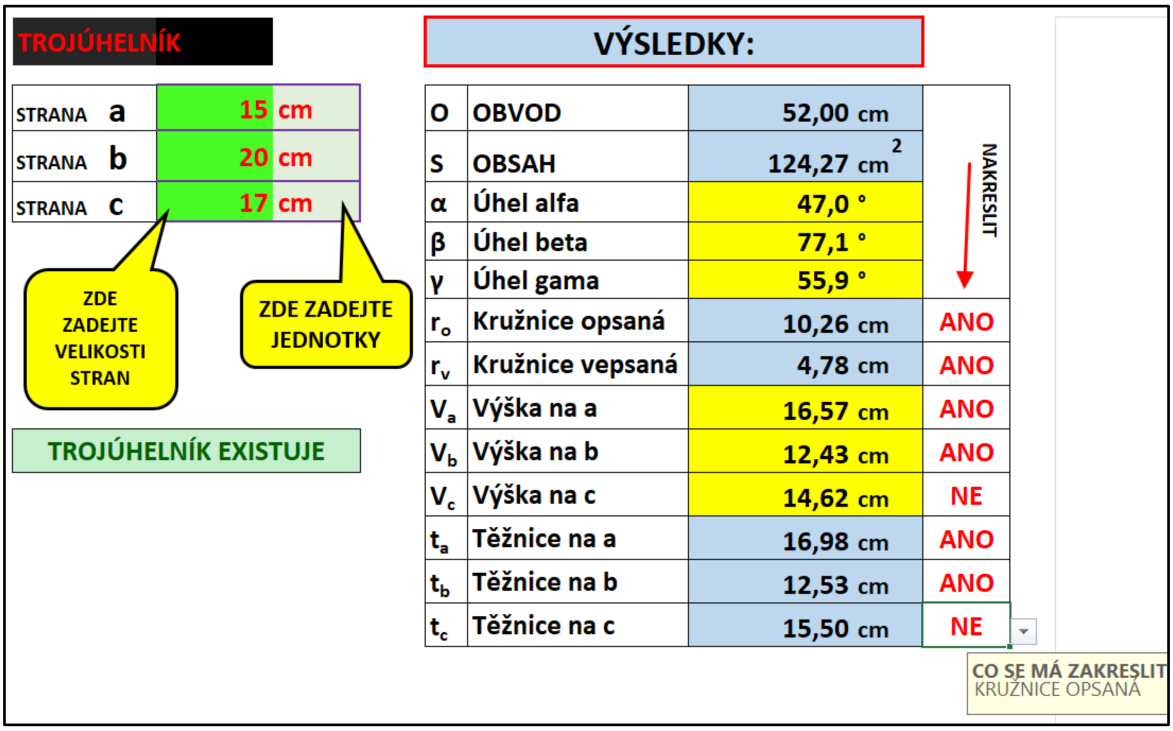


Obrázek 3: Princip rozevíracích seznamů hojně využívaných v modelu; zdroj: vlastní

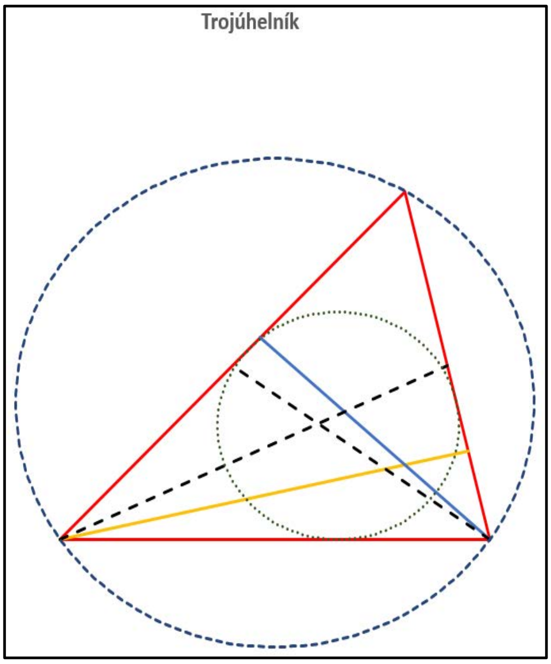
1.2 Výpočty spojené s trojúhelníkem

Výše popsaný princip je použitý pro listy obsahující výpočty a zakreslení prvků u obdélníku a kruhu. Obdélník samozřejmě používá dvě vstupní hodnoty „a“ a „b“ a nemá kružnici vepsanou. U kruhu je zadán poloměr a výstupem je hodnota obvodu a obsahu a dojde k zakreslení kruhu. Komplikovanější je list obsahující výpočty a zakreslení prvků spojených s trojúhelníkem.

Vstupem u trojúhelníku jsou délky tří stran viz obrázek 4. Výstupem je automatický výpočet obvodu, obsahu, úhlů, délek těžnic a výšek a také poloměry kružnic opsané a vepsané. Opět je zde možnost nastavit jednotky délek stran. A je možné zvolit, zda daný prvek (těžnice, výška, …) má být zakreslen „ANO“ nebo „NE“, viz obrázek 4. Prvky, které se mají zakreslit, jsou zakresleny na výstupu z modelu a ten ilustruje obrázek 5. Barevné čáry označují výšky a čárkované čáry označují těžnice.



Obrázek 4: Vstupy a výstupy pro trojúhelník – pohled do modelu; zdroj: vlastní



Obrázek 5: Výstup zakreslení pro trojúhelník z obrázku 4 – pohled do modelu; zdroj: vlastní

Navíc jak je vidět z obrázku 4 pod zadanými délkami stran se automaticky vygeneruje zelený nápis „TROJÚHELNÍK EXISTUJE“. Pokud dojde k zadání hodnot, které nesplňují trojúhelníkovou nerovnost, zobrazí se červený nápis „TROJÚHELNÍK NEEXISTUJE“. Tento prvek je postaven na následující myšlence, ze zadaných délek trojúhelníku se provedou tři pomocné výpočty: nejdelší strana pomocí funkce „MAX“, nejkratší strana pomocí funkce „MIN“ a druhá nejdelší strana pomocí funkce „LARGE“, kde se zadá hodnota 2 (druhá největší hodnota). A výstup „trojúhelník existuje“ nebo „neexistuje“ je výstupem z funkce „KDYŽ“, která porovná, zda je součet nejmenší a druhé největší strany větší než nejdelší strana či nikoliv.

V této části budou popsány výpočty, které model používá k dosažení výstupů uvedených na obrázku 4. Obvod „O“ je součet tří stran. K výpočtu obsahu „S“ je použitý Heronův vzorec, jak uvádí Mikulčák, s. 35, viz vztah 3.

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,, kde\ \ s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{O}{2} \qquad (3)$$

Ze znalosti obsahu je možné určit poloměr kružnice vepsané a opsané, jak uvádí Mikulčák, s. 35, viz vztahy 4 a 5.

$$r_{veps.} = \frac{S}{s} \qquad (4)$$

$$r_{ops.} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} \qquad (5)$$

Jak uvádí stejný zdroj, z hodnoty poloměru kružnice vepsané se vypočítají velikosti úhlů, viz vztahy 6 a 7 (velikost třetího úhlu je zbytek do 180 stupňů.)

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{r_{veps.}}{s-a} \Rightarrow \alpha = 2 \cdot arctg\left(\frac{r_{veps.}}{s-a}\right) \qquad (6)$$

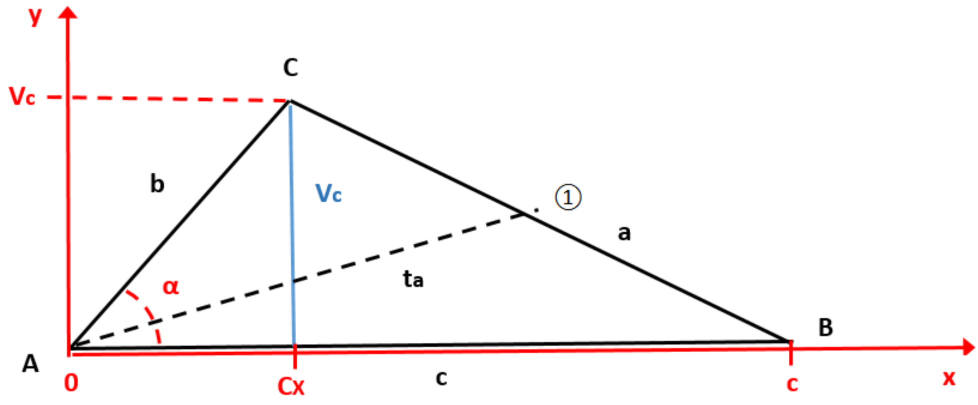
$$tg\,\frac{\beta}{2} = \frac{r_{veps.}}{s-b} \Rightarrow \beta = 2 \cdot arctg\left(\frac{r_{veps.}}{s-b}\right) \qquad (7)$$

Model funguje tak, že pod tabulkou vstupů a výstupů, se kterou uživatel pracuje je ve spodní části mnoho buněk naplněných pomocnými výpočty, které uživatel nevidí a vidí jen výsledné hodnoty zde např. velikosti úhlů. Protože se jedná o výpočty v Excelu, máme v jedné buňce výpočet závorky ze vztahu 6, v další buňce se z této hodnoty vypočítá arkustangens pomocí matematické funkce „ARCTG“ zároveň se tato hodnota vynásobí dvěma, ale tato hodnota je v radiánech čili tento výstup je vstupem do matematické funkce „DEGREES“ a tím se docílí převodu hodnoty na stupně. Stejný mechanismus výpočtu je použit pro vztah 7.

Délky výšek se vypočítají velmi snadno, protože již máme vypočítanou hodnotu obsahu trojúhelníku, viz vztah 3.

O něco komplikovanější je výpočet délek těžnic, principem výpočtu je vzdálenost mezi vrcholem a středem protější strany a pro tento výpočet a pro zakreslení trojúhelníku a pro zakreslení těžnic je nutné analyticky vyjádřit souřadnice vrcholů trojúhelníku a souřadnice středů stran.

Souřadnice vrcholů: A [0;0], B [c;0], C [C_x; V_c], kde Vc je výška na „c“ a Cx (x-ová souřadnice vrcholu C) je dána vztahem 8, viz obrázek 6.



Obrázek 6: Princip analytického vyjádření souřadnic vrcholů trojúhelníku; zdroj: vlastní

$$C_X = \frac{V_C}{tg\alpha} \tag{8}$$

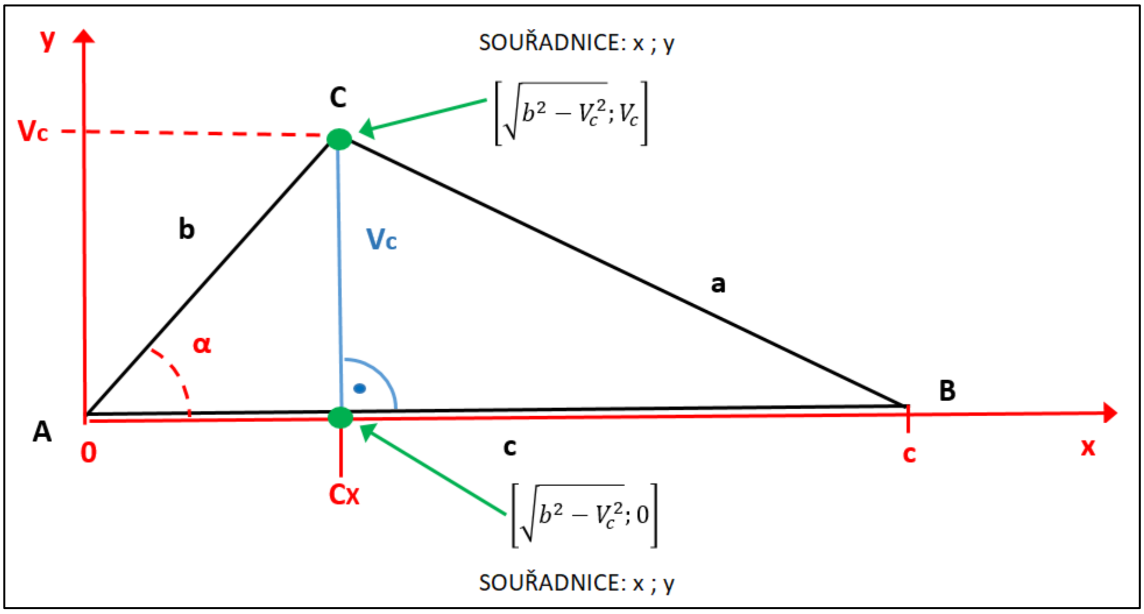
Výše uvedený princip vyústí v algoritmizaci výpočtů v modelu k tomu, že máme v Excelu šest buněk, kde se nám automaticky vypočítají souřadnice x a y pro tři body představující vrcholy trojúhelníku. Z nich se vypočítají souřadnice bodů ležících na středech stran trojúhelníku, viz vztah 9 popisující situaci na příkladu těžnice t_a.

$$① \; [\frac{C_x+c}{2}; \frac{V_c+0}{2}] \tag{9}$$

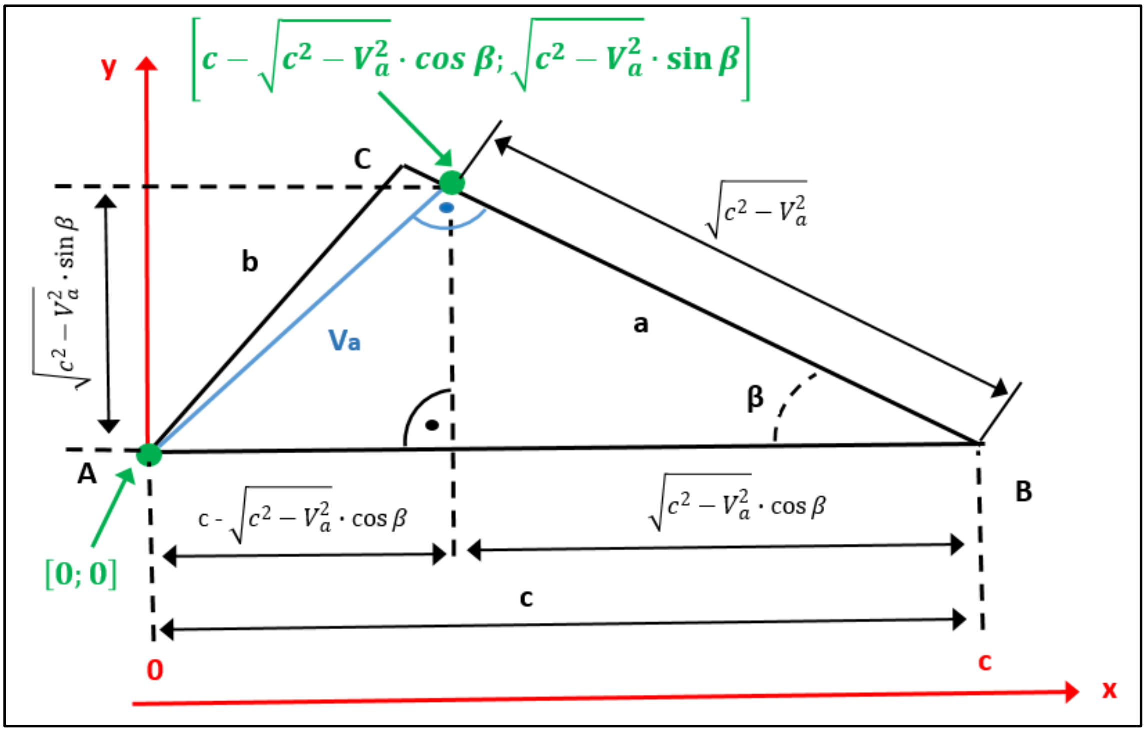
Jinak řešeno souřadnice x je průměr x-ových souřadnic bodů C a B a stejným způsobem se spočítá souřadnice y. A potom délka např. těžnice t_a není nic jiného než vzdálenost bodu označeného jako ① (viz obrázek 6) a bodu A (výpočet vzdálenosti dvou bodů, kde jsou známé souřadnice).

Tím bylo popsáno, jak model funguje po stránce výpočtů hodnot. Nyní bude vysvětleno, jak funguje zakreslení trojúhelníku, a hlavně jeho zvolených prvků. Jak bylo výše popsáno principem je nastavení různých „řad“ hodnot do jednoho grafu. Tím, že známe souřadnice (bodů) vrcholů trojúhelníku, viz předchozí oddíl článku, jsme schopni zadat do grafu zobrazení jejich spojnic bez zakreslení bodu a tím se zakreslí trojúhelník. Ze souřadnic vrcholů a souřadnic středů stran jsme schopni zakreslit do tohoto grafu těžnice – pro lepší názornost je u každé „čáry“ v tomto grafu zvolený formát čárkované černé čáry, zatímco čáry představující strany trojúhelníku mají nastavený formát červené barvy a čáry představující výšky mají nastavenou plnou čáru žluté, modré a zelené barvy.

Pokud jde o samotný princip použitý k zakreslení výšek tak ten opět spočívá v algoritmizaci výpočtu souřadnic krajních bodů tvořících výšku (vrchol trojúhelníku a pata kolmice) viz obrázky 7, 8 a graf je nastaven tak, aby vstupy pro zakreslení výšek byly buňky s tímto výpočtem souřadnic.



Obrázek 7: Princip analytického vyjádření souřadnic krajních bodů výšky na vrchol C; zdroj: vlastní

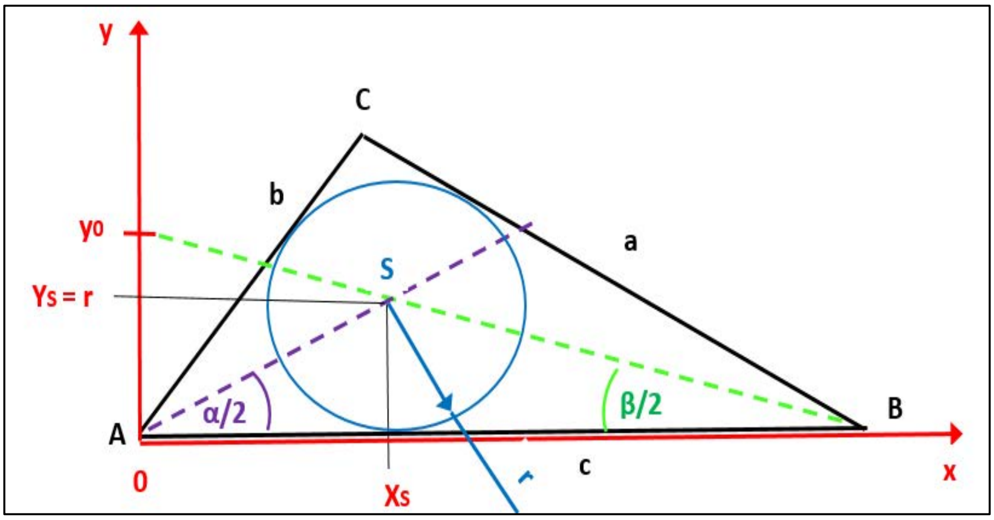


Obrázek 8: Princip analytického vyjádření souřadnic krajních bodů výšky na vrchol A; zdroj: vlastní

Analytické vyjádření souřadnic krajních bodů výšky na vrchol B vychází ze stejného myšlenkového postupu, který je znázorněn na obrázcích 7 a 8. Souřadnice bodu B jsou [c; 0] a souřadnice druhého bodu (paty kolmice) jsou dány vztahem 10.

$$\left[\sqrt{c^2 - V_b^2} \cdot \cos\alpha\,;\ \sqrt{c^2 - V_b^2} \cdot \sin\alpha\right] \tag{10}$$

Na samotný závěr zbývá vysvětlit princip fungování modelu v oblasti zakreslení kružnice vepsané a opsané. Hlavní myšlenka je zakreslení grafu z bodů vypočítaných pomocí polárních souřadnic úplně stejně, jak bylo popsáno výše v souvislosti se čtvercem a jeho kružnice opsané a vepsané. Ovšem v případě trojúhelníku bude situace z matematického hlediska mnohem zajímavější, neboť je potřeba nalézt způsob, jak vyjádřit souřadnice středů těchto kružnic. Pokud jde o poloměry kružnic vepsané a opsané jejich výpočty byly výše popsány vztahy 4 a 5. Začneme kružnicí vepsanou, kde y-nová souřadnice má hodnotu poloměru a postup vedoucí k vyjádření x-ové souřadnice ilustruje obrázek 9, střed kružnice vepsané je dán průsečíkem os úhlů, vztah 11 (osa úhlu α) a 12 (osa úhlu β) jsou rovnice přímek těchto os.



Obrázek 9: Princip analytického vyjádření souřadnic středu kružnice vepsané; zdroj: vlastní

$$y_1 = tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot x \tag{11}$$

$$y_2 = -tg\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot x + y_0 \tag{12}$$

Kde „x“ je hledaná souřadnice, kterou dopočítáme z rovnosti pravých stran vztahů 11 a 12. A y_0 ze vztahu 12 je hodnota absolutního členu, viz obrázek 19 a dá se vyjádřit pomocí vztahu 13.

$$\frac{y_0}{c} = tg\left(\frac{\beta}{2}\right) \rightarrow y_0 = tg\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot c \tag{13}$$

Do vztahu 12 dosadíme vztah 13 a rovnice postavíme sobě rovné, tím vznikne vztah 14.

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot x = -tg\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot x + tg\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot c \rightarrow \left[tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) + tg\left(\frac{\beta}{2}\right)\right] \cdot x = tg\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot c \tag{14}$$

Ze vztahu 14 a jeho úpravy již vyjádříme hledanou souřadnici „x“ středu kružnice vepsané, viz vztah 15.

$$x = \frac{tg\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot c}{tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) + tg\left(\frac{\beta}{2}\right)} \tag{15}$$

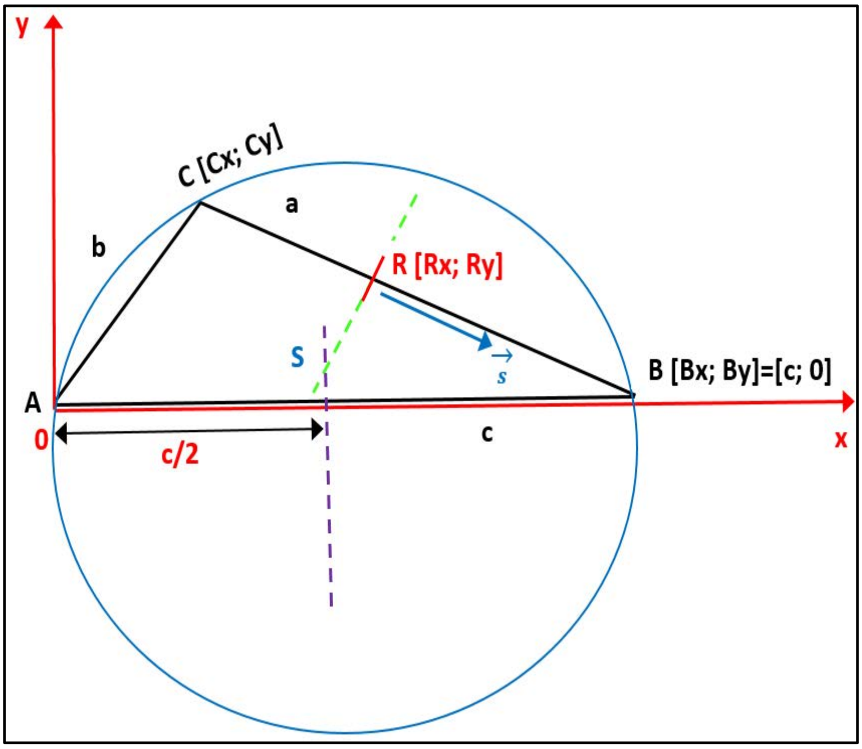
Potom kružnice vepsaná v grafu vznikne zakreslením spojnic bodů, které mají souřadnice počítané (x-ové) vztahem 16 a (y-ové) vztahem 17.

$$x = \frac{tg\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot c}{tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) + tg\left(\frac{\beta}{2}\right)} + r \cdot \cos\varphi \qquad (16)$$

$$y = r + r \cdot \sin\varphi, kde\ \varphi \in \{0; 5; 10 \ldots 360°\} \qquad (17)$$

Za parametr φ se dosadí posloupnost hodnot, protože výsledkem musí být množina bodů (ne nekonečno).

Posledním výpočtem, který bude popsán, je výpočet souřadnic středu kružnice opsané, kde jsou použité následující kroky: střed kružnice opsané je průsečík os stran, osy stran se popíší pomocí rovnic přímek, souřadnice průsečíku se vypočítají ze soustavy těchto dvou rovnic. Rozbor situace popisuje obrázek 10. Zde je vidět, že souřadnice „x“ středu „S“ je polovina délky „c“.



Obrázek 10: Princip analytického vyjádření souřadnic středu kružnice opsané; zdroj: vlastní

Bod R se souřadnicemi [Rx, Ry] je průsečíkem strany „a“ a osy strany „a“. Tyto souřadnice se dají pomocí vzorce pro souřadnice středu úsečky vyjádřit díky souřadnicím bodů B a C, viz vztahy 18 a 19.

$$R_x = \frac{C_x + B_x}{2} = \frac{C_x + c}{2} \qquad (18)$$

$$R_y = \frac{C_y + B_y}{2} = \frac{C_y + 0}{2} = \frac{C_y}{2} \qquad (19)$$

Vztah 20 vyjadřuje souřadnice směrového vektoru přímky ležící na straně „a“ (na obrázku 10 je označen modrou šipkou a názvem „s“).

$$\overrightarrow{(CB)} = \vec{s} = \left(C_x - B_x;\ C_y - B_y\right) = (C_x - c;\ C_y - 0) = (C_x - c;\ C_y) \tag{20}$$

Tento směrový vektor je zároveň normálovým vektorem přímky s body R a S – osy strany „a“. Jestliže chceme napsat obecnou rovnici přímky, kde známe souřadnice normálového vektoru (vztah 20) a souřadnice bodu R ležící na této přímce (vztahy 18 a 19). Tuto obecnou rovnici popisují vztahy 21 a 22.

$$0 = (C_x - c) \cdot x + C_y \cdot y + q \tag{21}$$

Kde „q“ je neznámá hodnota absolutního členu, která se snadno určí právě dosazením souřadnic bodu R za obecné hodnoty x, y.

$$0 = (C_x - c) \cdot \frac{C_x + c}{2} + C_y \cdot \frac{C_y}{2} + q \rightarrow q = (c - C_x) \cdot \frac{C_x + c}{2} - \frac{C_y^2}{2} \tag{22}$$

Vyjádřená hodnota ze vztahu 22 se dosadí do obecné rovnice dané vztahem 21, vznikne vztah 23 popisující obecnou rovnici hledané přímky (osy strany „a“).

$$0 = (C_x - c) \cdot x + C_y \cdot y + (c - C_x) \cdot \frac{C_x + c}{2} - \frac{C_y^2}{2} \tag{23}$$

Určení obecné rovnice osy strany c je mnohem jednoduší, protože tato osa je kolmá na osu „x“ viz obrázek 10, tato rovnice je dána vztahem 24.

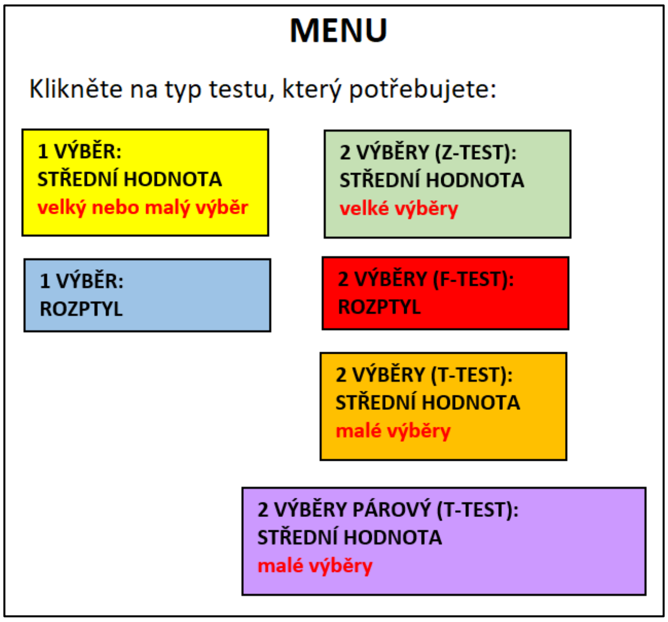
$$x = \frac{c}{2} \tag{24}$$

Nyní máme obecné rovnice dvou os, jejichž průsečíkem je střed S, jehož souřadnice hledáme. Z rovnic ze vztahů 23 a 24 vytvoříme soustavu a tu vyřešíme, výsledek popisuje vztah 25.

$$S\left[\frac{c}{2};\ y = \frac{(c - C_x) \cdot \frac{c}{2} + (C_x - c) \cdot \frac{C_x + c}{2} + \frac{C_y^2}{2}}{C_y}\right] \tag{25}$$

2 Model pro statistiku

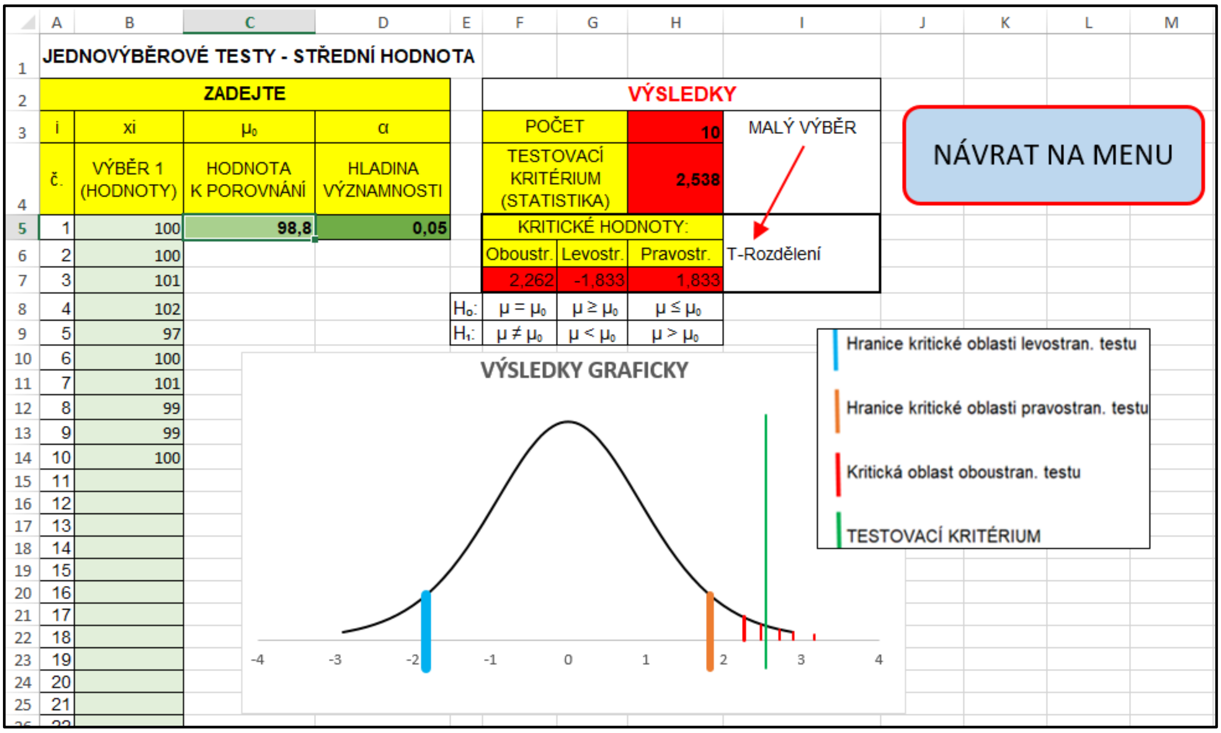
V tomto oddílu bude popsáno, na jakých principech funguje model pro statistiku. Obrázek 11 je pohledem na menu modelu, kde si uživatel kliknutím myší na příslušný statistický test může vybrat a z každého tohoto testu se může opět přemístit na menu, což se realizuje pomocí vložení hypertextového odkazu na vložené obrazce – obdélníky s vepsaným textem popisujícím druh testu.



Obrázek 11: Model pro statistické testy náhled na menu; zdroj: vlastní

2.1 Jednovýběrový test střední hodnoty

Když klikneme na jednovýběrový test střední hodnoty, zobrazí se pole pro vstup hodnot a výstupy z modelu, což je vidět na obrázku 12.



Obrázek 12: Náhled na jedno-výběrový test střední hodnoty; zdroj: vlastní

Sloupeček B obsahuje pole pro hodnoty výběru, kterých lze zadat až 100 (v případě potřeby je možné tento počet navýšit). Do buňky C5 se zadá hodnota μ_0. Do buňky D5 se zadá hladina významnosti α. Model automaticky vypočítá výsledky. Počet hodnot (buňka H3) pomocí funkce „POČET" z hodnot ve sloupci B, z této hodnoty se následně počítá počet stupňů volnosti. Kdyby byl počet hodnot větší než 30 automaticky by se v buňce I3 napsalo „VELKÝ VÝBĚR" a v buňce I5 by se napsalo „N-Rozdělení". Pokud je velikost výběru větší než 30 kritické hodnoty se počítají a grafy se kreslí z Normovaného normálního rozdělení pravděpodobnosti, v opačném případě je použito T rozdělení. Buňka H4 obsahuje výpočet testovacího kritéria, které se zakreslí do grafu zelenou čárou. Buňka G7 obsahuje výpočet kritické hodnoty pro modifikaci levostranného testu, viz vztah 26, tato hodnota se automaticky zakreslí do grafu modrou čárou a buňka H7 obsahuje výpočet kritické hodnoty, pro modifikaci pravostranného testu viz vztah 27, tato hodnota se automaticky zakreslí do grafu hnědou čárou.

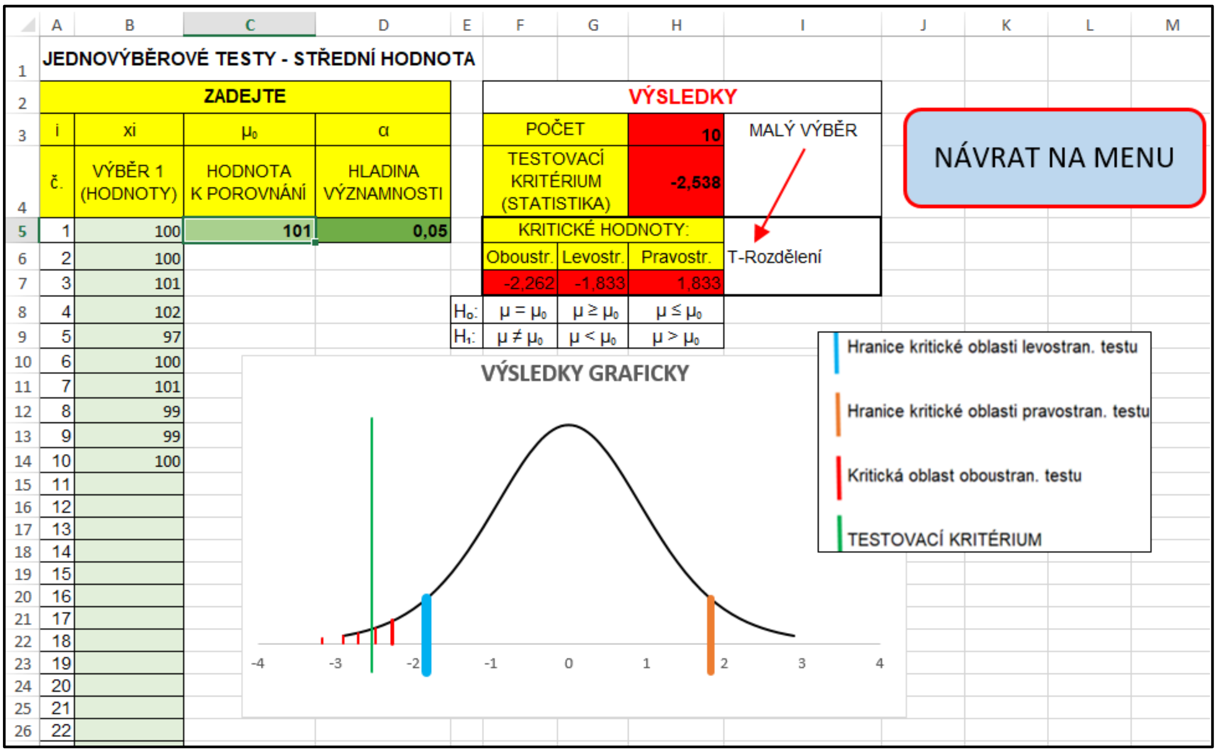
$$t_{\propto\,[n-1]} = t_{0{,}05\,[9]} = -1{,}833 \tag{26}$$

$$t_{1-\propto\,[n-1]} = t_{0{,}95\,[9]} = +1{,}833 \tag{27}$$

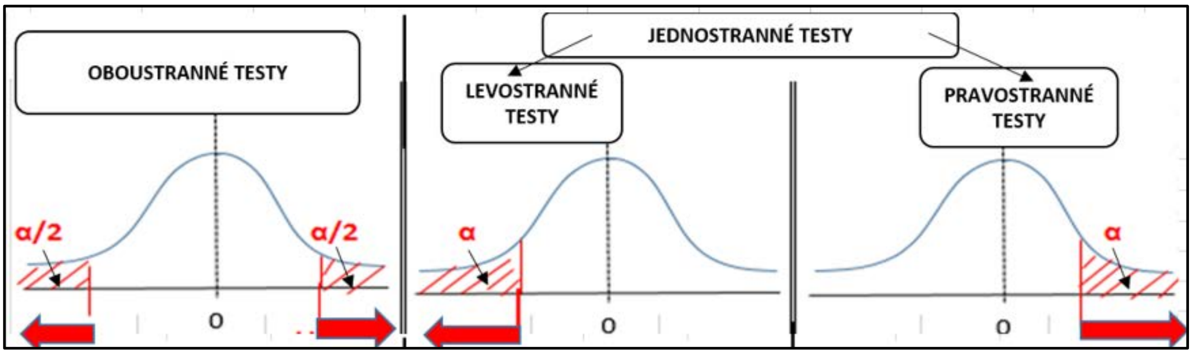
Pro realizaci těchto výpočtů je použitá statistická funkce „T.INV" vstupem je pravděpodobnost vypočítaná z hladiny významnosti (buňka D5) a počet mínus jedna (buňka H3) odpovídající počtu stupňů volnosti. Tato funkce je vložená do logické funkce „KDYŽ". Když je počet hodnot nižší než 30 proběhne výpočet s funkcí „T.INV", pokud tato podmínka splněná není, provede se výpočet se statistickou funkcí „NORM.S.INV", která hodnoty spočítá s normovaného normálního rozdělení. Všechny pomocné výpočty jsou umístěny na tomto listu, ale o několik sloupců vlevo, aby nemátli uživatele, který pracuje jen se vstupy a výstupy. Kritická hodnota pro případ oboustranného testu (vypočítaná v buňce F7) se vypočítá podle vztahu 28, ale s tím rozdílem, že pokud je hodnota testovacího kritéria záporná dojde k vynásobení této hodnoty číslem -1 (aby došlo ke změně znaménka) v grafu se pomocí červených čar zakreslí kritická oblast.

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}\,[n-1]} = t_{0{,}975\,[9]} = +2{,}26 \tag{27}$$

Jde o to, že kritické oblasti jsou dvě, plocha pod křivkou v levé části a plocha pod křivkou v pravé části (každá plocha má velikost poloviny hodnoty α), viz obrázek 14. Nulovou hypotézu zamítneme, jestliže se hodnota testovacího kritéria (zelená čára) nachází buď v levé, nebo pravé kritické oblasti (vyznačené červeně). A je logické, že když je hodnota testovacího kritéria kladná nemůže být menší než nula (kterou prochází osa symetrie křivky) a proto při rozhodování o zamítnutí nebo nezamítnutí nulové hypotézy u oboustranného testu je pro nás relevantní levá kritická oblast pro případ, kdy je testovací kritérium záporné a pravá kritická oblast pro případ, kdy je testovací kritérium kladné. Model tedy pracuje tak, že napíše hodnotu a zakreslí do grafu jen relevantní kritickou oblast, jak je vidět při porovnání obrázků 12 a 13. Na obrázku 12 je zadaná hodnota $\mu_0 = 98{,}8$, testovací kritérium vyjde kladné a kritická červeně označená oblast se vykreslí vpravo. Na obrázku 13 je zadaná hodnota μ_0 = 101, testovací kritérium vyjde záporné a kritická červeně označená oblast se vykreslí vlevo.

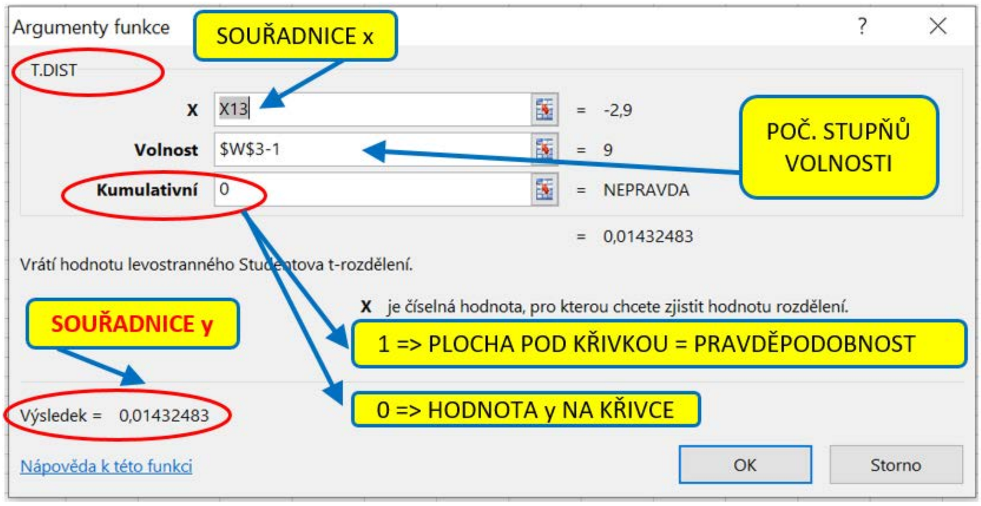


Obrázek 13: Náhled na jedno-výběrový test střední hodnoty se záporným testovacím kritériem; zdroj: vlastní



Obrázek 14: Kritické oblasti pro test středních hodnot; zdroj: vlastní

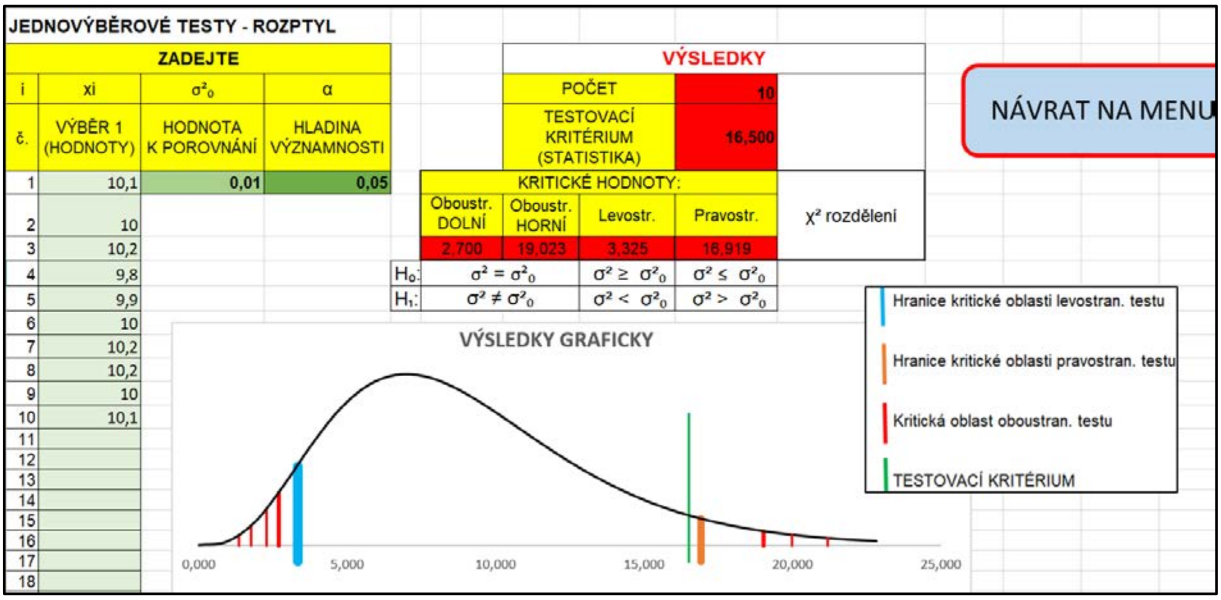
Nyní k principu fungování automatického zakreslení výsledků. Opět jde o zakreslení různých spojnic bodů do jednoho grafu. Černá křivka znázorňuje hustotu rozdělení pravděpodobnosti a vznikne jako spojnice množiny bodů, jejichž x-ové souřadnice jsou v rozmezí -3 až 3 (křivka sice existuje od -∞ do +∞, ale fakticky pro hodnoty menší než -3 a větší než +3 konverguje k nulové hodnotě). Pro každou hodnotu x je automaticky dopočítaná hodnota y, pomocí statistické funkce „T.DIST", viz obrázek 15.



Obrázek 15: Princip výpočtů souřadnic pro zakreslení hustoty rozdělení pravděpodobnosti; zdroj: vlastní

Pokud jde o zakreslení výsledků do grafu, vždy jde o čáry čili stačí zadat souřadnice dvou bodů. Zelená čára – hodnota testovacího kritéria se zakreslí tak, že souřadnice x obou bodů je samotná hodnota testovacího kritéria a hodnota y prvního bodu je -0,05 a hodnota y druhého bodu je 0,4 a tím dojde k zakreslení čáry v bodě, kde na křivce leží testovací kritérium. Princip zakreslení ostatních čar znázorňujících výsledky graficky je proveden obdobným principem. Tento princip je v některých případech zasazen do funkce „KDYŽ“, aby bylo docíleno požadavků, které byly výše zmíněné. To je automatické přepnutí výpočtu z funkce „T.DIST“ na funkci „NORM.S.DIST“, když počet hodnot překročí 30. A x-ové souřadnice bodů pro zakreslení červených čar – kritické oblasti se automaticky vynásobí hodnotou -1, když hodnota testovacího kritéria je záporná.

Všechny ostatní druhy statistických testů, které je možné v tomto modelu provádět, fungují na velmi podobném principu, který byl detailně popsán na situaci jedno výběrového testu střední hodnoty, a to co se týká výpočtů výsledků i výpočtů souřadnic pro zakreslení a vytvoření grafické interpretace výsledků. Tak např. pokud se na obrázku 13 vpravo nahoře klikne na políčko „Návrat do menu“ vrátíme se do menu (viz obrázek 11), zde je možné kliknout na „jedno výběrový test rozptylu“. Vstupy a výstupy do modelu jsou podobné a ilustruje je obrázek 16. Pro zakreslení křivky χ^2 rozdělení (výpočet y-ových souřadnic) se použije statistická funkce „CHISQ.DIST“, kde se opět zadá do políčka „Kumulativní“ hodnota 0 resp. „NEPRAVDA“. Pro výpočty kritických hodnot (oboustranný test, levostranný a pravostranný test) se použije funkce „CHISQ.INV“. Jelikož toto rozdělení není symetrické, spočítají se meze a poté souřadnice, ze kterých vzejde zakreslení červených čar symbolizujících kritické oblasti na levé i pravé straně, jak je dobře patrné z obrázku 16. Také je vidět, že nulová hypotéza v tomto případě není zamítnutá (zelená čára) hodnota testovacího kritéria neleží v oblasti zamítnutí ani jednostranných a oboustranných testů. Ještě snad na vysvětlenou oblast zamítnutí je vyznačená červeně pro oboustranný test a modrá čára pro levostranný test symbolizuje oblast zamítnutí jako plochu pod křivkou od počátku po modrou hranici. A obdobně u pravostranného testu, kde oblast začíná hnědou hranicí a pokračuje jako plocha pod křivkou do jejího konce, jak popisuje obrázek 14.

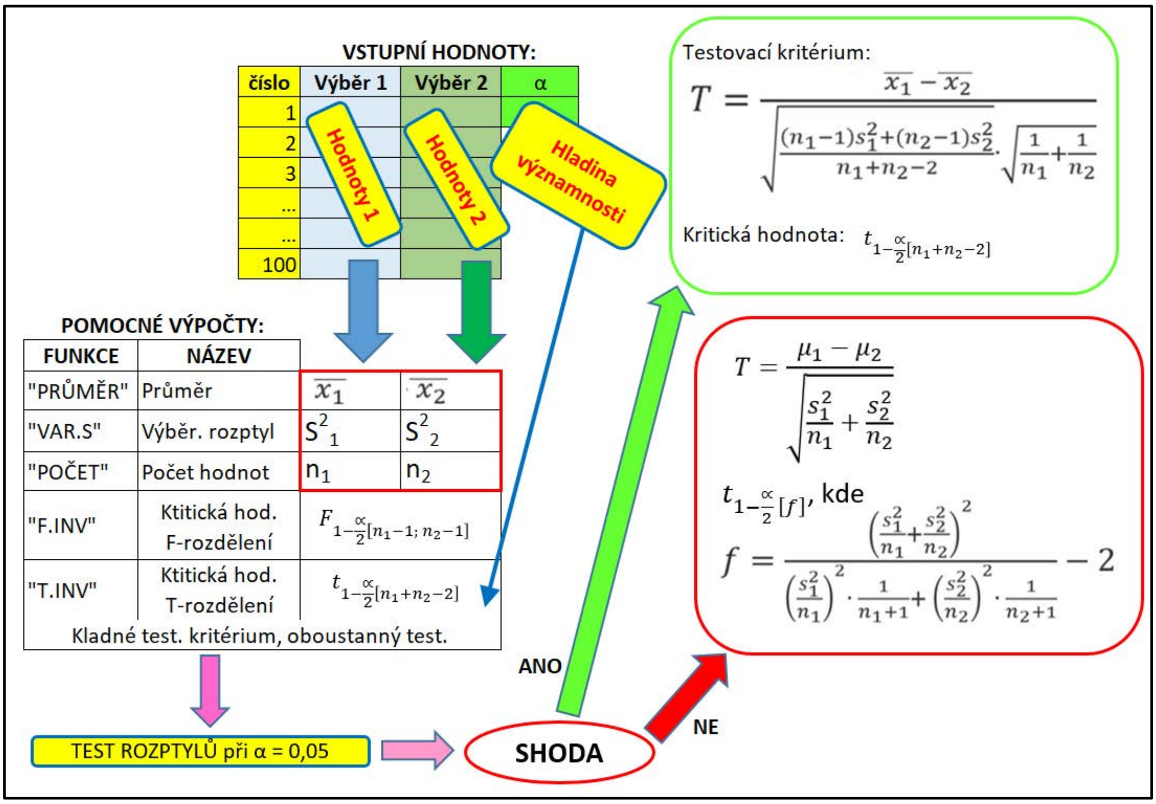


Obrázek 16: Vstupy a výstupy pro jedno výběrový test rozptylu; zdroj: vlastní

2.2 Dvouvýběrový test střední hodnoty – pro malé výběry

Za zmínku ještě stojí dvou výběrový test střední hodnoty, kde velikost každého výběru má méně než 30 hodnot, a tak hovoříme o malých výběrech (je to další typ testu, který si můžeme zvolit v menu tohoto modelu, viz obrázek 11). Tento test představuje největší přidanou hodnotu celého modelu. Od ostatních typů testů se liší tím, že při tomto typu testu je potřeba provést pomocný výpočet, kterým se otestuje shodnost rozptylů obou výběrů, při shodnosti se použije jiný výpočetní postup než při neshodě, model provede automaticky test rozptylů a na základě jeho výsledku se provede správný výpočetní postup, na jehož konci jsou výsledky a opět jejich grafická interpretace. Naznačení postupu výpočtů, které v modelu probíhají (byť v určitém průřezu – skutečná realizace je komplikovanější a obsahuje další prvky) popisuje schéma na obrázku 17.

Na závěr se pokusím vysvětlit, jak byl vyřešen v prostředí MS Excelu ten problém, že ze vstupních hodnot je proveden výpočet (test rozptylu) a na základě výsledků tohoto výpočtu je potřeba provést odlišný způsob dalšího výpočtu. Tento problém je vyřešen poměrně triviálně, oba výpočty proběhnou paralelně. Dostaneme dva typy výsledků a následně pomocí funkce „KDYŽ“ je na základě kritéria testu rozptylu vybrán správný výsledek, který se objeví v buňkách pro výsledky. A stejně tak jsou spočítány dvě sady souřadnic bodů pro grafickou interpretaci, kde mezi vstupními buňkami do grafu a těmito výsledky je opět funkce „KDYŽ“ a výběr správné sady hodnot. T-rozdělení pravděpodobnosti se zakreslí v obou případech, ale průběh křivky se liší, díky jiné hodnotě počtu stupňů volnosti viz vzorce na obrázku 17.



Obrázek 17: Výpočty a funkce zabudované v testu středních hodnot pro malé výběry; zdroj: vlastní zpracování vztahů, které uvádí Hindls (s. 147, 2007)

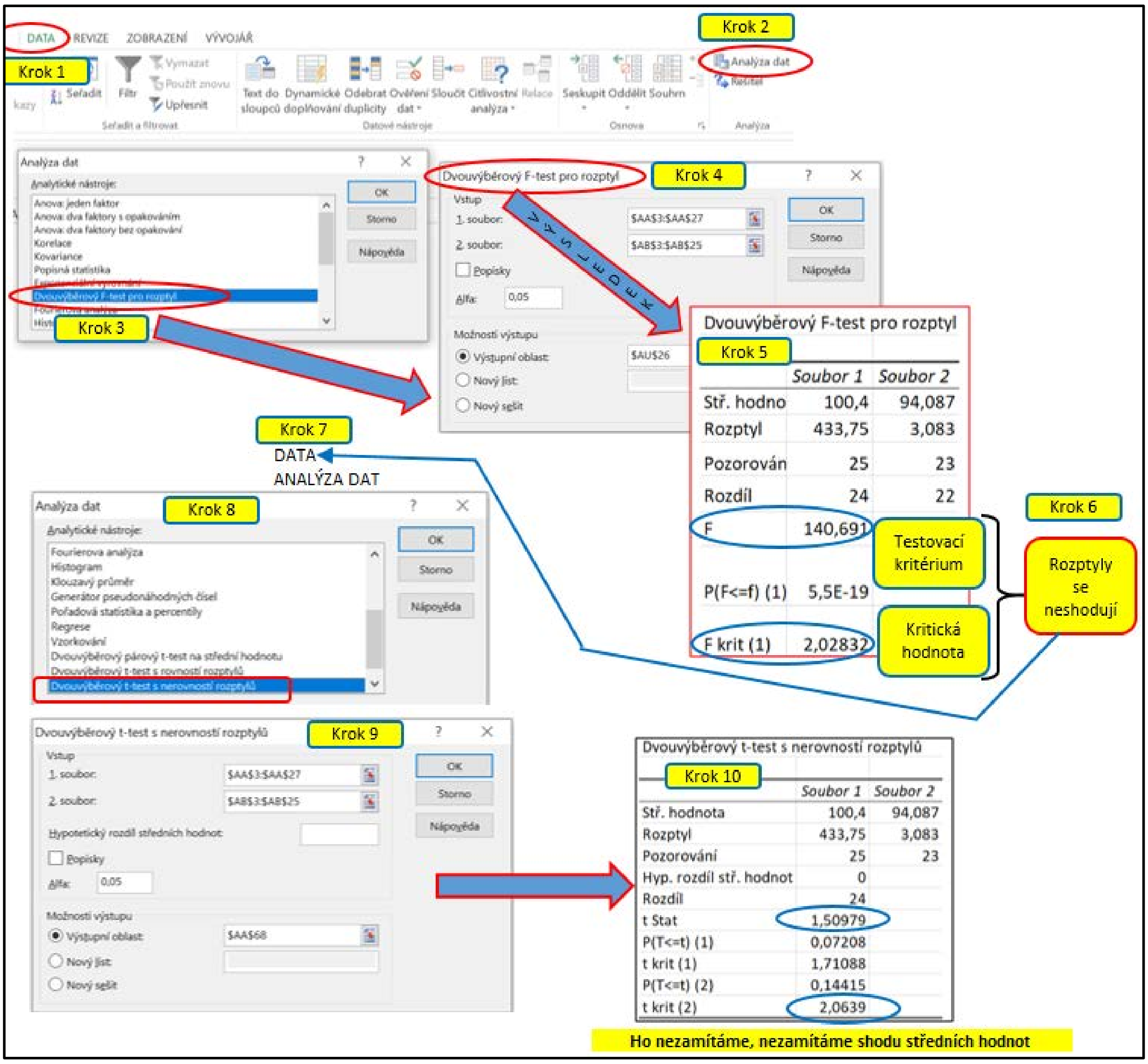
Závěr

Hlavním cílem tohoto článku bylo představit model, který se osvědčil při podpoře výuky matematiky a statistiky a velký prostor byl věnován popsání toho, jak model funguje a jak byl vytvořen. Pokud jde o odvození vzorců a použité výpočetní metody není vyloučené, že se ke stejným výsledkům dá dojít jinou a možná jednodušší a elegantnější cestou, to nezpochybňuji, pouze konstatuji, že jsem lepší postup, než uvádím, nevymyslel. Na druhé straně oba modely prošly velmi důkladným testováním, abych ověřil, zda fungují správně a výpočty neobsahují chyby nebo překlepy ve výpočtech uvnitř buněk.

Pokud se týká matematického modelu, osvědčil se ve výuce, kde se na něm dobře demonstruje, jak vypadají těžnice, výšky, kružnice opsaná a vepsaná a změny jejich velikostí v závislosti na změně délek stran, zejména je dobře vidět, jak změna stran vedoucí ke změně ostroúhlého trojúhelníku na tupoúhlý vede ke změně polohy výšek mimo trojúhelník atd. Další oblast, kde se model skvěle osvědčil je při tvorbě zadání testů, kde jsou zadány délky tři stran a úkolem je sestrojit trojúhelník a změřit jeho úhly nebo sestrojit trojúhelníku těžnice a změřit jejich délky. Pomocí modelu si vymyslím tři strany trojúhelníku a ve výsledcích odečtu velikosti úhlů, délky výšek, délky těžnic atd. Opakováním tohoto postupu přepsání tří čísel a zkopírováním výsledků mám hodnoty do zadání a hodnoty z řešení. Jinou oblastí, kde tvorba zadání s použitím tohoto modelu ušetřila spoustu práce a času je zadání pro výpočet pomocí Kosinovi věty, v situaci, kde známe tři strany a úkolem je dopočítat úhly. Opět stačí zvolit do modelu tři libovolné strany (pokud nesplní podmínku trojúhelníkové nerovnosti, model na to okamžitě upozorní) a okamžitě jsou k dispozici výsledky v podobě velikostí úhlů. Pokud je potřeba vygenerovat velké množství různých zadání je možné model doplnit následujícím postupem do vstupních buněk pro hodnoty tří stran se vloží funkce „RANDBETWEEN“, do které se zadá dolní a horní mez např. 1 (cm) a 20 (cm). Potom dojde k tomu, že se automaticky generují náhodné velikosti stran v rozmezí 1 až 20 (cm), což se realizuje pomocí tlačítka F9 a automaticky dochází k výpočtům výsledků. Na základě zkušeností nejen mých, ale i kolegů lze konstatovat, že v některých oblastech je použití tohoto modelu výhodnější než použití aplikace GeoGebra, která má samozřejmě na druhé straně řadu jiných předností. Velice se osvědčila jejich účelná kombinace.

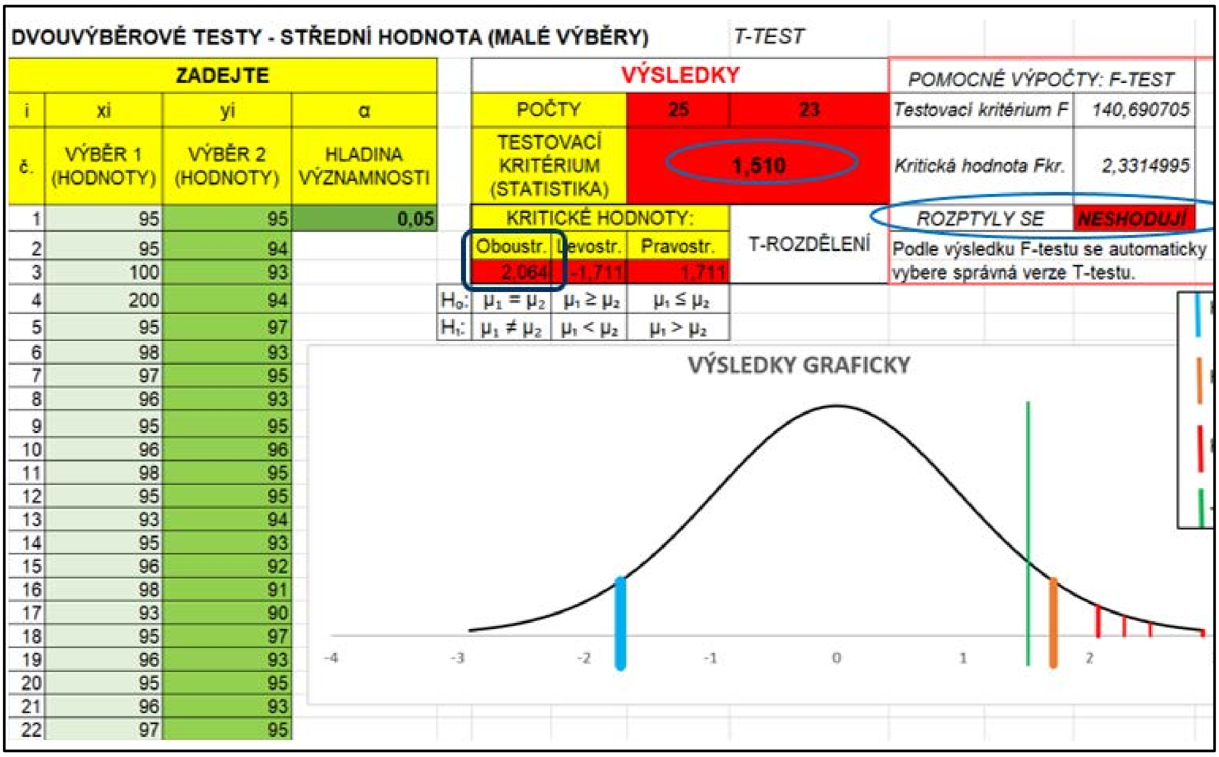
I statistický model už byl použit ve výuce, kde se osvědčil hlavně tím, že se s jeho pomocí velmi názorně vysvětluje provázanost hladiny významnosti s kritickou hodnotou, zejména proto, že se automaticky zakreslí včetně zakreslení testovacího kritéria. Potom se dá použít jako velmi názorná pomůcka pro situaci, kdy nulovou hypotézu nezamítáme např. pro $\alpha = 0{,}05$, ale po zvýšení hladiny významnosti na $\alpha = 0{,}1$ dojde ke zvětšení kritické oblasti a nulovou hypotézu zamítneme. Ale i jiné situace, kde jsou vypočítané výsledky interpretovány graficky, se perfektně hodí pro pochopení souvislostí mezi vstupními hodnotami a výsledky na výstupu. Dále se model ukázal jako velký pomocník při přípravě různých verzí zadání pro zkouškové a zápočtové testy. Stačí vymyslet, anebo pomocí generátorů pseudonáhodných čísel vygenerovat zadané hodnoty a okamžitě jsou k dispozici výsledky včetně pomocných výpočtů a dílčích výsledků, které jsou eventuálně k dispozici v buňkách s pomocnými hodnotami (jako průměry, výběrové rozptyly a směrodatné odchylky atd.).

Model může také dobře posloužit v situaci, kdy je třeba provést příslušný parametrický test a volí se nástroj nahrazující poněkud pracný ruční výpočet. Alternativou k tomuto modelu je nástroj „Analýza dat“ nacházející se v MS Excelu v záložce „Data“, resp. tento nástroj je nutné si nejprve „doinstalovat“, podobně jako je tomu v případě nástroje „Řešitel“ (postup instalace: Soubor – Možnosti – Doplňky – Analýza dat – Přejít). Uvažujme situaci, kdy chceme otestovat rovnost středních hodnot v situaci, kdy jsou výběry malé (menší než 30 hodnot), postup popisuje obrázek 18.



Obrázek 18: Hledání výsledku pomocí nástroje „Analýza dat“; zdroj: vlastní

Na obrázku 19 je řešení stejného zadání pomocí statistického modelu. Porovnáním obrázků 18 a 19 vidíme tři důležité poznatky: Za prvé, pokud použijeme nástroj „Analýza dat“ budeme muset udělat deset kroků (je to dáno tím, že hlavnímu výpočtu předchází pomocný výpočet – test rozptylů). Model provede všechny pomocné výpočty automaticky a po vložení vstupních hodnot okamžitě vypočítá výsledky. Za druhé, když porovnáme kroky 5 a 10 z obrázku 18, což jsou výstupy z „Analýzy dat“ je dobře patrné, že výstupy na obrázku 19 jsou názornější hlavně proto, že jsou doprovázené grafickým výstupem. Grafickou interpretací výsledků se dokáže vyrovnat statistickému SW Grétl. Za třetí na obrázku 18 v kroku 10 je označena hodnota testovacího kritéria a kritické hodnoty, která je identická s výstupem z modelu v obrázku 19, což dokládá, že model funguje správně.



Obrázek 19: Hledání výsledku pomocí modelu; zdroj: vlastní

Literatura:

[1] Hindls, R., Hronová, S, Seger, J., Fisher, J.: *Statistika pro ekonomy*, Professional Publishing Praha, 2007.

[2] Mikulčák, J., Klimeš, B., Široký, J., Šůla, V., Zemánek, F.: *Matematické fyzikální a chemické tabulky pro střední školy*, Prometheus Praha, 1988.

Ing. Josef Košťálek, Ph.D.
Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, ústav Ekonomiky a managementu
Technická 5, 16628 Praha 6
(Ústav Ekonomiky a managementu: Jankovcova 23, 17000 Praha 7)
e-mail: josef.kostalek@vscht.cz

VYUŽITÍ NÁSTROJE PERUSALL VE VÝUCE A HODNOCENÍ NA VYSOKÉ ŠKOLE

Kristýna Nižňanská

Katedra matematiky a didaktiky matematiky,
Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy

Abstrakt: V tomto příspěvku představíme nástroj Perusall, který slouží spolupráci studentů při čtení studijního textu, a představíme možnosti využití tohoto nástroje v hodnocení na vysoké škole. Vycházíme ze zkušeností z konstrukčního výzkumu úvodního kurzu matematické analýzy na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy, který se opírá o principy genetického konstruktivismu, zejména o princip historického ukotvení matematických poznatků a princip genetické paralely. V kurzu vycházíme z práce Otto Toeplitze.

Klíčová slova: porozumění matematickému textu, Otto Toeplitz, hodnocení, skupinové čtení textu.

Perusall in university instruction and assesment

Abstract: In this paper, we present Perusall, a collaborative student reading tool, and discuss the possibilities of using this tool in college assessment. We draw on the experience of design research in an introductory mathematical analysis course at the Faculty of Education, Charles University, which is based on the principles of genetic constructivism, in particular the principle of the historicity of mathematical knowledge and the genetic principle. The course is based on the work of Otto Toeplitz.

Key words: mathematical text comprehension, Otto Toeplitz, assessment, social annotation.

Úvod

V tomto příspěvku představíme výukový nástroj Perusall a možnosti jeho využití na vysoké škole. Opřeme se o zkušenosti, které jsme nabyli v rámci výuky předmětu Posloupnosti pro učitele ZŠ a SŠ na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy, který je předmětem výzkumu tříletého projektu GAUK č. 458222 – *Konstrukční výzkum úvodního kurzu matematické analýzy pro budoucí učitele matematiky 2. a 3. stupně*. Cílem projektu je sledovat, mapovat a vyhodnocovat průběh a výsledky kurzu a na základě toho jej v jednotlivých iteracích postupně vylepšovat. Středobodem kurzu a projektu z hlediska obsahu je pojem limity posloupnosti, především pak definice, jejíž zavedení se snažíme motivovat. Didakticko-matematická otázka navození potřeby definice limity u studentů je daleko obtížnější, než jsme na začátku projektu předpokládali, a zůstává tedy prozatím otevřenou. Je to hlavní výzva projektu, kterou se budeme zabývat v posledním roce projektu. V tomto příspěvku se zaměříme na poznatky a zkušenosti z prvních dvou let projektu.

Máme za sebou první dva roky výuky kurzu, tj. také první iteraci konstrukčního výzkumu, kterou jsme pro nepředvídané obtíže museli považovat za pilotní, a následně první řádnou iteraci, v níž byly nejzávažnější nedostatky kurzu již odstraněny. Nyní popíšeme hlavní myšlenky, na jejichž základě je kurz postaven, následně uvedeme, jaká ponaučení jsme si odnesli z pilotní iterace konstrukčního výzkumu, jakým způsobem jsme je následně zapracovali, a nakonec podrobně rozebereme roli Perusallu.

1 O co se kurz Posloupnosti pro učitele ZŠ a SŠ opírá?

Definice limity posloupnosti již byla z didakticko-matematického hlediska zkoumána z mnoha různých pohledů. Od zkoumání nedostatků toho, jak studenti limitám rozumí a jaké jsou jejich intuitivní představy, přes otázku, zda jsou tyto nedostatky překážkou či nutnou fází v procesu osvojování pojmu limity, se výzkum dostal k podrobnému zkoumání různých způsobů, jak studenti limity uchopují, a zjišťování, nakolik jsou tyto způsoby uchopení limit účinné a jak snadno či obtížně je studenti dovedou modifikovat. Dále byl zkoumán vliv procesuálního vnímání pojmu limity a byly detailně popsány myšlenkové konstrukce potřebné k tomu, aby studenti porozuměli pojmu limity jak intuitivně, tak přes formální matematický jazyk. Současná didaktika matematické analýzy volá po aplikaci těchto poznatků ve výzkumu vyučování (Larsen, 2017).

Středem našeho zájmu je výzkum výuky pojmu limity posloupnosti v rámci přípravy budoucích učitelů. Naším cílem je především motivovat studenty k zájmu o pojem limity posloupnosti tak, aby u nich vyvstala potřeba pojem důkladně definovat dříve, než jim bude samotná definice předložena. Soudíme, že v takovém případě budou studenti s definicí pracovat produktivněji, a dosáhnou tak přesnějšího a důkladnějšího porozumění definici. Způsob, jakým jsme se k tomuto didakticko-matematickému problému rozhodli přistoupit, se opírá o principy *genetického konstruktivismu*, jak je popisuje přednášející kurzu, který je zároveň členem našeho výzkumného týmu (Kvasz, 2017). Na tomto místě vyzdvihneme pouze dva z těchto principů, a to *princip historického ukotvení matematických poznatků* a *princip genetické paralely*. Princip historického ukotvení matematických poznatků vyžaduje, aby se výuka opírala o důkladnou analýzu historie jednotlivých vyučovaných pojmů. Na jejím základě se vytváří gradovaná série úloh, díky nimž studenti poznávají problematiku způsobem analogickým k tomu, který můžeme pozorovat v historii. Princip genetické paralely se pak zaměřuje na globálnější strukturu vývoje matematiky, zejména pak na jednotlivé zlomové okamžiky, během kterých se celá struktura matematických poznatků radikálně proměňovala. Také v tomto případě má výuka postupovat paralelně s historickou genezí matematiky jako většího celku. Těchto dvou principů jsme se drželi při volbě základního studijního textu, o který se kurz opírá.

1.1 Otto Toeplitz a jeho genetický přístup k výuce matematické analýzy

Právě v souladu s principem genetické paralely pojal svůj výklad matematické analýzy Otto Toeplitz v knize *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung, eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode*, jejíž část jsme pro účely projektu přeložili do češtiny. Otto Toeplitz (1881-1940) byl německý matematik židovského původu, který se mimo jiné intenzivně zajímal o historii matematiky. Byl například jedním ze spoluzakladatelů časopisu *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik* a jako jeden z prvních se společně například s Felixem Kleinem zasazoval o zavedení tzv. *genetického přístupu* do výuky matematiky (Michal, Nižňanská a Zenkl, 2022). Toeplitzův genetický přístup je analogií principu genetické paralely, neboť se shodně opírá o důkladné porozumění genezi matematiky. Toeplitzova genetická metoda má studenty mimo jiné motivovat tím, že jim ukazuje, jak se k jednotlivým matematickým objevům dospělo, a proč bychom se jimi tedy měli chtít vůbec zabývat (Köthe in Toeplitz, 2007; Furinghetti & Radford, 2002).

V prvním roce projektu jsme se zaměřili na překlad výše uvedené knihy do češtiny a zároveň jsme podle ní začali také vyučovat. Název jsme do češtiny přeložili jako *Kalkulus – Genetický přístup*. V kurzu se věnujeme zejména první kapitole nazvané *Podstata nekonečného procesu*. Vývoj pojmu posloupnosti a její limity sledujeme zejména skrze vývoj pojmu čísla, které nejprve chápeme jako počet jednotek, což nám kvůli nesouměřitelnosti například neumožňuje vyjádřit délku úhlopříčky čtverce tako definovaným číslem. Toeplitz ukazuje, jak starověcí matematici tento problém překlenovali pomocí složité teorie proporcí, a následně se zabývá otázkou, co je podstatou moderního pojetí čísla. Tu spatřuje v desetinném (resp. analogicky šedesátinném) rozvoji, jež nám potenciálně umožňuje libovolné zpřesňování. Tím zároveň naznačuje cestu k nekonečnému limitnímu procesu. Velmi zajímavá je revoluční úloha desetinné čárky, která přišla na svět až v 16. století. Díky desetinné čárce jsou numerické výpočty snáze uchopitelné a algoritmizovatelné, což jednak zefektivnilo výpočty goniometrických a logaritmických tabulek, které byly zásadní například pro astronomii, jednak se tím otevřely dveře nekonečným desetinným rozvojům, které do matematiky vstupují zcela přirozeně například skrze převody zlomků na desetinné rozvoje. Periodickému desetinnému rozvoji je také věnován jeden oddíl knihy, který představuje jeden z přirozených mostů mezi základoškolskou, středoškolskou a vysokoškolskou matematikou. Takovéto propojování je v přípravě budoucích učitelů velmi důležité, protože pomáhá překonávat jeden z běžných nedostatků přípravy budoucích učitelů, jímž je tzv. *Kleinova dvojí diskontinuita* (*Klein's double discontinuity*), tj. nespojitost při přechodu od školské k vysokoškolské matematice a následně pak také při přechodu z vysoké školy do učitelské praxe (Winsløw a Grønbæk, 2014). Jedná se o jev, který právě Felix Klein postřehl a v roce 1908 popsal následujícím způsobem.

> *Na začátku studia se mladý student setkává s problémy, kdy mu nic nepřipomíná to, čím se dosud zabýval, a samozřejmě všechny tyto věci rychle a důkladně zapomene. Pokud však po ukončení studia nastoupí do učitelského povolání, najednou se od něj očekává, že bude vyučovat tu běžnou elementární matematiku školským způsobem; protože tento úkol může jen stěží samostatně propojit s univerzitní matematikou, ve většině případů poměrně brzy naváže na starou učitelskou tradici a univerzitní studium zůstane jen více či méně příjemnou vzpomínkou, která nemá na jeho výuku žádný vliv.* (překlad dle Klein, 1908)

Kapitolu o nekonečném procesu uzavírají oddíly o konvergenci posloupností a řad. Kromě několika problémů, které jsou v knize uvedeny dříve a ve kterých se uplatňují myšlenky analogické myšlence definice limity posloupnosti – jako je tomu například v případě exhaustivní metody –, se k pojmu konvergence Toeplitz dopracovává přes názornou myšlenku postupného ustalování jednotlivých desetinných míst v desetinných rozvojích jednotlivých členů posloupnosti. Limita posloupnosti je tak vyvrcholením celé kapitoly o nekonečném procesu, která se snaží udržet kontakt s matematikou základní a střední školy právě skrze rekapitulaci stěžejních bodů historického vývoje matematiky.

Kniha zatím nevyšla tiskem. Zájemci se s překladem mohli seznámit v rámci workshopu na konferenci, kde k textu získali přístup právě přes nástroj Perusall. Do kurzu lze vstoupit po registraci na stránkách perusall.com, kde stačí vyhledat kód kurzu „NIZNANSKA-N9YXG“. O knize jsme pojednali také v rámci dílny na konferenci v Ústí nad Labem (Nižňanská, 2023).

2 Poučení z pilotní iterace konstrukčního výzkumu

V prvním roce projektu jsme byli zaskočeni náročností překladu a jeho revizí, takže nám nezbyl dostatek prostoru pro formulaci kritérií hodnocení kurzu. Studentům tak nebylo jasné, na co by měli zaměřit pozornost. Právě proto považujeme tuto iteraci z prvního roku projektu za pilotní.

V uplynulém roce jsme se zaměřili na napravení těchto nedostatků. Zaprvé jsme vytvořili nový soubor úloh, domácích úkolů a didaktických testů do cvičení. Pravidelné testy se staly součástí hodnocení v kurzu. Studenti se systematicky připravovali na písemnou početní část zkoušky a zároveň tak mohli získat bonusové body k této části zkoušky. Podobně mohli studenti získávat bonusové body k ústní teoretické části zkoušky, a to průběžným čtením studijního textu a diskusí o něm v nástroji Perusall. O využití tohoto nástroje v kurzu jsme se pokoušeli již v prvním roce, až v uplynulém roce se nám však podařilo dosáhnout systematické a úspěšné implementace jednak díky tomu, že jsme práci v Perusallu přehledně zasadili do hodnocení kurzu, jednak že jsme samotný text obohatili o množství nově vytvořených otázek, které studentům pomáhaly zaměřit pozornost a pracovat s textem produktivně. Otázky je možno nahlédnout v Perusallu ve výše odkazovaném kurzu.

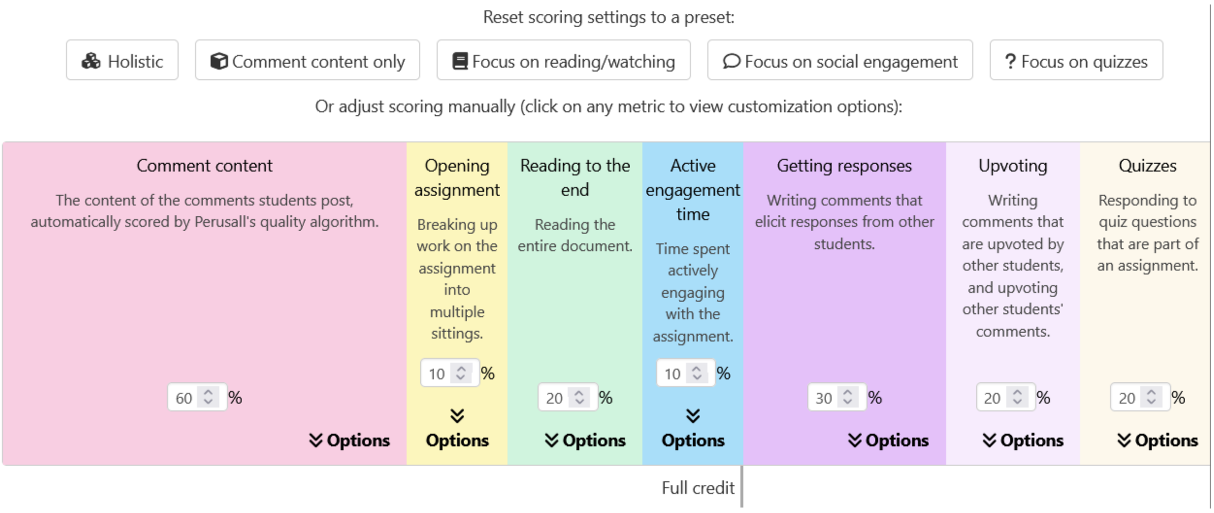
Záměrem hodnocení bylo, aby studenti měli jasnou představu o tom, co se od nich v kurzu očekává a jakým způsobem budou hodnoceni, především pak aby je samotný systém hodnocení pobízel ke smysluplné průběžné práci, jež je nezbytná pro zvládnutí jakéhokoli učiva. Chtěli jsme se vyhnout situaci, kdy studenti neví, jakým způsobem se mají připravovat, aby byli úspěšní, a více času stráví přemítáním nad tím, co by měli dělat, či pochybováním o vlastních schopnostech než samotnou prací. Neméně významným záměrem bylo vést studenty ke čtení matematického textu, což je návyk a dovednost, která má naprosto zásadní význam v rámci dalšího studia nejen na univerzitě, ale také po jeho absolvování. Právě ke zvládnutí této dovednosti směřuje práce v Perusallu, o které pojednáme v následující kapitole.

3 Perusall

Perusall.org je platforma, ve které můžeme vytvářet kurzy s texty, o kterých studenti diskutují, takže mohou při čtení textu spolupracovat, navzájem si tak pomáhat překonávat obtíže a vzájemně se obohacovat. V našem případě tak získávají oporu při tom, když se učí číst matematický text, což je úkol pro studenty velmi náročný. Texty se do systému nahrávají ve formátu PDF. Studenti mohou v textu označovat konkrétní úryvky, o kterých chtějí diskutovat, vložit svůj komentář, a tím vytvořit nové diskusní vlákno. V již vytvořených vláknech mohou odpovídat na komentáře spolužáků a oceňovat přínosné komentáře spolužáků pomocí tlačítka „upvote“. Perusall můžeme propojit s Moodlem tak, aby studenti mohli do kurzu vstupovat přes prostředí, na které jsou zvyklí.

V Perusallu můžeme studenty rozdělit do skupin tak, že vidí pouze komentáře od spolužáků ze své skupiny. Je vhodné přiřadit studenty do skupin, které kopírují jejich rozřazení podle rozvrhu, což se nám dobře osvědčilo. Další způsoby rozřazení studentů, které jsme vyzkoušeli v navazujícím kurzu Funkce pro učitele ZŠ a SŠ, se nám neosvědčily. Když jsme všechny studenty v kurzu přiřadili do jedné velké skupiny, bylo pro ně množství komentářů, které viděli, příliš přehlcující. Navíc v takovém množství příspěvků těžko nacházeli další příležitosti najít něco nového, k čemu by se mohli sami vyjádřit. Po krátké době si tak sami vyžádali, aby byli rozřazeni do menších skupin, což s sebou přineslo nepříjemné technické komplikace.

Na základě našeho dojmu z kurzu Posloupnosti pro učitele ZŠ a SŠ, že je diskuse kombinovaných studentů znatelně hlubší, jsme v navazujícím kurzu studenty rozřadili náhodně napříč jednotlivými skupinami se záměrem obohatit studenty prezenčního studia o vhledy jejich zpravidla starších kolegů. Toto se opět, bohužel, neosvědčilo, neboť studenti kombinovaného studia byli frustrováni tím, že diskusi v tomto případě vnímali jako méně produktivní než v předchozím kurzu. Jako nežádoucí zpětně vnímáme také to, že se tím narušila spolupráce komunity studentů kombinovaného studia, která sama o sobě vzniká podle našich zkušeností daleko obtížněji než v případě prezenčního studia.



Obrázek 1: Možnosti nastavení hodnocení v Perusallu

Čtení studijního textu můžeme studentům v Perusalu zadávat po částech. Hodnocena je aktivita studentů, kterou systém vyhodnocuje automaticky. Kritéria hodnocení můžeme nastavit podle jedné z přednastavených možností, případně si je můžeme sami manuálně upravit dle svého uvážení. Můžeme určit, kolik komentářů mají studenti vložit, aby získali plný počet bodů za komentování, a můžeme rozhodnout, zda se bude do hodnocení promítat také kvalita jednotlivých komentářů. Doporučuje se nastavit váhy jednotlivých kritérií tak, aby jejich celkový součet přesahoval 100 %, a bylo tak možné získat plný počet bodů více různými způsoby (vizte obrázek 1).

Dále také můžeme nastavit, jakým způsobem bode hodnocena práce, kterou student odvede po termínu odevzdání úkolu. Nejvíce se nám osvědčilo tuto práci zohledňovat a umožňovat studentům získávat body za aktivní účast v diskusi také po termínu s tím, že počet bodů, které takto mohou získat, během následujících čtyř měsíců postupně lineárně klesá k nule. Diskuse tak není uměle přerušena tím, že by za ni studenti najednou již nemohli nic získat, a může dál přirozeně pokračovat i po termínu. Pravidlo, které studentům neumožňuje získat po termínu odevzdání úkolu více bodů než před ním, se nám neosvědčilo, protože studenty od práce odrazuje, pokud se k ní před termínem nedostanou, než aby je k práci skutečně motivovalo.

3.1 Jak studenti v Perusallu pracovali?

V uplynulém roce jsme pozorovali, že se aktivita studentů asi nejčastěji projevovala odpovídáním na předpřipravené otázky. Perusall pro ně v naprosté většině představoval zcela nový způsob práce a právě odpovídání na otázky představovalo uchopitelný způsob, jak se do diskuse zapojit. Dále se studenti často doptávali na význam slov, se kterými se dosud nesetkali, či sami přímo doplňovali jejich vymezení, které se jim podařilo dohledat. Znalost významu slov je pro porozumění textu zásadní. Pokud čtenář význam slov nezná, představuje to často první překážku na cestě k porozumění textu, kterou je potřeba překonat dohledáním významu slov či jejich odvozením z kontextu. Pokud si čtenář tuto překážku neuvědomí a nepřekoná ji, může čtení textu skončit neúspěchem. Kladně hodnotíme, že si studenti uvědomují potřebu takovéto překážky překonávat a že strategii doplňování významu slov používají. Díky sdílené diskusi se tuto strategii mohou učit i studenti, kteří by jinak čtení vzdali dříve, než by je napadlo si význam neznámých slov dohledávat.

Dále studenti v diskusi navzájem sdíleli další rozšiřující zdroje materiály, nejčastěji výuková videa. Také se doptávali na nejasnosti, které pak v diskusi společně rozebírali. Také měli příležitost hledat chyby v textu a navrhovat jejich opravy, za což mohli být odměněni speciálními bonusovými body. Díky tomu se studijní text ze semestru na semestr pozvolna zkvalitňuje, a je tak pro studenty snáze čitelný a srozumitelný. Navíc se zdá, že některé studenty hledání chyb k aktivní práci s textem významně motivovalo.

Řídčeji jsme se setkali také s hloubavými rozvíjejícími otázkami, ve kterých se projevoval hlubší zájem o látku. Příkladem může být následující komentář jednoho ze studentů u důkazu nesouměřitelnosti úhlopříčky čtverce s jeho stranou.

> *S tím, že to platí pro čtverec, nemá smysl diskutovat. Našel někdo informace na internetu, že to platí/neplatí i pro zajímavější útvary, třeba pro pětiúhelník? Bylo by fajn dostat odkaz na nějaký článek a nebo na video (nevadí, když to bude v angličtině).*

3.2 Dojmy a zkušenosti s prací v Perusallu

Práci v Perusallu oceňovali zejména studenti kombinovaného studia. U některých studentů jsme pozorovali velké nadšení z toho, že mohli v diskusi pomáhat svým spolužákům. Co se týče vlivu na znalosti studentů, tak ty přednášející na základě zkoušek hodnotil jako kvalitnější oproti předchozímu roku. Také pozoroval, že výkon u zkoušky zpravidla odpovídal tomu, kolik bodů student získal za průběžnou práci, což naznačuje přínos takovéto průběžné práce. Tato pozorování však teprve budou podrobena důkladnější analýze na základě dat.

Rezervy spatřujeme v tom, že studenti zejména prezenčního studia na sebe v diskusi příliš často navzájem nereagovali. Daleko častěji vkládali nové komentáře a odpovídali na předpřipravené otázky, než aby četli komentáře spolužáků a reagovali na ně. Opakovaně jsme se tak například setkali s komentáři, které obsahovaly nějakou věcnou nepřesnost, avšak zůstaly bez odezvy až do chvíle, kdy se k nim dostala vyučující. Do příští iterace bychom se tak chtěli na posílení vzájemné interakce studentů zaměřit. Například plánujeme nahrát do systému celý studijní text najednou a nastavit pravidelné termíny odevzdání jednotlivých úkolů již na začátku semestru, aby si studenti mohli práci volněji naplánovat a nebyli pod takovým tlakem jako v uplynulém roce, kdy kvůli dobíhajícím revizím textu musel být text zadáván ke čtení postupně po jednotlivých kapitolách. Studenti tak museli pracovat z týdne na týden, a někdy se tak ocitali v časové tísni, čemuž se do budoucna můžeme snadno vyhnout.

Dalším opatřením bude výše zmíněné rozvolnění hodnocení po uplynutí termínu odevzdání úkolu. V předmětu Funkce po učitele ZŠ a SŠ se také osvědčilo rozvolnit efekt kvality komentářů na jejich bodové ohodnocení tak, že se kvalitní komentáře hodnotí s plnou vahou, středně kvalitní s váhou 2/3 a nekvalitní komentáře s váhou 1/3. Zohledňování kvality komentářů při hodnocení považujeme za rozumné, systém však provádí hodnocení automaticky a do jisté míry záhadně, takže při příliš přísném hodnocení se studenti příliš soustředili na to, že se jim nedaří získat tolik bodů, kolik by chtěli. To jsme nepovažovali za žádoucí, protože nám šlo primárně o to, aby prostě pracovali a problémy s přísnějším nastavením hodnocení jsme považovali za zbytečně rušivý element. S prací v Perusallu se pojily také některé další technické nepříjemnosti jako například občasné potíže s vkládáním komentářů z některých zařízení, které v tomto příspěvku blíže nerozebíráme.

Rozhodli jsme se, že v příštím roce také oslabíme váhu těch parametrů hodnocení, které měří aktivitu studentů v rozhraní (počet otevření úkolu, ativně strávený čas a dočtení do konce), ve prospěch parametrů, které zdůrazňují sociální interakci studentů („Getting responses“ a „Upvoting“). Zejména bychom se studenty chtěli otevřeně mluvit o cílích práce v Perusallu a důležitosti vzájemné diskuse.

Závěr

Naším cílem v druhém roce projektu bylo nastavit strukturu kurzu tak, aby studenti jasně věděli, co konkrétně mohou dělat pro to, aby v kurzu uspěli, tj. aby okamžitě věděli, do jaké činosti se pustit, kdykoli se rozhodnou věnovat svůj čas studiu. Zároveň jsme se snažili, aby struktura hodnocení studentům poskytovala jistou volnost a umožňovala jim volit, jakým způsobem k plnění předmětu přistoupí a mohli tak hledat sobě vlastní studijní styl. Naším cílem nebylo, aby byla struktura kurzu svazující, ale naopak aby tato jasná struktura studentům pomáhala zaměřit pozornost přímo na práci a eliminovala zbytečné překážky jako jsou nadbytečná rozptýlení a zbytečné nejasnosti. Věříme, že právě kombinace jasných požadavků, volnosti ve volbě způsobu jejich plnění a přístupu k pomoci se studiem je klíčem ke kvalitnímu vzdělání. Perusall je jedním z nástrojů, který nám v projektu pomáhá tuto kombinaci realizovat. V posledním roce projektu plánujeme nabyté zkušenosti podrobněji teoreticky analyzovat a zasadit do rámce teorie *commognition* (Sfard, 2008).

Poděkování

Tento příspěvek byl podpořen projektem GAUK č. 458222 – Konstrukční výzkum úvodního kurzu matematické analýzy pro budoucí učitele matematiky 2. a 3. stupně.

Literatura:

[1] Furinghetti, F., & Radford, L. (2002). Historical conceptual develop ments and the teaching of mathematics: rethinking phylogenesis and ontogenesis. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 631–654). L. Erlbaum Associates.

[2] Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, I*. Leipzig: B.G. Teubner.

[3] Kvasz, L. (2017). Princípy genetického konštruktivizmu. *Orbis Scholae*, *2016*(2), 15-45. https://doi.org/10.14712/23363177.2017.1

[4] Larsen, S., Marrongelle, K., Bressoud, D., & Graham, K. (2017). Understanding the concepts of calculus: Frameworks and roadmaps emerging from educational research. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 526-550).

[5] Michal, J., Nižňanská, K., & Zenkl, D. (2022). *Toeplitzův genetický přístup a výuka matematické analýzy* Dva dny s didaktikou matematiky, Praha.

[6] Nižňanská, K. (2023). *(Potenciálně) nekonečné procesy na základní a střední škole* Jak učit matematice žáky ve věku 10-16 let, Ústí nad Labem.

[7] Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. Cambridge University Press. https://doi.org/doi:10.1017/CBO9780511499944

[8] Toeplitz, O. (1949). *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung: Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung Nach der Genetischen Methode*. Springer.

[9] Toeplitz, O. (2007). *The Calculus, A Genetic Approach*. The University of Chicago Press.

[10] Winsløw, C., & Grønbæk, N. (2014). Klein's double discontinuity revisited: contemporary challenges for universities preparing teachers to teach calculus. Recherches en Didactique des Mathématiques, 34(1), 59-86.

Kristýna Nižňanská
Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
M. D. Rettigové 4
116 39 Praha 1
e-mail: kristyna.niznanska@pedf.cuni.cz

PROGRAMY PRO 3D TISK NA ZÁKLADNÍ ŠKOLE

Petra Pirklová[1], Kateřina Čiháčková[2], Jiří Břehovský[1], Daniela Bímová[1]

[1] Katedra matematiky, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická, Technická univerzita v Liberci

[2] Základní škola, nám. Míru 212/2, Liberec

Abstrakt: V současné době zažívá technologie 3D tisku bouřlivý vývoj a nachází své uplatnění v mnoha odvětvích vědy a průmyslu. I z těchto důvodů je nezbytné seznamovat s principy a technologií 3D tisku žáky již na základní škole. V našem příspěvku uvedeme výsledky a závěry získané v rámci řešení diplomové práce s názvem „3D tisk na základní škole“. Představíme a porovnáme několik freeware softwarů vhodných pro 3D tisk a uvedeme jejich výhody a nevýhody vzhledem k jejich uplatnění pro výuku žáků prvního a druhého stupně základní školy.

Klíčová slova: Geometrie, vizuálně-prostorové schopnosti, 3D tisk, software, základní škola.

Software for 3D printing in elementary school

Abstract: Currently, 3D printing technology is experiencing a stormy development and finds its application in many branches of science and industry. For these reasons as well, it is necessary to introduce pupils to the principles and technology of 3D printing already in elementary school. In our contribution, we will present the results and conclusions obtained as part of the solution of the diploma thesis entitled "3D printing in elementary school". We will present and compare several freeware software suitable for 3D printing in elementary school.

Key words: Geometry, visual-spatial abilities, 3D printing, software, elementary school.

Úvod

V dnešní době jsou lidé na každém kroku obklopeni velkým množstvím digitálních technologií. Vzhledem k tomu, že digitální technologie jsou stále více propojovány s lidmi a jejich současným společenským životním stylem, informatika se mění. Lidé a digitální technologie jsou nyní součástí propojené sítě sociálních materiálů, v níž již nejsou jedinými aktéry [5]. Většina lidí používá digitální zařízení jako užitečné nástroje ve své práci, v procesu učení, pro komunikaci se svými spolupracovníky a přáteli, pro zábavu nebo z jiných důvodů. Aby mohli používat digitální zařízení co nejužitečnějším a nejefektivnějším způsobem a byli připraveni na práci 21. století, musí být žáci nejen digitálně gramotní, ale také rozumět klíčovým pojmům informatiky. Žáci musí pochopit, že informatika kombinuje teoretické principy a aplikační dovednosti. Potřebují být schopni algoritmického myšlení, jinými slovy informatického myšlení, a umět řešit problémy v jiných předmětech a v jiných oblastech svého života [4]. Je proto nezbytné zvyšovat schopnosti a dovednosti žáků v oblasti využívání informatiky i v ostatních oblastech vzdělávání.

I s ohledem na zmíněné souvislosti reaguje Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR revizí kurikula v oblasti informatického vzdělávání. Jeden z problémů, které vnímáme, je ten, že žáci nevědí, jak správně používat digitální technologie a software pro řešení problémů ve výuce matematiky. Jsme přesvědčení, že vhodným využitím moderních technologií ve výuce lze částečně kompenzovat objektivní těžkosti vzdělávacího procesu jako je například nízká časová dotace na výuku některých témat nebo nízká míra motivace žáků. V tomto kontextu se dlouhodobě zabýváme možnostmi využití 3D tisku jako efektivního nástroje pro rozvíjení vizuálně-prostorových schopností žáků, jejichž aspekty popisuje již Maier [7]. Na důležitost rozvíjení právě těchto schopností, které jsou nezbytné pro uplatnění absolventů v průmyslových a vědních odvětvích poukazují četné studie [8], [9]. Nejedná se pouze o zvyšování úrovně schopností, které mají uplatnění jen v geometrii, nebo v orientaci v prostoru, který nás obklopuje. Castro-Alonso & Uttal [3] a Georges, Cornu a Schiltz [6] dokládají, že vizuálně-prostorové schopnosti hrají významnou roli při rozvíjení aritmetických a algebraických dovedností žáků. Na mnoha základních školách se při výuce 3D tisk využívá. Využití a přístupy k němu jsou dosti rozdílné a závislé na individuálním přístupu vyučujících. Proto jsme se rozhodli zmapovat a analyzovat dosavadní situaci zejména v oblasti používaných programů při výuce 3D tisku na základních školách, výsledky našeho úsilí předkládáme.

1 Princip 3D tisku

Nejdříve představíme velmi zjednodušeně postup vzniku prostorového objektu při 3D tisku. Chce-li uživatel vytisknout objekt na 3D tiskárně, musí nejdříve naskenovat či vymodelovat daný objekt v sofistikovaném softwaru. Tento model je následně nutné exportovat do 3D souboru, který je nejčastěji uložen ve stereolitografickém formátu, neboli .stl formátu. Tento formát slouží pro ukládání a převádění návrhu prostorového modelu do softwaru 3D tiskáren.

Následně je soubor ve formátu .stl převeden do softwaru, který se nazývá „slicer“. Tento program, jednoduše řečeno, model „rozkrájí“ na jednotlivé tenké vrstvy, které jasně definuje a přesně umístí v prostoru. V tomto programu je možné model ještě dále editovat tak, aby byl následný tisk co nejefektivnější a hlavně úspěšný. Výstupním formátu sliceru je soubor s příponou .gcode. Tento soubor obsahuje všechny důležité informace pro 3D tiskárnu, včetně teploty při tisku, množství filamentu (materiál, ze kterého je výsledný objekt) atp., ale již není možné ho editovat. Tento soubor je pak přenesen na vhodném médiu přímo do 3D tiskárny, na které může být proveden tisk. 3D tisk se konkrétně provádí tak, že je roztavený materiál (filament) nanášen postupně v jednotlivých vrstvách na sebe, čímž je vymodelován prostorový objekt. Na současném trhu je velké množství různých typů 3D tiskáren a každá z nich má svá specifika. V tomto textu se však nechceme věnovat tiskárnám, ale 3D softwarům, ve kterých se modelují 3D objekty, které je pak možné na 3D tiskárnách vytisknout. Pro podrobné seznámení s 3D tiskem pro začátečníky doporučujeme k nahlédnutí diplomovou práci „3D tisk na základní škole“ [1], která byla obhájena v roce 2023 na TUL.

2 Bezplatné 3D softwary

V rámci zmíněné diplomové práce byl realizován dotazník mezi 113 pedagogy základních škol, který se týkal právě problematiky výuky 3D tisku na základních školách a programů užívaných při jeho výuce. Na základě zmíněného dotazníku bylo zjištěno, že se nejčastěji, z pochopitelných důvodů, používají na základních školách programy bezplatné, zejména Tinkercad, SketchUp, Blender, Onshape, Fusion360, Doodle3D, FreeCAD. Dle dotazníku bylo dále zjištěno, že se žáci seznamují s 3D tiskem zejména na druhém stupni, ale také již na prvním stupni základní školy. Pro každou skupinu vyučovaných žáků je však nutné vybírat vhodné modelovací programy tak, aby vyhovovaly jejich věku a dosud získaným schopnostem. K výše zmíněným programům byly přidány ještě programy Meshmixer a OpenSCAD, které se také hodí pro tvorbu 3D modelů. Všechny programy jsme zhodnotily a roztřídily podle přesnosti zadávání vstupních údajů a podle jejich náročnosti na obsluhu a tvorbu modelů.

K třídění a hodnocení softwarů bylo přistoupeno vzhledem k tomu, že jak se zvyšuje věk žáků během času, zvyšují se také jejich uživatelské zkušenosti. Program, který zprvu vyhovoval žákům-začátečníkům, tedy program, který je velmi jednoduchý na obsluhu, ale často s omezenými nástroji a modelovacími možnostmi, jim přestává stačit. Čím jsou pak žáci v tvorbě zdatnější, je nutné přejít k programům sice složitějším, ale s bohatšími možnostmi tvorby. Z toho důvodu se také pedagogové musí neustále vzdělávat v této oblasti a objevovat nové programy a jejich možnosti.

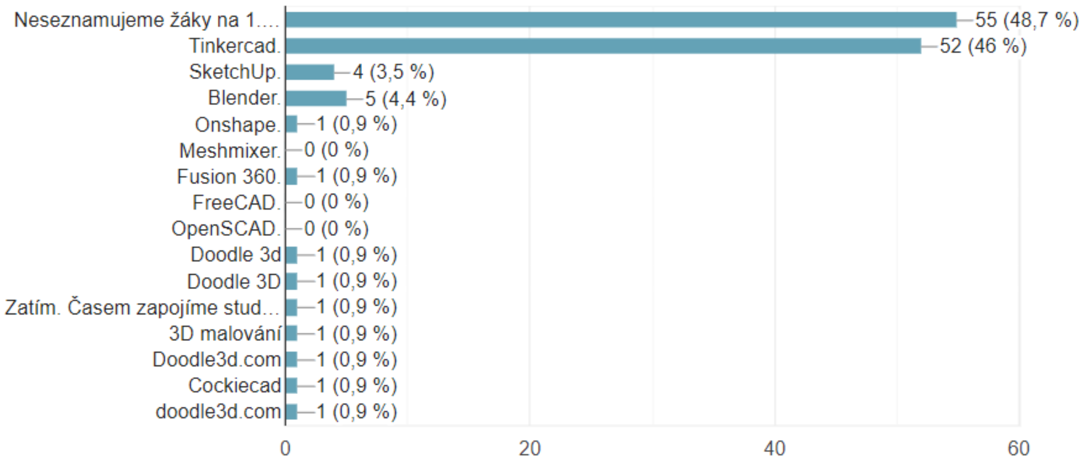
2.1 Hodnocení softwarů

Softwary vhodné pro 3D tisk lze v současné době rozdělit na dva základní typy podle přesnosti zadávání vstupních údajů. Softwary typu **sculpting** jsou spíše vhodné pro modelování nepravidelných tvarů podobně jako tvoří sochař. Naproti tomu softwary typu **3D CAD modeling** jsou určeny pro přesné parametrické modelování dle zadaných hodnot.

V následujících podkapitolách představíme stručně jednotlivé programy vhodné pro tvorbu 3D modelů na 1. a 2. stupni ZŠ, rozdělené podle jejich náročnosti na obsluhu a tvorbu modelů.

2.2 1. stupeň základní školy

Jak je vidět z dotazníku v [1] (viz Tabulka 1), zhruba pouze polovina pedagogů seznamuje žáky s 3D tiskem na 1. stupni. Jsme přesvědčeni, že se pedagogové nemusí obávat seznamovat i žáky nižšího školního věku s tvorbou modelů, protože existují programy, které jsou velmi vhodné právě pro tyto žáky. V Tabulce 1 je uveden výsledek průzkumu mezi pedagogy, jaký z programů nejčastěji na 1. stupni používají. Většina z nich používá program Tinkercad, další z nich (Sketcup, Blender, Doodle 3D) se pak objevují už jen v nižších jednotkách případů.

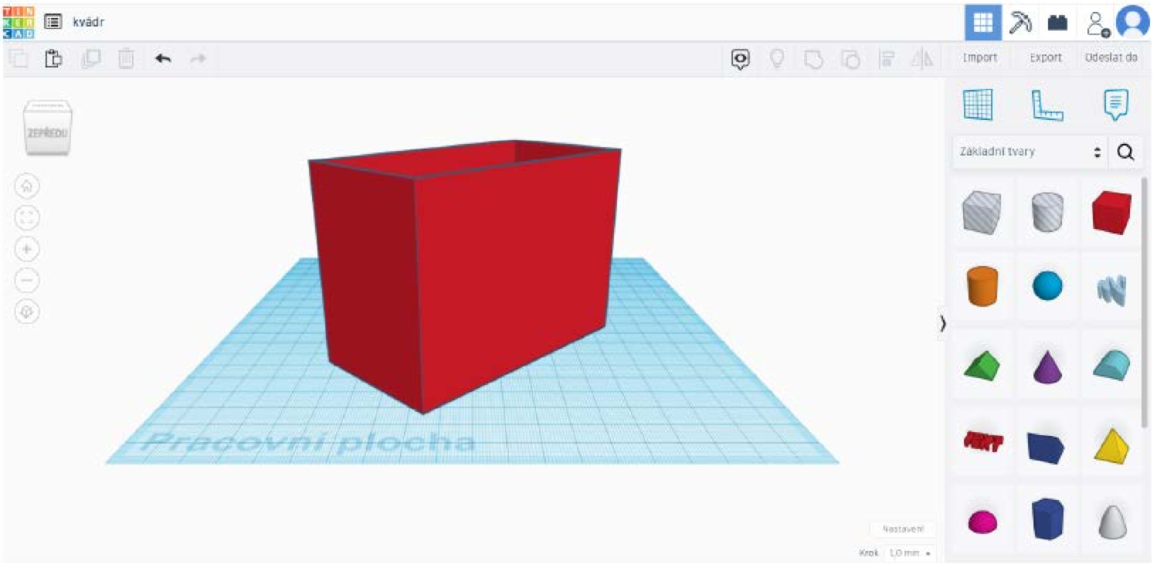


Tabulka 1: Zastoupení programů při výuce 3D tisku na 1. stupni [1]

Tinkercad

Z výsledků dotazníkového šetření uvedeného v [1] vyplývá, že právě Tinkercad je nejvíce využívaným programem pro výuku tvorby modelů pro 3D tisk a to na prvním i druhém stupni základní školy. Při modelování se zde používají základní tělesa jako jsou krychle, válec, koule atp. (viz obrázek 1), z nichž lze vytvářet složitější tělesa pomocí funkcí jako jsou „zarovnání“, „seskupení“, atd. Jak je patrno, tento program je vhodný pro sculpting nikoliv pro přesnější parametrické modelování.

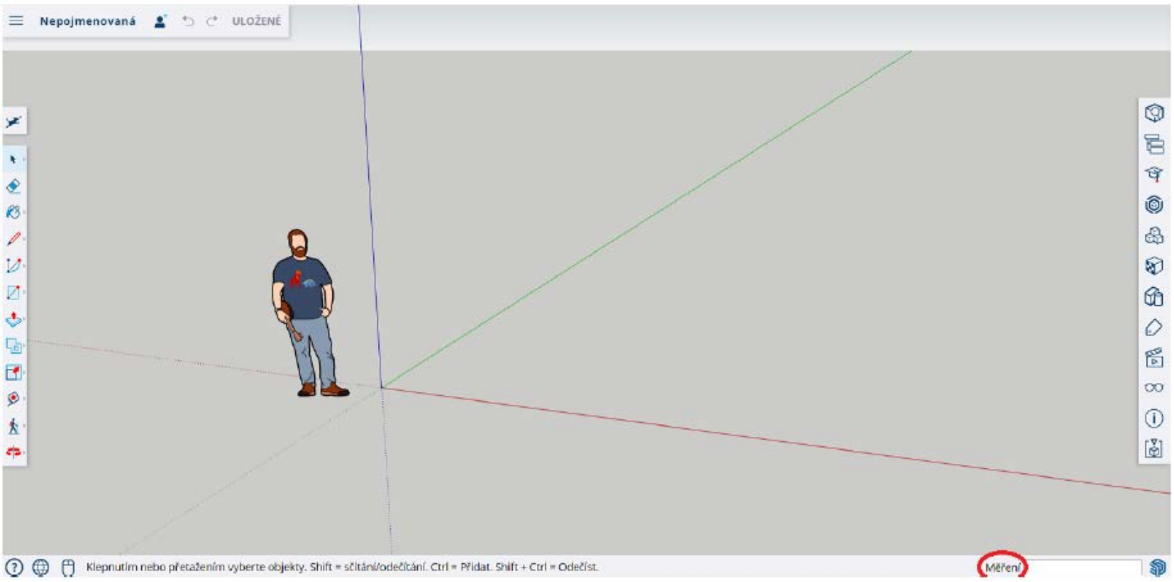
I přes tuto nevýhodu je program Tinkercad vhodný pro první seznámení s 3D modelováním, protože je velmi uživatelsky přívětivý a jednoduchý a i s minimálními předchozími zkušenostmi se jej žáci velmi rychle naučí obsluhovat. Na zkušenosti, které při používání tohoto programu nabydou pak mohou navázat při seznamování s dalšími programy.



Obrázek 1: Prostředí programu Tinkercad

SketchUp

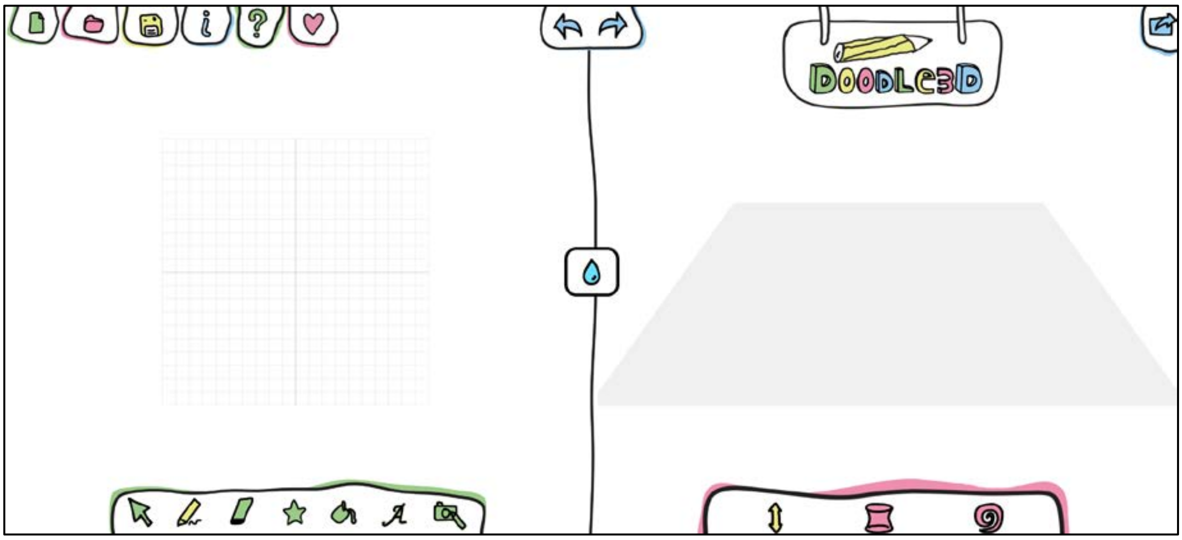
I tento program je typu sculpting. Je rovněž uživatelsky přívětivý a jeho rozhraní je intuitivní. Jeho nabídka nástrojů je však širší než u předchozího programu a také obsahuje širokou knihovnu před chystaných objektů, které lze volně stáhnout a použít při vlastním modelování (viz obrázek 2).



Obrázek 2: Prostředí SketchUp

Doodle 3D Transform

Doodle 3D Transform je webová aplikace, ve které se snadno a jednoduše kreslí 2D náčrtky, které se následně převádí na 3D obraz. Ovládání programu je velmi jednoduché, ale funkce a nabídka objektů je velmi omezená. Pro děti na prvním stupni však může být velmi atraktivní, protože prostředí je hravé a barevné (viz obrázek 3). Pro žáky druhého stupně bychom ho však z toho samého důvodu nedoporučili.

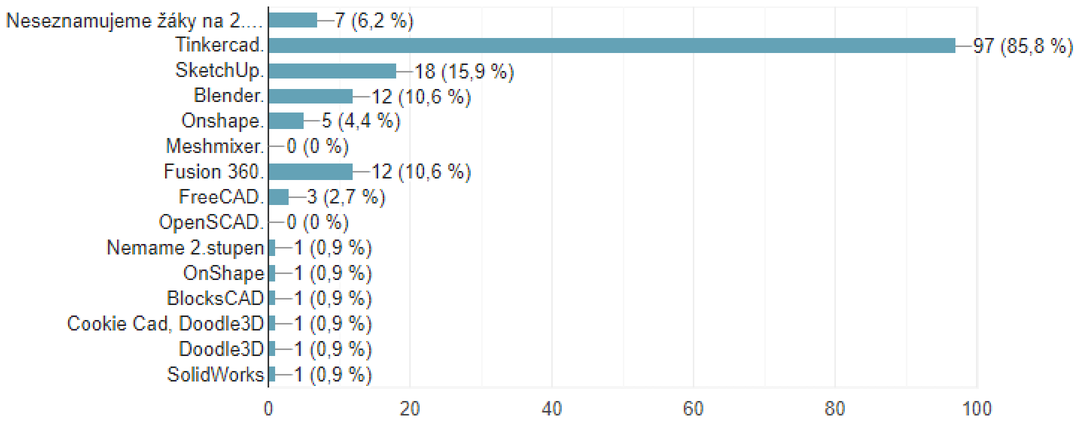


Obrázek 3: Prostředí Doodle 3d Transform

2.3 2. stupeň základní školy

V Tabulce 2 je opět vidět zastoupení programů při výuce 3D tisku tentokrát na druhém stupni základní školy [1]. Jak je vidno z prvního sloupce, téměř všichni žáci se na druhém stupni s 3D tiskem seznamují, což je potěšující. Nicméně i na druhém stupni je při výuce nejčastěji používán program Tinkercad.

Pokud žáci druhého stupně nemají s modelováním dřívější zkušenosti, jistě je vhodné začít také u nich s programy jako jsou Tinkercad a SketchUp. Není však nutné vzhledem k jejich věku u těchto programů setrvávat příliš dlouho a lze brzy přejít k programům složitějším, které ještě více prohloubí zkušenosti a dovednosti těchto žáků v oblasti informačních technologií. Níže proto uvádíme krátké představení programů, které jsou pro výuku 3D tisku žáků druhého stupně vhodnější.



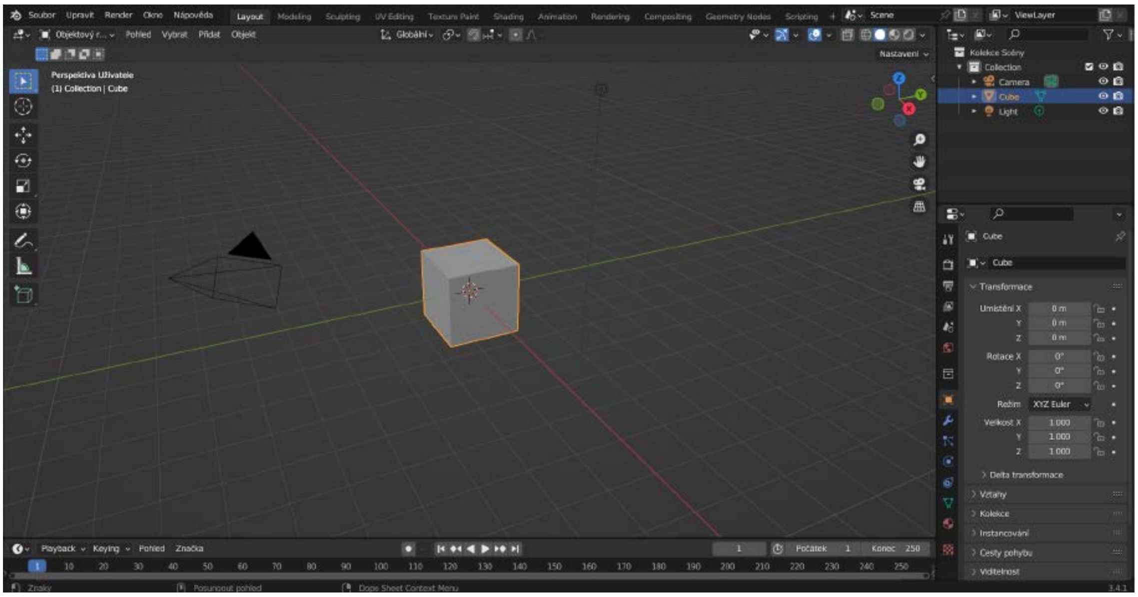
Tabulka 2: Zastoupení programů při výuce 3D tisku na 2. stupni [1]

Blender

Program Blender je profesionální nástroj pro sculpting. Dá se použít k mnoha způsobům modelování a tvorby včetně vizuálních efektů, animovaných filmů pohyblivé grafiky atd. V nabídce funkcí je mnoho možností např. změna textury, digitální kreslení a nejen tyto. Tyto možnosti však využívají velmi zkušení uživatelé.

Pro začátečníky vhodný není, jeho prostředí není příliš intuitivní a pro práci s ním je třeba předchozích zkušeností (viz obrázek 4).

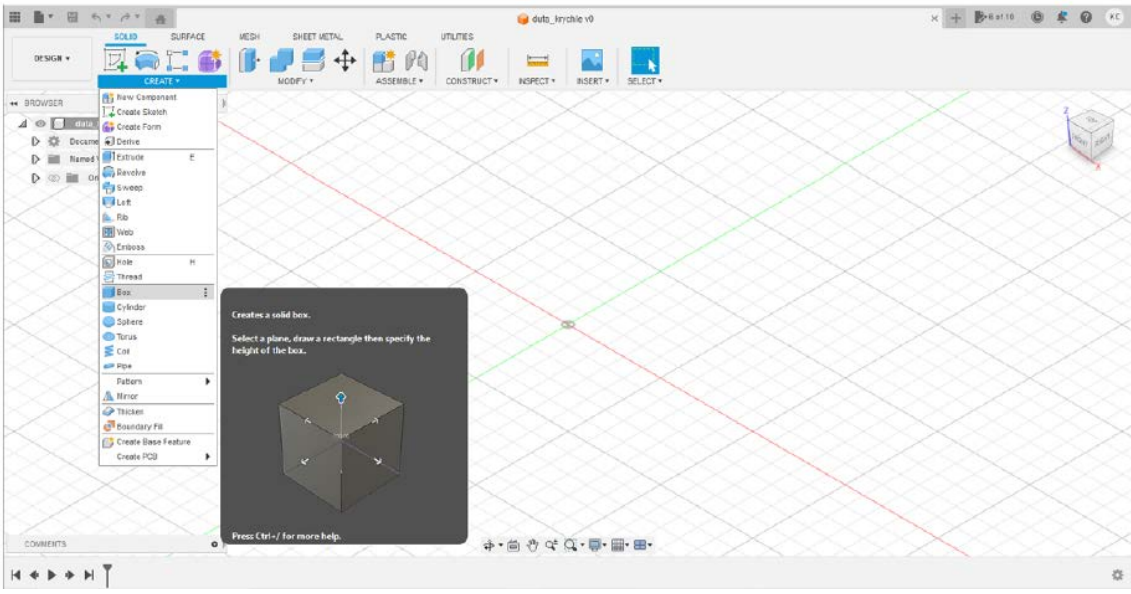
Někteří pedagogové uvedli tento program také jako program, který užívají na 1. stupni. Nicméně vzhledem k jeho složitosti bychom ho rozhodně doporučili až na 2. stupeň.



Obrázek 4: Prostředí Blender

Fusion360

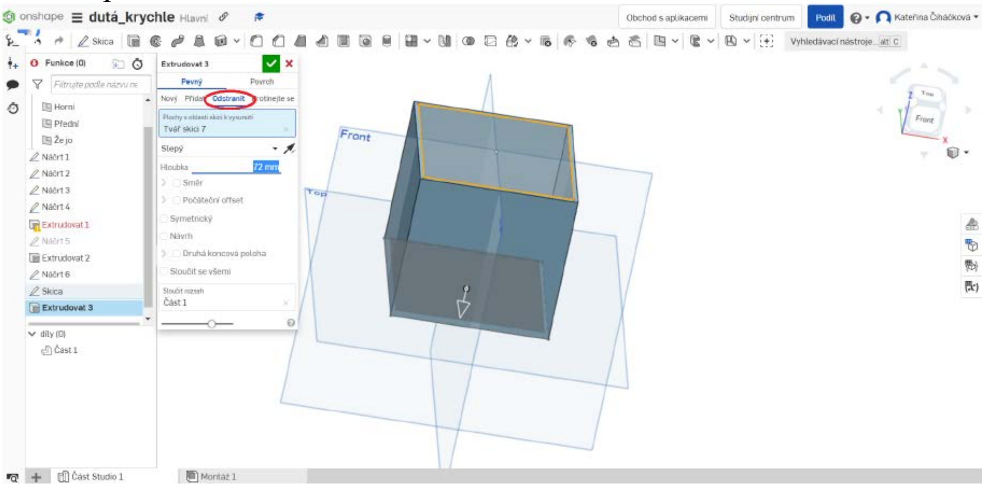
Fusion360 je program pro parametrické modelování. Relativně snadno se ovládá a jeho prostředí je přívětivé (viz obrázek 5), nicméně obsahuje mnoho pokročilých nástrojů, k jejichž užívání je třeba předchozích zkušeností.



Obrázek 5: Prostředí Fusion360

Onshape

Tento program má svou bezplatnou i placenou verzi. Bezplatná verze je vhodná pro učitele, žáky a fanoušky. Onshape je vhodný pro přesné parametrické modelování. Je to profesionální software používaný ve strojírenství. I když jeho prostředí je poměrně přívětivé, je rozhodně vhodné pro žáky druhého stupně (viz obrázek 6). Překážkou k jeho užívání může být také nedostupnost české verze programu a také to, že je cloudovým programem, tvorba modelů tedy probíhá v online prostředí.

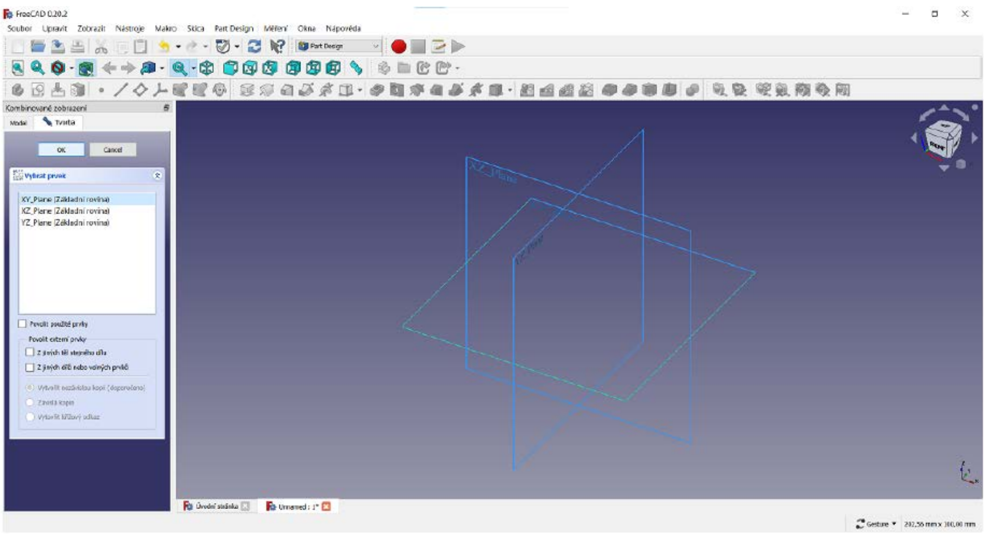


Obrázek 6: Prostředí Onshape

FreeCAD

Tento program je určen pro parametrické modelování. Obsahuje mnoho funkcí a nástrojů pro profesionály (viz obrázek 7) z oblastí jako jsou strojírenství, architektura a elektrotechnika. Navíc mohou uživatelé psát díky Pythonové konzoli makra a skripty.

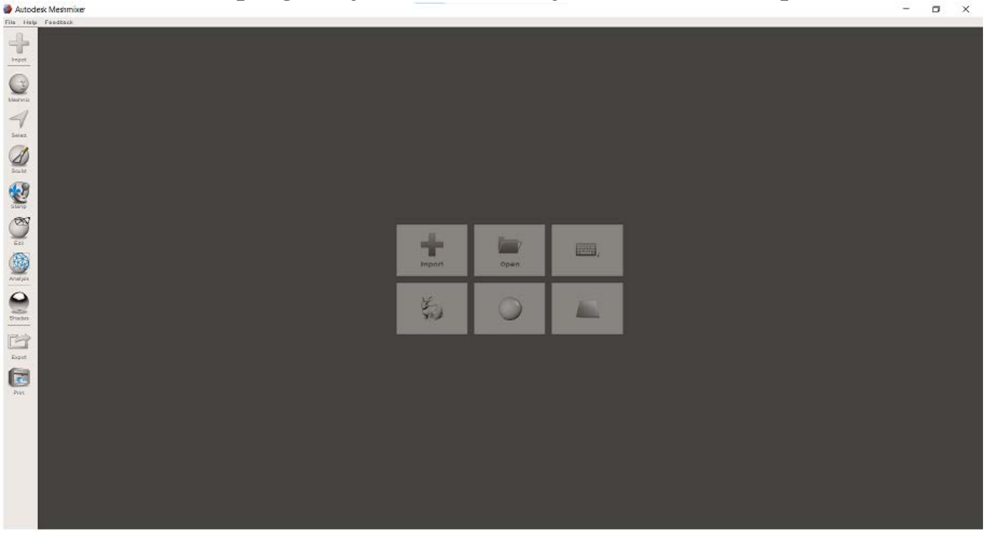
Vzhledem k používání pokročilých nástrojů je tento program vhodný pro nadané žáky druhého stupně, případně žáky στření školy.



Obrázek 7: Prostředí FreeCAD

Meshmixer

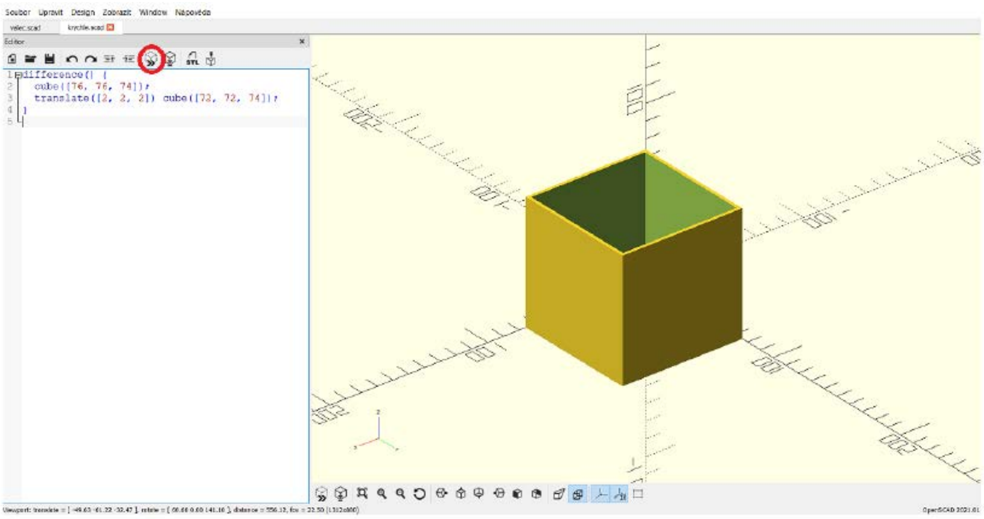
Tento program patří do kategorie sculpting (viz obrázek 8). Je zaměřen na tvorbu a úpravu 3D modelů vytvořených z trojúhelníkových sítí. Obsahuje velmi širokou škálu funkcí a nástrojů pro úpravu modelů. I tento program je určen nadanějším žákům 2. stupně.



Obrázek 8: Prostředí Meshmixer

OpenSCAD

Tento software patří mezi ty pro parametrické modelování. Jeho velkým rozdílem oproti všem výše zmiňovaným je to, že k modelování objektů se používá programovací jazyk, nikoliv jako u předešlých grafické rozhraní (viz obrázek 9). Z tohoto důvodu je tento program vhodný pro zkušené uživatele obeznámené s programováním. Z našeho pohledu spíše pro nadané žáky druhého stupně nebo žáky střední školy.



Obrázek 9: Prostředí OpenSCAD

GeoGebra

Na závěr se ještě zmíníme o možnosti tvorby 3D modelů v programu GeoGebra, protože je tento program velmi rozšířený a oblíbený. Přestože verze GeoGebra 6 umožňuje ukládat soubory ve formátu .stl, není tento program primárně určen k vytváření modelů pro 3D tisk, proto tento program nedoporučujeme.

	Online	*Offline*	*Registrace*	*Zdarma*	*Stupeň školy*
Tinkercad	✔	✗	✔	✔	1. stupeň
SketchUp	✔	✔	✔	✔	1. stupeň
Blender	✗	✔	✗	✔	2. stupeň
Onshape	✔	✗	✔	✔	2. stupeň
Meshmixer	✗	✔	✗	✔	2. stupeň
Fusion 360	✗	✔	✔	✔	2. stupeň
FreeCAD	✗	✔	✗	✔	2.-3. stupeň
OpenSCAD	✗	✔	✗	✔	2.-3. stupeň

Tabulka 3: Přehled freeware softwarů [1]

Všechny programy (jejich souhrnný přehled je uveden v tabulce 3) jsou ještě podrobněji popsány ve výše zmíněné diplomové práci. Navíc v této práci je podrobně představeno rovněž prostředí každého z programů a důkladně rozebrán postup krok po kroku při tvorbě stejných modelů, a to dutého kvádru, duté krychle a dutého válce. Tyto jednoduché modely byly vybrány proto, že s těmito tvary nejčastěji pracují začátečníci. Na krokovaných postupech pak uživatel-pedagog nejlépe pozná všechny důležité aspekty programů a dokáže pak nejlépe vybrat ten, který je pro jeho účely a žáky nejlepší.

3 Webová stránka *3dtisk-proskoly.cz*

Protože není mnoho souhrnných materiálů, které by se zaměřovali na představení 3D tisku a programů byla nejen sepsána uvedená diplomová práce [1], ale zároveň byla vytvořena webová stránka *3dtisk-proskoly.cz*. Tato stránka je primárně určena všem úplným začátečníkům, kteří by se rádi věnovali 3D tisku. Na těchto stránkách se každý může seznámit s technologií 3D tisku, tedy se vším, co je nutné znát, než zakoupí 3D tiskárnu, jak tiskárny fungují, jaké jsou jejich součásti, jaké jsou druhy tiskáren, jaké jsou druhy filamentů, jaké softwarové vybavení je nutné před samotným 3D tiskem atp.

Také je zde uveden seznam vhodných softwarů pro tvorbu 3D modelů. Všechny tyto programy jsou popsány, stručně uvedeny jejich výhody a nevýhody, je uveden odkaz, kde je získat a vždy je uvedeno doporučení pro jaké žáky je nejvhodnější. Součástí představení každého programu je krokovaná tvorba základních 3D modelů, aby každý uživatel mohl porovnat jednotlivé programy, jejich prostředí a specifika, a tak mohl vybrat ten nejvhodnější. A zároveň, aby se na jednotlivých příkladech modelování naučil základní ovládání těchto softwarů a seznámil se s jejich prostředím.

Navíc je zde také uložena databáze již hotových modelů, které je možné ihned vytisknout a používat při výuce nejen matematiky, ale také jiných předmětů. Některé z nich jsou také doplněny pracovními listy a metodickými poznámkami k jejich použití.

4 Závěr

V příspěvku jsou představeny různé programy vhodné pro modelování prostorových objektů pro následný 3D tisk. Všechny programy byly roztříděny zejména z pohledu vhodnosti jejich využití na různých stupních základní školy. Dále jsme představili diplomovou práci a www stránku *3dtisk-proskoly.cz*, která se zabývá právě problematikou 3D tisku na ZŠ a představili jsme webovou stránku zejména úplným začátečníkům a nejen jim, kteří by se chtěli 3D tisku věnovat. Doufáme, že tato webová stránka pomůže pedagogům zorientovat se v programech a tím se více věnovat s žáky ZŠ 3D tisku.

Literatura:

[1] Čiháčková, K. (2023). 3D tisk na základní škole. Diplomová práce TUL, 2023. Dostupná z: https://stag.tul.cz/StagPortletsJSR168/PagesDispatcherServlet?pp_destElement=%23ssSouboryStudentuDivId_1914&pp_locale=cs&pp_reqType=render&pp_portlet=souboryStudentuPagesPortlet&pp_page=souboryStudentuDownloadPage&pp_nameSpace=G229301&soubidno=109584

[2] https://3dtisk-proskoly.cz/

[3] Castro-Alonso, J., & Uttal, D. (2019). Science education and visuospatial processing. In J. C. Castro-Alonso (Ed.), Visuospatial Processing for Education in Health and Natural Sciences (pp. 53–79). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20969-8_3

[4] Dagiene, V., Stupuriene, G. (2016). Informatics Concepts and Computational Thinking in K-12 Education: A Lithuanian Perspective. Journal of Information Processing Society of Japan, Vol. 24, No. 4, pp. 732-739. doi: 10.2197/ipsjjip.24.732.

[5] Frauenberger, Ch., Purgathofer, P. (2019). Ways of Thinking in Informatics. Communications of the ACM, Vol. 62, No. 7, doi: 10.1145/3329674.

[6] Georges, C., Cornu, V., & Schiltz, C. (2019). Spatial skills first: The importance of mental rotation for arithmetic skill acquisition. Journal of Numerical Cognition, 5(1), 5–23. https://doi.org/10.5964/jnc.v5i1.165

[7] Maier, P. H. (1994). Räumliches Vorstellungsvermögen - Komponenten, geschlechtsspezifische Differenzen, Relevanz, Entwicklung und Realisierung in der Realschule. Frankfurt a.M.: Peter Lang

[8] Mulligan, J. (2015). Looking within and beyond the geometry curriculum: connecting spatial reasoning to mathematics learning. ZDM Mathematics Education, 47(3), 511–518.

[9] Wai, J., Lubinski, D., & Benbow, C. (2009, 11/01). Spatial ability for STEM domains: Aligning over 50 years of cumulative psychological knowledge solidifies its importance. Journal of Educational Psychology, 101(4), 817–835. https://doi.org/10.1037/a0016127

Mgr. Petra Pirklová, Ph.D.
Katedra matematiky, FP TUL
Studentská 1402/2, 461 17 Liberec
e-mail: petra.pirklova@tul.cz

Mgr. Kateřina Čiháčková
Základní škola, Liberec, nám. Míru 212/2, příspěvková organizace
nám. Míru 212/2, 460 01 Liberec
e-mail: cihackova.katerina@zsnamestimiru.cz

Mgr. Jiří Břehovský, Ph.D.
Katedra matematiky, FP TUL
Studentská 1402/2, 461 17 Liberec
e-mail: jiri.brehovsky@tul.cz

Mgr. Daniela Bímová, Ph.D.
Katedra matematiky, FP TUL
Studentská 1402/2, 461 17 Liberec
e-mail: daniela.bimova@tul.cz

PRÍPRAVA BUDÚCICH UČITEĽOV MATEMATIKY V DIGITÁLNEJ DOBE

Mária Slavíčková

Univerzita Komenského v Bratislave

Abstrakt: V príspevku sa zameriavame na niektoré výsledky dlhodobého výskumu implementácie digitálnych technológií do prípravy budúcich učiteľov matematiky, najmä ich zaradenie ako do matematickej, tak didaktickej časti ich prípravy. Na ukážkach študentských prác demonštrujeme ich schopnosti aplikácie nadobudnutých vedomostí pri návrhu vyučovacích sekvencií.

Klíčová slova: Digitálne technológie, príprava učiteľov, výuka matematiky, didaktika.

Preparation of future mathematics teachers in the digital age

Abstract: In the article, we focus on some results of long-term research on the implementation of digital technologies in the training of future mathematics teachers, especially their inclusion in both the mathematical and didactic parts of their training. Through examples of student work, we showcase their capability to effectively apply the knowledge they've gained in developing teaching sequences.

Key words: Digital technologies, teacher training, teaching mathematics, didactics.

Článek je publikován v časopise *South Bohemia Mathematical Letters*, Vol. 31 (2023), No. 1

Dostupné z: https://home.pf.jcu.cz/~sbml

KRITICKÉ A TVOŘIVÉ VYUŽÍVÁNÍ DYNAMICKÉ GEOMETRIE V MATEMATICE ZÁKLADNÍ ŠKOLY

Lukáš Vízek

Univerzita Hradec Králové

Abstrakt: Geometrie ve školské matematice vystupuje ve dvou rolích, na jedné straně představuje předmět přirozeně zakotvený v antických Eukleidových Základech, na druhé straně přijímá podobu z moderního světa dynamických počítačových technologií. Současné geometrické vzdělávání usiluje o protnutí těchto rolí, přenáší klasické přístupy do dynamických prostředí a nachází významy geometrických softwarů pro práci a porozumění v antickému oboru. Využívání dynamických prostředí v rovinné geometrii na druhém stupni základní školy je ovlivněno výsledky výzkumných šetření a vlastními pedagogickými zkušenostmi s užitím počítačů ve vyučování. Implikuje vedení studentů k správnému, kritickému a tvořivému používání moderních technologií, neboť orientace v digitálním prostředí je předpokládána jako nový cíl základního vzdělávání při současné revizi Rámcového vzdělávacího programu.

Klíčová slova: Dynamická geometrie, základní škola, geometrické konstrukce, klasifikace geometrických objektů, argumentace.

Critical and creative use of dynamic geometry in mathematics at lower secondary school

Abstract: Geometry in school mathematics plays two roles, on the one hand, it represents a field naturally rooted in the ancient Euclid's Elements, on the other, it adopts a form from the modern world of dynamic computer technologies. Contemporary geometry education seeks to bridge these roles while transferring classical approaches into dynamic environments and finding the significance of geometry software for working and understanding in the ancient discipline. The use of dynamic environments in plane geometry at the level of lower secondary school is influenced by the results of research investigations and teaching experience with the use of computers in the classroom. It implies guiding students to use modern technologies correctly, critically and creatively, since orientation in digital environments is assumed as a new goal of primary and secondary education in the current revision of the curriculum documents.

Keywords: Dynamic geometry, lower secondary school, geometric construction, classification of geometric objects, argumentation

Článek je publikován v časopise *South Bohemia Mathematical Letters*, Vol. 31 (2023), No. 1

Dostupné z: https://home.pf.jcu.cz/~sbml

BLENDED LEARNING VE VÝUCE GEOMETRIE

Šárka Voráčová

Katedra aplikované matematiky, ČVUT v Praze Fakulta dopravní

Abstrakt: Výuka, kombinující distanční formu s podporou vhodných IT a prezenční konzultace, je efektivní výukový přístup, jenž je možné úspěšně aplikovat i při výuce geometrie. Použití vhodného software výuku přirozeně diferencuje, individuální přístup pomáhá nahradit formální znalosti a přispívá k osvojování užitečných návyků a strategií.

Klíčová slova: distanční výuka, e-learning, blended learning, umělá inteligence.

Blended Learning in the Teaching of Geometry

Abstract: The teaching, combining the distance form with the support of appropriate IT and face-to-face consultation, is an effective teaching approach that can be successfully applied even when teaching geometry. The use of appropriate software naturally differentiates teaching, an individual approach helps to replace formal knowledge and contributes to the acquisition of useful habits and strategies.

Key words: distance learning, e-learning, blended learning, artificial intelligence.

Článek je publikován v časopise *South Bohemia Mathematical Letters*, Vol. 31 (2023), No. 1

Dostupné z: https://home.pf.jcu.cz/~sbml

Název:	Sborník příspěvků 11. konference Užití počítačů ve výuce matematiky
Vydavatel:	Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Editoři:	Roman Hašek, Přemysl Rosa
Vydání:	1.
Počet stran:	148
Rok vydání:	2023
ISBN	978-80-7694-059-8