

Badatelské úlohy ve vyučování matematice

Libuše Samková

Katedra matematiky, Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity v Českých
Budějovicích

Abstrakt: Tento příspěvek nabízí možnou odpověď na otázku, jaké úlohy zařazovat při badatelsky orientovaném vyučování matematice. V úvodu jsou stručně vymezeny různé typy úloh, které se při tomto vyučování mohou uplatnit: badatelské úlohy, otevřené úlohy a polyvalentní úlohy. V hlavní části příspěvku je podrobně představena jedna z badatelských úloh, která je polyvalentní i otevřená. Při vhodném uchopení je tato úloha využitelná při badatelsky orientovaném vyučování nezávisle na stupni vzdělávání (ZŠ, SŠ, VŠ).

Klíčová slova: BOVM, badatelsky orientované vyučování matematice, badatelská úloha, otevřená úloha, polyvalentní úloha.

Inquiry tasks in mathematics teaching

Abstract: This contribution offers a possible answer to a question which tasks can be used in the classroom within inquiry based mathematics teaching. In the introduction, we shortly characterize various types of tasks that can be utilized within this type of teaching: inquiry tasks, open tasks, and polyvalent tasks. The main part of the contribution introduces in detail one of inquiry tasks that is open and polyvalent. When properly arranged, the task can be employed independently of the school level (elementary, secondary, higher).

Key words: IBME, inquiry based mathematics education, inquiry task, open task, polyvalent task.

Úvod

Čtenáře, kteří neznají badatelsky orientované vyučování, si dovoluji odkázat na svůj příspěvek, který se objevil na jedné z předchozích konferencí a který se vymezení tohoto stylu vyučování věnuje [6]. Mnoho dalších podrobností a různých souvislostí týkajících se historie a vymezení badatelsky orientovaného vyučování (nejen) matematice naleznete v první polovině souhrnného článku [14] a v kapitole [12].

Zjednodušeně lze říci, že badatelsky orientované vyučování je vyučování, při kterém dochází k badatelským aktivitám žáků či studentů. Úlohy podněcující takové badatelské aktivity budeme nazývat *badatelské úlohy*.

Badatelské úlohy bývají zpravidla *úlohami otevřenými* ve smyslu otevřeného přístupu k matematice, což znamená, že u nich může existovat

- více způsobů, jak úlohu uchopit;
- více způsobů, jak úlohu řešit;
- více různých řešení (někdy i s nejasnou klasifikací);
- více způsobů, jak z úlohy vytvořit úlohu novou.

Obzvláště cennými jsou pak *úlohy polyvalentní*, což jsou otevřené úlohy, jejichž jednotlivá řešení jsou různě obtížná a každý žák/student si tak může najít "své" řešení odpovídající jeho znalostem.

Jednu takovou polyvalentní úlohu si nyní podrobně představíme. Její zadání jsem volně přeložila z publikace [4] a po mnoha ostrých testech upravila, aby lépe vyhovovalo plánovanému rozfázování úlohy a jejímu dalšímu didaktickému rozpracování. Oproti původnímu zadání tak například přibyla pravidla P1 a P2.

Pehkonenova úloha -- zadání

Z 12 stejně dlouhých párátek můžeme vytvořit obrys čtverce, jehož obsah je 9 čtverečných párátek (zkráceně čp).

Dokážete z 12 párátek vytvořit obrys rovinného útvaru s obsahem 8, 7, 6, 5 čp?

Je třeba využít všechna párátka a dodržovat následující dvě pravidla:

- P1) párátko se mohou dotýkat pouze svými konci;*
- P2) každý konec párátko se dotýká právě jednoho jiného párátko.*

Kolik existuje útvarů s obsahem 5 čp? Je jich víc než 10? (Za různé považujeme takové útvary, které nelze převést jeden na druhý otočením a/nebo převrácením.)

Dokážete vytvořit obrysy rovinných útvarů s obsahem 4, 3, 2, 1 čp?

Dokážete vytvořit obrys rovinného útvaru s obsahem větším než 9 čp?

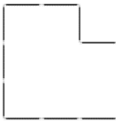
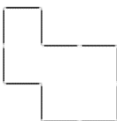
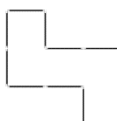
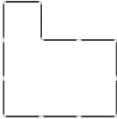
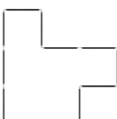
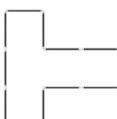
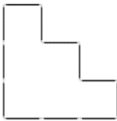
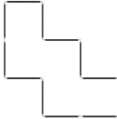
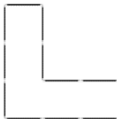
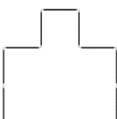
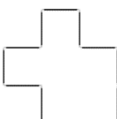
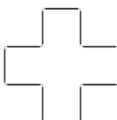
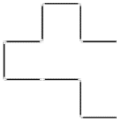
Jaký je nejmenší možný obsah? Jaký je největší možný obsah?

Řešení úlohy

Jak se ukázalo po několika ostrých testech úlohy, nejčastěji používaný prvoplánový postup řešení vychází z obrysu čtverce zmiňovaného v zadání úlohy a z úpravy, která by se mohla nazývat *prolamování rohů* nebo také *rohová úprava*. Tato úprava spočívá v přemístění dvou párátek tvořících některý z rohů útvaru tak, aby se obsah útvaru zmenšil o 1 čp.

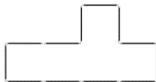
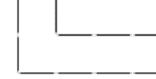
Jednotlivá řešení, jež můžeme získat z obrysu čtverce opakovaným uplatněním této úpravy, jsou znázorněna v Tabulce 1. Tabulka je uspořádána tak, že vybereme-li si nějaký útvar uvedený v tabulce, tak v sousedních buňkách vpravo jsou umístěny útvary, které se z vybraného útvaru dají vytvořit jednou rohovou úpravou. Výčtem útvarů je tabulka kompletní, ale některé útvary je samozřejmě možné z původního čtverce získat i jiným pořadím rohových úprav. Pro přehlednost je každý sloupec tabulky v záhlaví opatřen údajem o obsahu útvarů, které se v něm nacházejí.

Tab. 1: Řešení získaná z obrysu čtverce pomocí rohové úpravy.

S = 9 čp	S = 8 čp	S = 7 čp	S = 6 čp	S = 5 čp
				
				
				
				
				
				

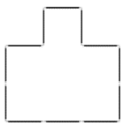
Tímto způsobem jsme však rozhodně nezískali všechna řešení Pehkonenovy úlohy. Kromě obrysu čtverce totiž z 12 párátěk můžeme vytvořit i obrysy jiných známých geometrických útvarů, například obdélníků, a i na ně se můžeme pokusit uplatnit rohovou úpravu. Ukáže se, že na obdélník o rozměrech 2 a 4 párátka je možno rohovou úpravu uplatnit, ale na obdélník o rozměrech 1 a 5 párátěk ji uplatnit nelze (viz Tabulka 2).

Tab. 2: Řešení získaná z obrysu obdélníků pomocí rohové úpravy.

S = 8 čp	S = 7 čp	S = 6 čp	S = 5 čp
			
			
			
			

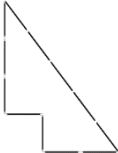
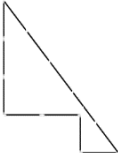
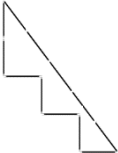
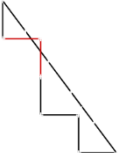
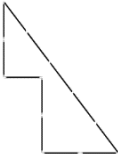
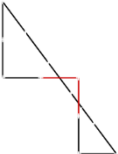
Pokud bychom se chtěli s úlohou pohybovat pouze v kontextu jednotkové čtvercové sítě, máme už téměř všechna řešení nalezena. Obrys žádného jiného útvaru již na této síti neleží, ale přesto nám jedno řešení chybí – není totiž dostupné pomocí rohové úpravy. Využívá analogické úpravy, kterou bychom mohli nazývat *prolamování dvojrohů* nebo také *dvojrohová úprava*. Tato úprava spočívá v přemístění tří párátěk tvořících dva sousední rohy útvaru tak, aby se obsah útvaru zmenšil o 2 čp. Z útvarů znázorněných v Tabulkách 1, 2 můžeme dvojrohovou úpravu použít pouze na jediný; získáme tak chybějící poslední řešení na jednotkové čtvercové síti (viz Tabulka 3).

Tab. 3: Jediné řešení získané pomocí dvojrohové úpravy (vpravo).

S = 7 čp	S = 5 čp
	

Mimo jednotkovou čtvercovou síť máme mnoho dalších možností. Pythagorejský trojúhelník se stranami 3, 4 a 5 párátěk sice může mít vrcholy umístěné v bodech jednotkové čtvercové sítě, ale jeho přepona je mimo síť. Tento trojúhelník má obsah 6 čp a na jeho obrys můžeme opakovaně uplatnit rohovou úpravu. Musíme jen dávat pozor, kdy je úprava ještě možná a kdy už ne (viz Tabulka 4).

Tab. 4: Řešení získaná z obrysu pythagorejského trojúhelníku pomocí rohové úpravy; v posledním sloupci případy, kdy rohová úprava již není možná.

S = 6 čp	S = 5 čp	S = 4 čp	S = 3 čp	nelze
				
				

Z dalších známých geometrických útvarů na první pohled žádný nevypadá, že by ho bylo možné umístit svými vrcholy do bodů jednotkové čtvercové sítě, ale pokud bychom chtěli mít jistotu, museli bychom systematicky procházet geometrické útvary jeden po druhém a podrobně je zkoumat. Podobně není jasné, jestli ještě nějaké další rovinné útvary mohou mít celočíselný obsah. Pokusíme se teď obě záležitosti v rámci možností objasnit najednou – systematickým zkoumáním.

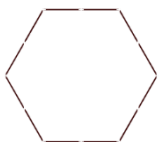
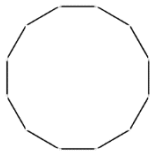
Jako první krok tohoto zkoumání musíme zjistit, obrysy kterých známých geometrických útvarů je ještě možné z 12 párátěk vytvořit, a pak určit obsahy těchto útvarů. Po nahlédnutí do školních matematických tabulek zúžíme hledání na trojúhelníky, pravidelné mnohoúhelníky, lichoběžníky, kosodélníky a kosočtverce.

Otázka hledání všech trojúhelníků, jejichž obrys je možné vytvořit z 12 párátěk, je pěkným kombinatorickým cvičením založeným na trojúhelníkové nerovnosti. Přestože by člověk mohl mít pocit, že takových trojúhelníků musí existovat mnoho, ve skutečnosti existují pouze tři. Kromě již výše zmiňovaného pythagorejského trojúhelníku už existuje jen rovnostranný trojúhelník se stranou o délce 4 párátka a rovnoramenný trojúhelník se základnou o délce 2 párátka a rameny o délce 5 párátěk. Obecný trojúhelník žádný neexistuje. Obsah rovnostranného ani rovnoramenného trojúhelníku není celočíselný, protože jejich výška není celočíselná (rameno a polovina základny mají sice celočíselnou velikost, ale nepatří do žádné pythagorejské trojice). Ze stejného důvodu nelze vrcholy těchto dvou trojúhelníků umístit do bodů jednotkové čtvercové sítě.

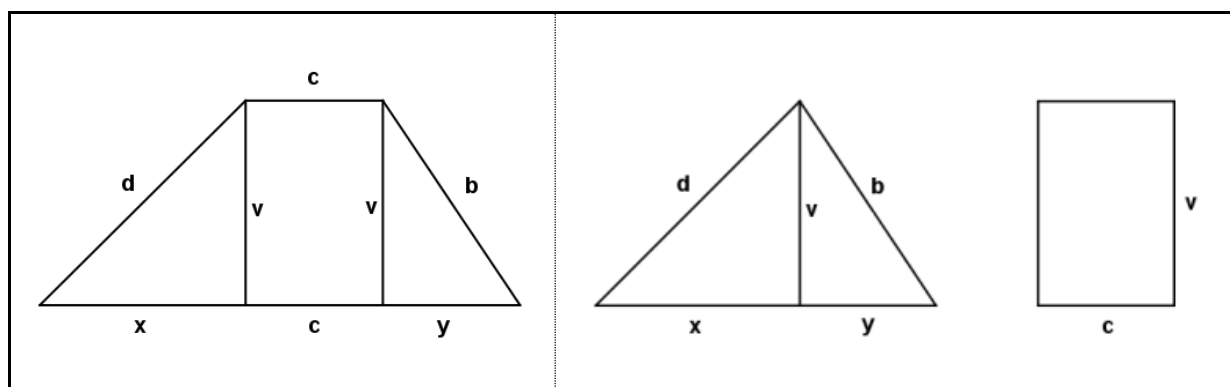
Pravidelné mnohoúhelníky, jejichž obrys je možné vytvořit z 12 párátěk, existují také jen tři. Kromě již výše zmiňovaného rovnostranného trojúhelníku se jedná o pravidelný šestiúhelník (se stranou o délce 2 párátka) a pravidelný dvanáctiúhelník (se stranou o délce 1 párátka). Jejich obsah není celočíselný, ale je zajímavý tím, že je větší než 9 čp. Jejich vrcholy opět nelze umístit do bodů jednotkové čtvercové sítě.

Nově nalezené trojúhelníky a pravidelné mnohoúhelníky jsou uvedené v Tabulce 5.

Tab. 5: Další trojúhelníky a pravidelné mnohoúhelníky.

			
$S = 4\sqrt{3} \text{ čp}$	$S = 2\sqrt{6} \text{ čp}$	$S = 6\sqrt{3} \text{ čp}$	$S = 3(2 + \sqrt{3}) \text{ čp}$

Otázka hledání všech lichoběžníků je poněkud komplikovanější, vyžaduje vhodné rozložení lichoběžníku na menší útvary – obdélník a dva pravoúhlé trojúhelníky s jednou stejně dlouhou odvěsnou; po přiložení těchto trojúhelníků k sobě vznikne nový trojúhelník (viz Obr. 1). Obrys lichoběžníku je tvořen složením obrysu tohoto nového trojúhelníku a obrysem dvou vodorovných stran obdélníku.



Obr. 1: Rozdělení lichoběžníku na obdélník a dva trojúhelníky

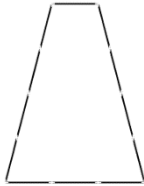
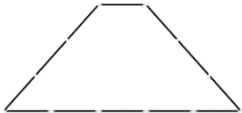
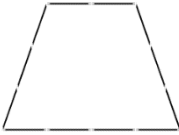
Pokračujeme opět systematicky:

- Pokud mají vodorovné strany obdélníku délku 1 párátko (tj. $c = 1$), zbyde na trojúhelník 10 párátek. Z 10 párátek můžeme sestavit 2 různé trojúhelníky, oba jsou rovnoramenné: první s rameny o délce 4 párátko a základnou o délce 2 párátko (tj. $b = d = 4, x = y = 1$), druhý s rameny o délce 3 párátko a základnou o délce 4 párátko (tj. $b = d = 3, x = y = 2$).
- Pokud mají vodorovné strany obdélníku délku 2 párátko, zbyde na trojúhelník 8 párátek. Z nich můžeme sestavit 1 trojúhelník, opět rovnoramenný: s ramenem délky 3 párátko a základnou délky 2 párátko ($b = d = 3, x = y = 1$).
- Pokud mají vodorovné strany obdélníku délku 3 párátko, zbyde na trojúhelník 6 párátek. Z nich můžeme sestavit 1 trojúhelník, tentokrát rovnostranný o straně délky 2 párátko ($b = d = 2, x = y = 1$).
- Pokud mají vodorovné strany obdélníku délku 4 párátko, zbydou na trojúhelník 4 párátko. Ze 4 párátek trojúhelník nelze sestavit.
- Pokud mají tyto vodorovné strany délku 5 párátek, zbydou na trojúhelník 2 párátko, což je málo. Trojúhelník nelze sestavit.

Protože všechny nalezené trojúhelníky mají stejně dlouhá ramena, budou stejně dlouhá i ramena vzniklých lichoběžníků. Žádný z nalezených trojúhelníků není pravoúhlý, takže ani žádný z lichoběžníků nebude pravoúhlý.

Všechny nalezené rovnoramenné lichoběžníky jsou znázorněny v Tabulce 6. Výpočet obsahu těchto lichoběžníků není obtížný, neboť jejich výška je zároveň výškou nad základnou rovnoramenného trojúhelníku; pata výšky je tedy umístěna ve středu základny. Jelikož je navíc délka základny vždy sudé číslo, tak se do Pythagorovy věty dosazují celá čísla. Ale vypočtené výšky nejsou celočíselné, tak ani obsahy nejsou celočíselné a vrcholy lichoběžníků nelze umístit do bodů jednotkové čtvercové sítě.

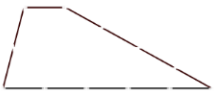
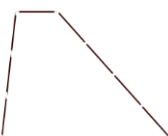
Tab. 6: Rovnoramenné lichoběžníky.

			
$S = 2\sqrt{15}$ čp	$S = 3\sqrt{5}$ čp	$S = 3\sqrt{8}$ čp	$S = 4\sqrt{3}$ čp

Nesmíme ovšem zapomenout i na varianty, kdy nalezené rovnoramenné trojúhelníky při tvorbě lichoběžníku otočíme tak, aby jedno jejich rameno bylo umístěno vodorovně. Potom vzniknou lichoběžníky s různě dlouhými rameny (jedno rameno lichoběžníku je tvořeno

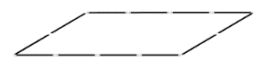
ramenem trojúhelníku a druhé rameno je tvořeno základnou trojúhelníku). Určení obsahu těchto lichoběžníků je mnohem obtížnější, neboť patu výšky v takto otočeném trojúhelníku nelze jednoduše určit a pro výpočet výšky je nutno využít složitější aparát, např. kosinovou větu a vztah mezi sinem a kosinem stejného úhlu. Výsledné nerovnoramenné lichoběžníky a jejich obsahy uvádí Tabulka 7.

Tab. 7: Nerovnoramenné lichoběžníky.

		
$S = \frac{14}{3} \sqrt{2} \text{ čp}$	$S = \frac{3}{2} \sqrt{15} \text{ čp}$	$S = \frac{10}{3} \sqrt{5} \text{ čp}$

Ne náhodou nám závěr zbyly kosodélníky a kosočtverce – krátké zamyšlení nad tím, co určuje obsah libovolného rovnoběžníku (základna a výška), nás totiž dovede k univerzálnímu řešení Pehkonenovy úlohy: při vhodném zkosení dokážeme vytvořit kosodélník nebo kosočtverec o libovolném obsahu menším než 9 čp. Například zkosením čtverce ze zadání Pehkonenovy úlohy můžeme vytvořit kosočtverec o obsahu 6 čp (pokud strany zkosíme tak, aby výška byla 2 párátko) i kosočtverec o obsahu 3 čp (je-li výška 1 párátko). Můžeme samozřejmě dostat i kosočtverce nebo kosodélníky s neceločíselným obsahem (i libovolně malým), stačí zvolit vhodnou neceločíselnou výšku útvaru. Tabulka 8 znázorňuje čtyři různé rovnoběžníky o výšce 1 párátko.

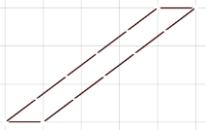
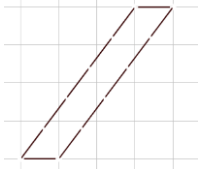
Tab. 8: Kosodélníky a kosočtverec.

	$S = 1 \text{ čp}$
	$S = 2 \text{ čp}$
	$S = 3 \text{ čp}$
	$S = 4 \text{ čp}$

Na první pohled to vypadá, že vrcholy rovnoběžníků opět nepůjdou umístit do bodů jednotkové čtvercové sítě. Ale není to pravda. Aby bylo umístění možné, musí být výška

rovnoběžníku celočíselná a zároveň musí být celočíselný i rozestup mezi sousedními vrcholy ve vodorovném směru. V praxi to znamená, že pravoúhlý trojúhelník pod dolní zkosenou stranou musí být pythagorejský. Protože nejmenší pythagorejský trojúhelník má přeponu o délce 5, může taková situace nastat pro kosodélník vzniklý zkosením stejného obdélníku jako kosodélník na prvním řádku tabulky 8. Dva takové útvary odpovídající dvěma různým polohám pythagorejského trojúhelníku znázorňuje Tabulka 9.

Tab. 9: Dva kosodélníky v jednotkové čtvercové síti.

	$S = 3 \text{ čp}$
	$S = 4 \text{ čp}$

Shrnutí odpovědí na jednotlivé otázky ze zadání úlohy

Dokážete z 12 párátek vytvořit obrys rovinného útvaru s obsahem 8, 7, 6, 5 čp?

Ano. Takové útvary jsou například uvedeny v Tabulkách 1, 2, 3, 4. Dalšími útvary mohou být vhodně zkosené kosodélníky a kosočtverce.

Kolik existuje útvarů s obsahem 5 čp? Je jich víc než 10?

V Tabulkách 1 až 4 je takových útvarů znázorněno celkem 12. Dalšími mohou být vhodně zkosené kosodélníky a kosočtverce, třeba kosočtverec o základně 3 párátko a výšce $5/3$ párátko.

Dokážete vytvořit obrysy rovinných útvarů s obsahem 4, 3, 2, 1 čp?

Ano. Například Tabulka 4 uvádí dva útvary s obsahem 4 čp a jeden s obsahem 3 čp; Tabulka 8 uvádí po jednom útvaru ke každému obsahu 4, 3, 2, 1 čp. Také Tabulka 9 uvádí útvary s obsahem 4 čp a 3 čp.

Dokážete vytvořit obrys rovinného útvaru s obsahem větším než 9 čp?

Ano. Jedná se například o pravidelný šestiúhelník a pravidelný dvanáctiúhelník, uvedené v Tabulce 5.

Jaký je nejmenší možný obsah? Jaký je největší možný obsah?

Obsah může být libovolně malý (rovnoběžníkové univerzální řešení). Největší možný obsah je obsah pravidelného dvanáctiúhelníku.

Co jsme dále zjistili

Z párátek je možné sestavit různé známé geometrické útvary: čtverec, 2 různé obdélníky, 1 pravoúhlý trojúhelník, 1 rovnoramenný trojúhelník, 3 pravidelné mnohoúhelníky (trojúhelník, šestiúhelník, dvanáctiúhelník), 7 lichoběžníků, nekonečně mnoho rovnoběžníků. Ale celočíselný obsah mohou mít pouze čtverec, obdélníky, pravoúhlý trojúhelník a vhodné zvolené rovnoběžníky.

Další útvary s celočíselným obsahem můžeme získat ze čtverce, z obdélníků a z pravoúhlého trojúhelníku rohovou nebo dvojrohovou úpravou.

Do bodů jednotkové čtvercové sítě můžeme umístit vrcholy čtverce, obdélníků a všech útvarů z nich vzniklých rohovou a dvojrohovou úpravou. A také vrcholy pythagorejského trojúhelníku a dvou kosodélníků.

Jak je možné úlohu dále rozvinout

Prvoplánovým rozšířením Pehkonenovy úlohy by mohlo být její zopakování s jiným počtem párátek, ale po chvíli zkoumání se ukáže genialita původního počtu 12, kterou nelze jednoduše přenést na jiné počty párátek:

- Abychom mohli vycházet ze čtverce podobně jako Pehkonen, musí být počet párátek dělitelný 4.
- Číslo 4 je příliš malé, nabízí jako řešení pouze čtverec a kosočtverec.
- Číslo 8 nabízí i obdélník, kosodélníky, trojúhelník, pravidelný osmiúhelník a lichoběžník, ale většinu z nich pouze v 1 exempláři. Navíc číslo 8 není dělitelné 3, takže nedostaneme rovnostranný trojúhelník. Navíc číslo 8 není součtem žádné pythagorejské trojice, takže nedostaneme ani pravoúhlý trojúhelník.
- Číslo 16 nabízí podobné útvary jako číslo 8, a ve více exemplářích. Ale opět není dělitelné 3 a není součtem žádné pythagorejské trojice.
- U čísla 16 a větších je na místě položit si otázku, zdali takový počet pro párátko není příliš velký, a to jak pro manipulaci s nimi, tak pro kombinatorické úvahy. Již systematické hledání všech trojúhelníků pro počet 12 bylo poměrně časově náročné, a co teprve s většími čísly...

Opakovat úlohu en bloc s jiným počtem párátek tedy nebudeme. Ale můžeme využít jednotlivé součásti úlohy a ty dále rozvíjet. Ukážeme si tři různé možnosti takového rozvoje.

Před chvílí zmiňované systematické hledání všech trojúhelníků je pěknou kombinatorickou rozcvíčkou, jako legitimní se tedy jeví otázka, kolik různých obrysů trojúhelníků můžeme sestavit například z 11 párátek, nebo z 10. Podobný efekt by mělo odstranění požadavku "je třeba využít všechna párátko" z původního znění Pehkonenovy úlohy.

Dalším zajímavým momentem řešení Pehkonenovy úlohy jsou rohová a dvojrohová úprava. Není možné tyto úpravy nějak zobecnit? Rohovou úpravu lze formálně popsat ve třech krocích:

- i) v obrysu zvolíme dvě sousední párátka, která jsou navzájem kolmá;
- ii) uchopíme je a zrcadlově překlopíme podle osy tvořené spojnicí těch jejich konců, které se navzájem **nedotýkají**;
- iii) zkontrolujeme, zda se spojnice těch konců párátěk, které se navzájem dotýkají, překlopila dovnitř útvaru, k němuž původní obrys patřil.

Krok iii) zajišťuje, že nově vzniklý útvar má obsah menší než původní útvar a že nově vzniklý útvar splňuje konstrukční pravidla P1 a P2 uvedená v zadání úlohy:

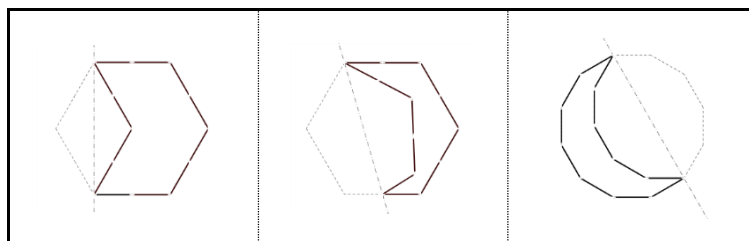
- pokud by se spojnice překlopila vně útvaru, obsah by se o 1 čp zvětšil;
- pokud by se spojnice překlopila na obrys útvaru, překlopená párátka by se dostala do kontaktu s dalšími párátky, a tak by nebylo splněno pravidlo P1 nebo P2.

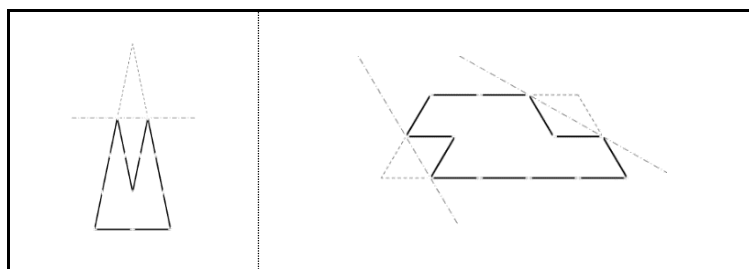
Tento formální přepis nám napovídá souvislost rohové úpravy s osovou souměrností. První krok úpravy můžeme snadno zobecnit a v obrysu zvolit libovolný počet sousedních párátěk, bez bližšího požadavku na jejich vzájemnou polohu. Pak už jen stačí ve druhém a třetím kroku zobecnit popis konců, které se navzájem (ne)dotýkají, a dostaneme popis nové úpravy, která v sobě zahrnuje jak rohovou úpravu, tak dvojrohovou, a také mnoho dalších úprav:

- i) v obrysu zvolíme libovolný souvislý neuzavřený úsek (tj. tento úsek má právě dva konce);
- ii) uchopíme jej a zrcadlově překlopíme podle osy tvořené spojnicí jeho konců;
- iii) zkontrolujeme, zda se celý úsek (bez konců) překlopil dovnitř útvaru, k němuž původní obrys patřil.

S touto obecnou úpravou můžeme z 12 párátěk tvořit obrysy dalších útvarů a nadále dodržovat pravidla P1 a P2; úpravu můžeme používat i opakovaně (viz Tabulka 10).

Tab. 10: Obecná úprava použitá na pravidelný šestiúhelník, pravidelný dvanáctiúhelník, rovnoramenný trojúhelník a rovnoramenný lichoběžník.





Při vhodné volbě výchozího obrysu a vhodné volbě přemísťovaného úseku mohou nově vzniklé útvary mít i celočíselný obsah (viz Tabulka 11).

Tab. 11: Některá řešení s celočíselným obsahem získaná pomocí obecné úpravy čtverce.

S = 7 čp	S = 6 čp	S = 5 čp	S = 4 čp	S = 3 čp

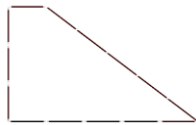
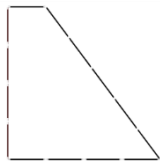
Třetí možnost rozšíření Pehkonenovy úlohy nám nabízí pasáž, ve které jsme hledali všechny možné lichoběžníky, jejichž obrys je tvořen 12 párátky. Tvarů jsme našli 7, což je poměrně dost, ale žádný z nich neměl celočíselný obsah. Jako návaznou si tak můžeme položit otázku, kolik párátek bychom potřebovali, abychom mohli sestavit obrys lichoběžníku s celočíselným obsahem.

Vyjít můžeme ze situace na Obr. 1, podrobněji se zaměříme na trojúhelník a obdélník znázorněné na tomto obrázku vpravo. K celočíselnému obsahu nás mohou dovést dvě cesty: buď bude obsah obdélníku i obsah trojúhelníku neceločíselný, ale jejich součet celočíselný, nebo bude obsah obdélníku i obsah trojúhelníku celočíselný a jejich součet pak automaticky také. První možnost je poměrně obtížná na argumentaci a nebudeme se jí věnovat. Podrobně se však podíváme na tu druhou možnost. Hledáme tedy obdélník a trojúhelník z Obr. 1 vpravo tak, aby jejich obsahy byly celočíselné. Protože svislý rozměr obdélníku je zároveň výškou trojúhelníku a vodorovný rozměr obdélníku je vždy celočíselný (je celý sestaven z párátek), tak z požadavku na celočíselný obsah obdélníku plyne požadavek na celočíselnou výšku trojúhelníku. K celočíselnému obsahu trojúhelníku nás dovede pythagorejský trojúhelník, nejmenší takový je trojúhelník z Tabulky 4. Tento trojúhelník můžeme umístit do schématu z Obr. 1 celkem třemi různými způsoby, ale pouze ve dvou z nich je jeho výška celočíselná:

- Pokud má vodorovná strana trojúhelníku délku 5 párátek (tj. $x + y = 5$, $b = 4$, $c = 3$), tak jeho výška je $12/5$, což není celé číslo.
- Pokud má vodorovná strana trojúhelníku délku 4 párátko (tj. $x + y = 4$, $b = 5$), tak jeho výška splyne s druhou jeho odvěsnou (tj. $v = 3$, $y = 4$, $d = 0$, $x = 0$). Na tento trojúhelník budeme potřebovat 12 párátek. Nejmenší možný vodorovný rozměr obdélníku je 1 párátko (tj. $c = 1$). Složením trojúhelníku a obdélníku vznikne pravoúhlý lichoběžník, na jehož obrys je potřeba $12 + 2 = 14$ párátek.
- Pokud má vodorovná strana trojúhelníku délku 3 párátko (tj. $x + y = 3$, $b = 5$), tak jeho výška splyne s druhou jeho odvěsnou (tj. $v = 4$, $y = 3$, $d = 0$, $x = 0$). Na tento trojúhelník budeme potřebovat 12 párátek. Nejmenší možný vodorovný rozměr obdélníku je 1 párátko (tj. $c = 1$). Složením trojúhelníku a obdélníku vznikne pravoúhlý lichoběžník, na jehož obrys je potřeba $12 + 2 = 14$ párátek.

Oba nalezené lichoběžníky jsou uvedeny v Tabulce 12. Jejich obsah je součtem obsahu pythagorejského trojúhelníku (6 čp) a obsahu obdélníku s vodorovným rozměrem 1 párátko a svislým rozměrem rovným výšce pythagorejského trojúhelníku (tj. 3, resp. 4 párátko).

Tab. 12: Lichoběžníky s celočíselným obsahem.

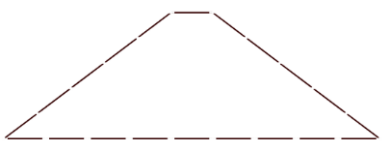
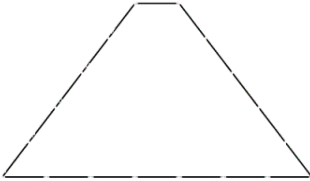
	
$S = 9 \text{ čp}$ $O = 14 \text{ p}$	$S = 10 \text{ čp}$ $O = 14 \text{ p}$

Zajímavou variantou je hledání rovnoramenného lichoběžníku s celočíselným obsahem, s využitím dvou pythagorejských trojúhelníků, kde každý je umístěný z jedné strany obdélníku:

- Pokud má vodorovná strana trojúhelníků délku 4 párátků (tj. $x = y = 4$, $b = d = 5$), tak jejich výška splyne s druhou odvěsnou (tj. $v = 3$). Složením těchto dvou trojúhelníků dostaneme trojúhelník, na jehož obrys potřebujeme 18 párátek. Nejmenší možný vodorovný rozměr obdélníku je 1 párátko (tj. $c = 1$). Složením trojúhelníku a obdélníku vznikne rovnoramenný lichoběžník, na jehož obrys je potřeba $18 + 2 = 20$ párátek.
- Pokud má vodorovná strana trojúhelníků délku 3 párátků (tj. $x = y = 3$, $b = d = 5$), tak jejich výška splyne s druhou odvěsnou (tj. $v = 4$). Složením těchto dvou trojúhelníků dostaneme trojúhelník, na jehož obrys potřebujeme 16 párátek. Nejmenší možný vodorovný rozměr obdélníku je 1 párátko (tj. $c = 1$). Složením trojúhelníku a obdélníku vznikne rovnoramenný lichoběžník, na jehož obrys je potřeba $16 + 2 = 18$ párátek.

Oba nalezené rovnoramenné lichoběžníky jsou uvedeny v Tabulce 13. Jejich obsah je součtem obsahů dvou pythagorejských trojúhelníků (12 čp) a obsahu obdélníku s vodorovným rozměrem 1 párátko a svislým rozměrem rovným výšce pythagorejských trojúhelníků (tj. 3, resp. 4 párátko).

Tab. 13: Rovnoramenné lichoběžníky s celočíselným obsahem.

	
$S = 15 \text{ čp}$ $O = 20 \text{ p}$	$S = 16 \text{ čp}$ $O = 18 \text{ p}$

Kdy a jak úlohu využít ve výuce

Při vhodném uchopení je možné Pehkonenovu úlohu využít na libovolném stupni vzdělávání. Na 1. stupni ZŠ například zůstaneme v kontextu jednotkové čtvercové sítě a budeme se věnovat čtvercům, obdélníkům a útvarům z nich vzniklým pomocí rohové a dvojrohové úpravy. Jako alternativní pomůcku můžeme využít i Geoboard / Geodesku.

Pokud vynecháme návaznost na obsah útvaru, můžeme se na 1. stupni ZŠ věnovat i trojúhelníkům a například hledat různé trojúhelníky, které je možné z párátek vytvořit.

Na 2. stupni ZŠ můžeme dále zařadit pythagorejský trojúhelník, rovnoramenné a rovnoběžníky a pravidelné mnohoúhelníky (zde je možné žákům nabídnout vhodné vzorce na výpočet obsahu vycházející z délky strany, viz např.

[1, str. 326]). Pro zdatnější řešitele jsou z druhostupňového obsahu dostupné i rovnoramenné a pravoúhlé lichoběžníky.

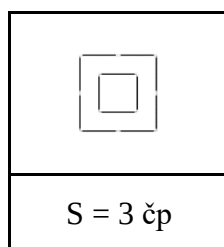
Na SŠ se můžeme navíc věnovat i obecným lichoběžníkům, případně podrobnému odvozování vzorců na výpočet obsahu pravidelných mnohoúhelníků vycházejících z délky strany.

Úlohu je možné využít jako opakovací, poskytuje souhrnný náhled na různé typy rovinných útvarů a jejich vlastnosti, vztahy mezi nimi. Případně jako motivační při vstupu do nového tématu.

Místo závěru

Tabulka 14 nabízí ještě jedno řešení, které jsme doposud neobjevili. Na první pohled možná vypadá podezřele, ale splňuje všechny požadavky Pehkonenovy úlohy, včetně pravidel P1 a P2. Na rozdíl od všech ostatních řešení ale není nalezený útvar jednoduše souvislý (má uvnitř "díru"), čímž se dostáváme k vysokoškolské matematice, topologii a já osobně se tak oklikou dostávám ke své dizertační práci, jež mj. vycházela z vlastností jednoduše souvislých množin.

Tab. 14: Řešení "s dírou".



Podobných nečekaných spojitostí může úloha skrývat víc, je jen na řešitelích, jestli si je budou chtít objevovat.

Dodatek 1

Jak jsem slíbila na workshopu, uvedu zde soupis publikací s dalšími badatelskými úlohami, na kterých jsem se v posledních letech podílela a které jsou v českém jazyce. Doporučený stupeň vzdělávání je pouze orientační, řídí se obtížností úlohy a převládajícím matematickým obsahem.

Pro všechny stupně vzdělávání:

- úlohy v druhé polovině publikace [14], obtížnost úloh je zde odlišena hvězdičkami.

Pro 1. a 2. stupeň ZŠ:

- příspěvek z konference v Litomyšli [2];
- sada na sebe navazujících příspěvků z konferencí v Srní [10, 5, 15, 13].

Pro 2. stupeň ZŠ a SŠ:

- příspěvek z konference v Srní [8].

Pro SŠ:

- sada příspěvků z časopisu MFI [3, 11];
- příspěvek z konference UPVM [6] a na něj navazující příspěvky z časopisu SBML [7, 9].

Dodatek 2

Nelze nedodat poděkování tvůrcům prostředí GeoGebra, ve kterém jsem vytvořila všech 76 ilustrací k tomuto příspěvku a ve kterém jsem si ověřovala většinu nalezených numerických výsledků. Tím se, také oklikou, dostáváme k jednomu z témat konference UPVM – můj příspěvek nepopisuje žádné využití dynamického software ve výuce, ale je sám o sobě ukázkou takového využití.

Literatura:

- [1] Bartsch, H.-J.: *Matematické vzorce*. Praha, 2002.
- [2] Hošpesová, A., Samková, L.: Skládání tvarů jako podnět k badatelským aktivitám v geometrii na ZŠ. *Sborník konference Jak učit matematice žáky ve věku 10-16 let*, str. 123-130, 2012.
- [3] Leischner, P., Samková, L.: Od řešení Heronovy úlohy k modelům kuželoseček. *Matematika - fyzika - informatika*, **23**, 1, str. 9-14, 2014. Dostupné na <http://mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/106>
- [4] Pehkonen, E. (Ed.): *Use of open-ended problems in mathematics classroom*. Helsinky, 1997.
- [5] Roubíček F.: Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování matematice II. *Sborník konference Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2014*, str. 169-174, 2014.
- [6] Samková, L.: Badatelsky orientované vyučování matematiky. *Sborník 5. konference Užití počítačů ve výuce matematiky*, str. 336-341, 2011. Dostupné na http://home.pf.jcu.cz/~upvvm/2011/sbornik/clanky/36_UPVM11_Samkova.pdf
- [7] Samková, L.: Jak velká je třetina koule? *South Bohemia Mathematical Letters*, **20**, str. 25-29, 2012. Dostupné na <http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/samkova1.pdf>
- [8] Samková, L.: Pracovní listy pro badatelsky orientované vyučování matematiky. *Sborník konference Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2012*, str. 167-172, 2012.
- [9] Samková, L.: Modelování reálných situací v matematice na SŠ - Stěhovací problém. *South Bohemia Mathematical Letters*, **21**, str. 67-75, 2013. Dostupné na http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/samkova_web.pdf
- [10] Samková, L.: Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování matematice I. *Sborník konference Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2014*, str. 187-192, 2014.
- [11] Samková, L.: Modelování kuželoseček v dynamickém prostředí. *Matematika - fyzika - informatika*, **24**, 4, str. 303-311, 2015. <http://mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/225>

- [12] Samková, L.: Badatelsky orientované vyučování. In V. Šimandl (Ed.), *Badatelsky orientovaná výuka matematiky a informatiky s podporou technologií* (str. 11-20). Č. Budějovice, 2015.
- [13] Samková, L.: Ohlédnutí za sedmi podobami badatelsky orientovaného vyučování matematice. *Sborník konference Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2016*, str. 113-118, 2016.
- [14] Samková, L., Hošpesová, A., Roubíček, F., Tichá, M.: Badatelsky orientované vyučování matematice. *Scientia in educatione*, **6**, 1, str. 91-122, 2015. Dostupné na <http://www.scied.cz/index.php/scied/article/viewFile/154/145>
- [15] Tichá, M., Hošpesová, A.: Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování matematice III. *Sborník konference Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2014*, str. 217-223, 2014.

Libuše Samková
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta JU
Jeronýmova 10
371 15 České Budějovice