

MNOŽINY BODŮ

S množinami bodů se žáci středních škol poprvé setkávají v tematickém celku *Planimetrie*. Pro potřeby konstrukční geometrie se zpravidla učí postup vlastní konstrukce dané množiny, aniž přesně chápou její význam. K vlastním aplikacím pak dochází především při řešení konstrukčních úloh trojúhelníků, čtyřúhelníků a kružnic. S kuželosečkami pracují v řádných hodinách matematiky pouze analyticky. Nedostatek času, neochota žáků rýsovat, neoblíbenost geometrie mezi žáky a často také mezi učiteli, časová náročnost prověřování geometrických znalostí žáků a s tím související nižší pravděpodobnost výskytu takových typů úloh např. ve společné části maturitní zkoušky, jsou hlavními důvody, proč se ve školách danému tématu nevěnuje dostatečné množství pozornosti a proč učitel velmi obtížně hledá motivaci pro své žáky.

Motivaci žáků může zvýšit propojení matematiky s reálným životem, ukázky její aplikovatelnosti především v oblastech blízkých věku a zájmům mladé generace. Důležitou roli v procesu učení hraje také užití vhodných a moderních pomůcek, např. stále oblíbených modelů, nebo dnes častěji užívaných prostředků ICT.

Následující příklady jsou vybrány tak, aby konstrukce nebyly nijak složité a řešení příliš obtížné. Výběr do jisté míry ovlivnila též aplikovatelnost v reálném životě. Je třeba ukazovat, že matematika není izolovaná věda. Z tohoto důvodu oba ukázkové příklady mají zejména motivační význam a při jejich řešení vystačíme se znalostmi elementárních bodových množin. Měření vzdálenosti dvou objektů vzniklo z potřeb praktického života a je třeba dodat, že v našich příkladech touto vzdáleností máme na mysli nejmenší možnou, tzn. Euklidovskou vzdálenost.

Použitím volně dostupného, jednoduše ovladatelného dynamického softwaru *GeoGebra* především zatraktivníme výuku, ušetříme drahocenný čas, zprostředkujeme názornou ukázkou propojení geometrie s realitou. Všechny konstrukce jsou také prováděny přesně a kvalitně.

Základní informace o materiálu	
Autorka	Mgr. Hana Mahnelová, Ph.D. Gymnázium Nymburk, h.mahnelova@seznam.cz
Věk studentů	15 – 19 let
Časová dotace	1 vyučovací hodina (45 minut)
Požadavky na techniku	Učebna s počtem žákovských PC odpovídajícím počtu žáků ve třídě, učitelský PC s připojením na dataprojektor.
Software	GeoGebra (www.geogebra.org)
Odkazy	[1] http://www.zakruta.cz

I. Vzdělávací cíle

- Analýza případů pro nalezení ne zcela učebnicového příkladu množiny bodů.
- Experimentování pomocí počítače, tvorba počítačového modelu.
- Ukázka propojení matematiky s realitou.
- Aplikace geometrického výpočtu, porovnání výsledku s počítačovým modelem.

II. Potřebné znalosti studentů

- Množina všech bodů roviny, které mají od dané přímky stejnou vzdálenost.
- Množina všech bodů roviny, které mají od daného bodu stejnou vzdálenost.
- Obvod kružnice.

III. Popis vyučovací hodiny

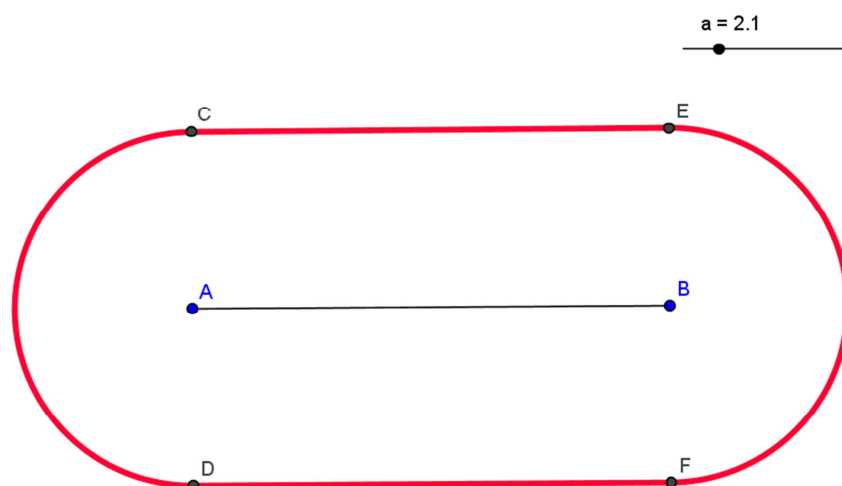
- Učitel zadá příklad č. 1, část A).

Příklad 1:

A) Je dána úsečka AB. Sestrojte množinu všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od úsečky AB. Najdete uplatnění výsledné množiny v reálném životě?

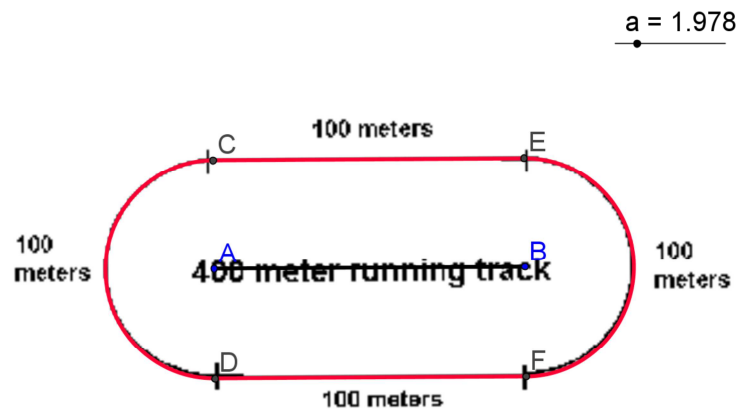
B) Vypočtete poloměr zatáčky atletického oválu.

- Žáci samostatně sestrojí pomocí nástrojů programu *GeoGebra* úsečku a v průběhu cca 10 minut experimentují, jak vypadá hledaná množina.
- K ověření stejné vzdálenosti je možné použít nástroj *vzdálenost*.
- Vytvoření dynamického modelu měnícího se v závislosti na hodnotě parametru a vyjadřující požadovanou vzdálenost, obr. 1, (5 - 10 min).



Obr. 1: Množina všech bodů mající stejnou vzdálenost od úsečky AB.

- Otázka učitele, zda se s takovou množinou setkáme v běžném životě.
- Učitel promítne počítačový dynamický model atletického oválu s vloženým pozadím obrázku půdorysu oválu, obr. 2.

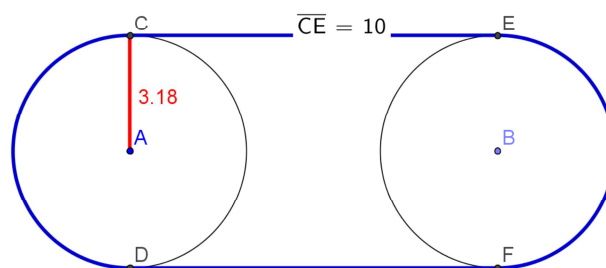


Obr. 2: Porovnání výsledné bodové množiny a tvaru atletického oválu.

Atletický ovál: Vnitřní dráha atletického oválu má délku 400 m a skládá se ze dvou rovných úseků dlouhých 100 m a dvou kruhových oblouků také délky 100 m. Na oválu je 8 drah, přičemž obvykle bývá šířka každé z nich 1,22 m.

- Učitel zadá příklad č. 1, část B) a společná kontrola výsledku proběhne s využitím počítačového modelu, obr. 3, celkem asi 10 min.

délka půlkružnice $e = 9.99$



$$a = 10$$

$$b = 3.18$$

$$o = 2\pi r$$

$$r = \frac{100}{\pi}$$

$$r \approx 31,83m$$

☑ řešení

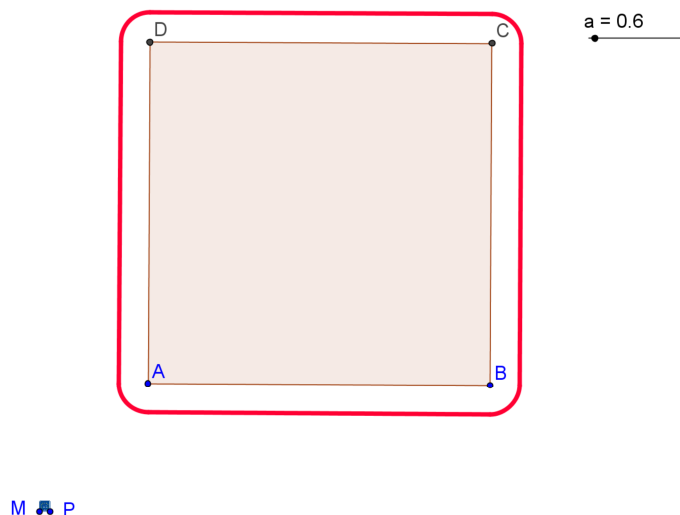
Obr. 3: Výpočet poloměru zatáčky.

- Učitel zadá příklad č. 2 a nechá žáky přibližně 10 minut samostatně pracovat.

Příklad 2:

Sestrojte množinu všech bodů roviny, které jsou stejně vzdáleny (např. 2j) od hranice daného čtverce (příp. jiného mnohoúhelníku). Setkáme se s takovou množinou v praxi?

- Presentace dynamického modelu výsledné množiny spojená s praktickou ukázkou ze života, obr. 4, 5, 6.



Obr. 4: Skrytá značka Státní hranice.

IV. Zkušenosti s použitím materiálu

Žáci vystačí s jednoduchým intuitivním ovládáním programu.

Pro znázornění tvaru experimentálně hledané množiny je vhodné sestavit bod mimo úsečku a zapnout (např. přes pravé tlačítko myši) jeho *stopu*.

Ekvidistantu úsečky žáci odhalí zpravidla bez potíží, více práce pak dá dohledání půlkružnic.

Čas, který ušetříme konstrukcí pomocí počítače, lze využít např. k diskusi, k opakování základních geometrických vztahů (zmínka o tečnách kružnice, dotykových bodech, ...).

Nedílnou součástí každé úlohy by měl být důkaz, že výsledná množina zahrnuje skutečně všechny body roviny s uvedenou vlastností a žádné jiné. Na některých typech středních škol zpravidla vystačíme s ověřením správnosti např. měřením.

Pro přesnější spodobnění obrázku atletického oválu a námi vytvořené množiny (viz obr. 2) je vhodné navolit v nabídce *Nastavení* programu GeoGebra zaokrouhlování na více desetinných míst a ve vlastnostech posuvníku krok 0,01. Takto malou změnu hodnoty posuvníku už provádíme klávesovými šipkami.

Při tvorbě počítačového modelu pro ověření výpočtu poloměru zatáčky bylo třeba změnit měřítko, takže posuvník a ukazující délku rovného úseku

a posuvník b velikost poloměru zatáčky mají hodnoty desetkrát menší, než ve skutečnosti. Vlastní výpočet je proveden algebraicky a zobrazení řešení ovládáme kliknutím na zaškrtačací políčko.

Z časových důvodů příklad 2 žáci v prostředí GeoGebra už sami netvoří, ale mají možnost si dynamický model výsledného řešení otevřít. V levém dolním rohu je již připravena zmenšená značka *Státní hranice*, obr. 4 nebo *Směrová cyklistická značka* v případě obdélníku, obr. 6. Manipulací s body M a P ovlivňujeme velikost značky, čtverec (obdélník) upravujeme pohybem vrcholů. Žákům dáme např. za úkol najít řídicí čtverec (obdélník), jemuž odpovídá ohrazení vnitřní modré (žluté) oblasti značky, obr. 5, 6.



Obr. 5: Řídicí čtverec.

Dopravní značky se vyrábějí z kovového materiálu a z bezpečnostních důvodů musí být bez ostrých zakončení. Zde je příležitost spojit matematiku s dopravní výchovou.



Obr. 6: Řídicí obdélník cyklistické značky.

S modely značek je možné pracovat i dále. Například počítat poměry obsahů různě zabarvených ploch.