

Klasické úlohy teorie grafů na školách i v aplikacích

Šárka Voráčová

Ústav aplikované matematiky,
Fakulta dopravní ČVUT v Praze



© easycalculation.com

“Není utěšenějšího povolání nad učení dětí,
které se učit chtějí, a není odpornějšího poslání
nad učení dětí, které se učit nechtějí“

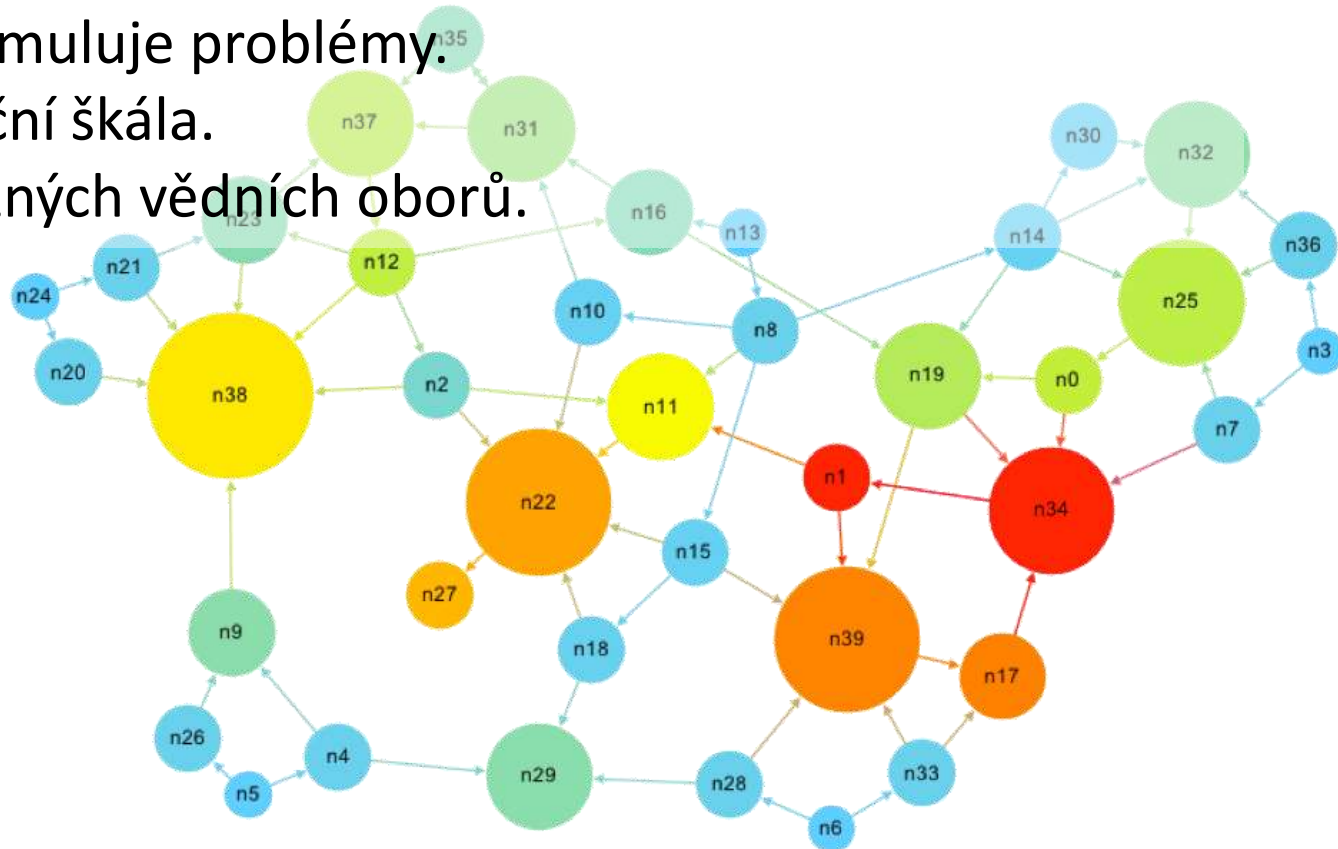
Petr Vopěnka

„Probuzení zájmu žáků je nutnou, ne však
postačující podmínkou k nastartování
vzdělávacího procesu. Zájem by měl být dále
živen úspěchy žáků, zajímavostí problematiky,
uspokojením z vykonané práce.“

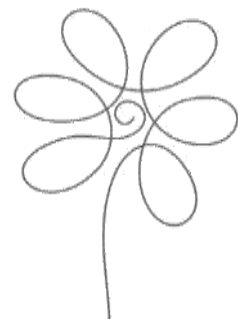
František Kuřina

Proč zařadit TG do výuky

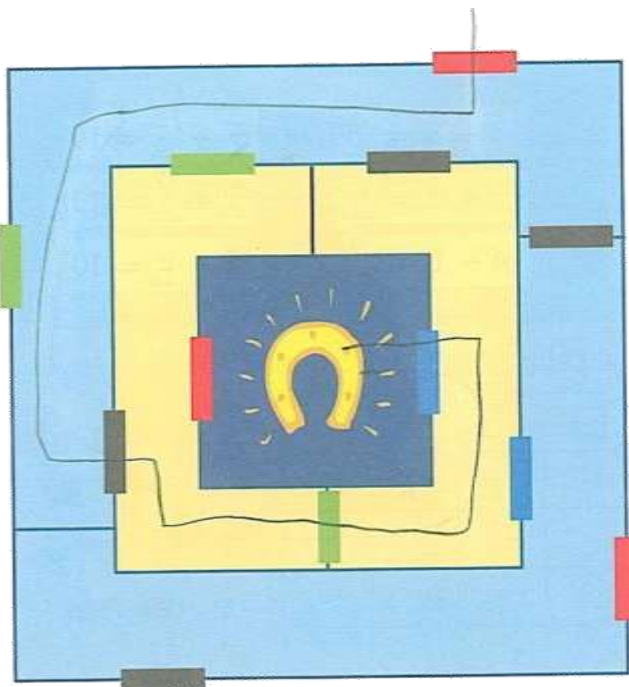
- Vhodné pro badatelsky orientovanou výuku.
- Přirozeným způsobem spojuje grafickou a algebraickou reprezentaci.
- Intuitivně formuluje problémy.
- Široká aplikační škála.
- Propojení různých vědních oborů.



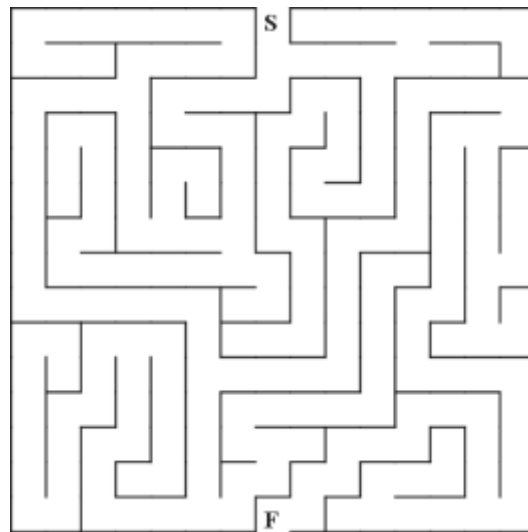
Teorie grafů pro nejmenší



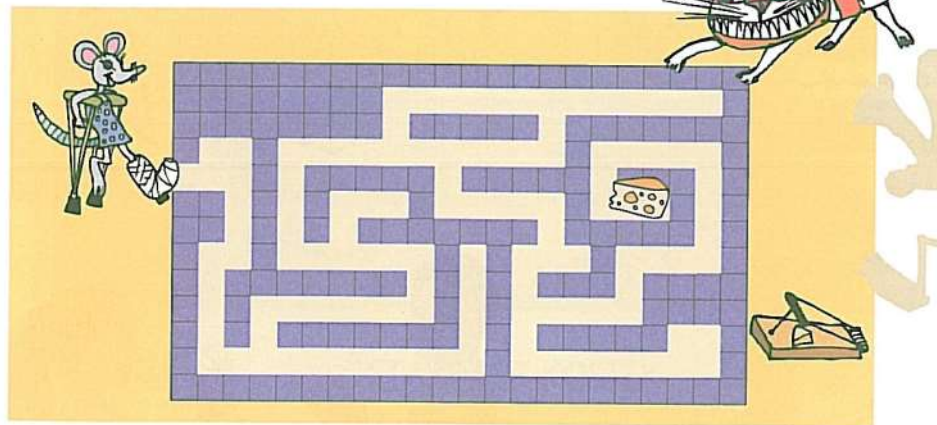
■ Bludiště



Už předškolní děti se snaží vyznat v mapě nebo zjednodušeném plánu a bez větších potíží takový způsob modelování reality přijímají.

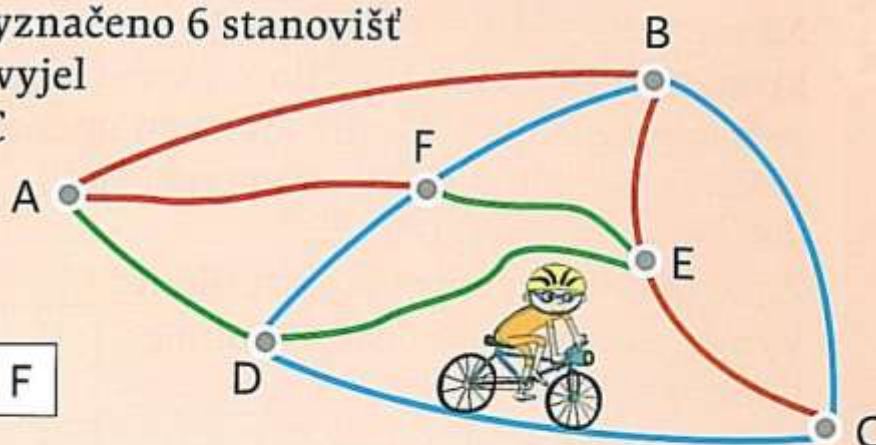


2 MYŠKA HLEDÁ SÝR

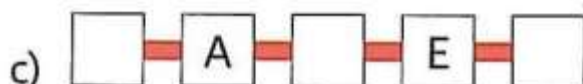
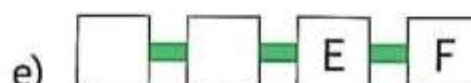
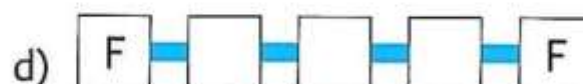
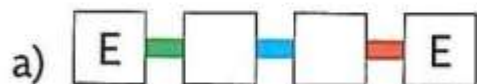


Teorie grafů v učebnicích

Na mapě cykloparku je vyznačeno 6 stanovišť a 11 cyklostezek. Hubert vyjel ze stanoviště A. Přes D, C a E dorazil do F. Jeho trasu zapíšeme takto:



Doplňte názvy stanovišť dalších Hubertových tras. Víme, že Hubert nikdy nejel po téže stezce dvakrát.



Lukáš Jirovský „[Teorie grafů ve výuce na střední škole](#)“,
diplomová práce MFF, 2010

Nalezněte minimální kostru grafu:

Vybrané problémy

Nejkratší cesta

Minimální kostra

Maximální kostra

Počty koster

Alkany

Jednotažky

Barvení mapy

Relace

Výroky

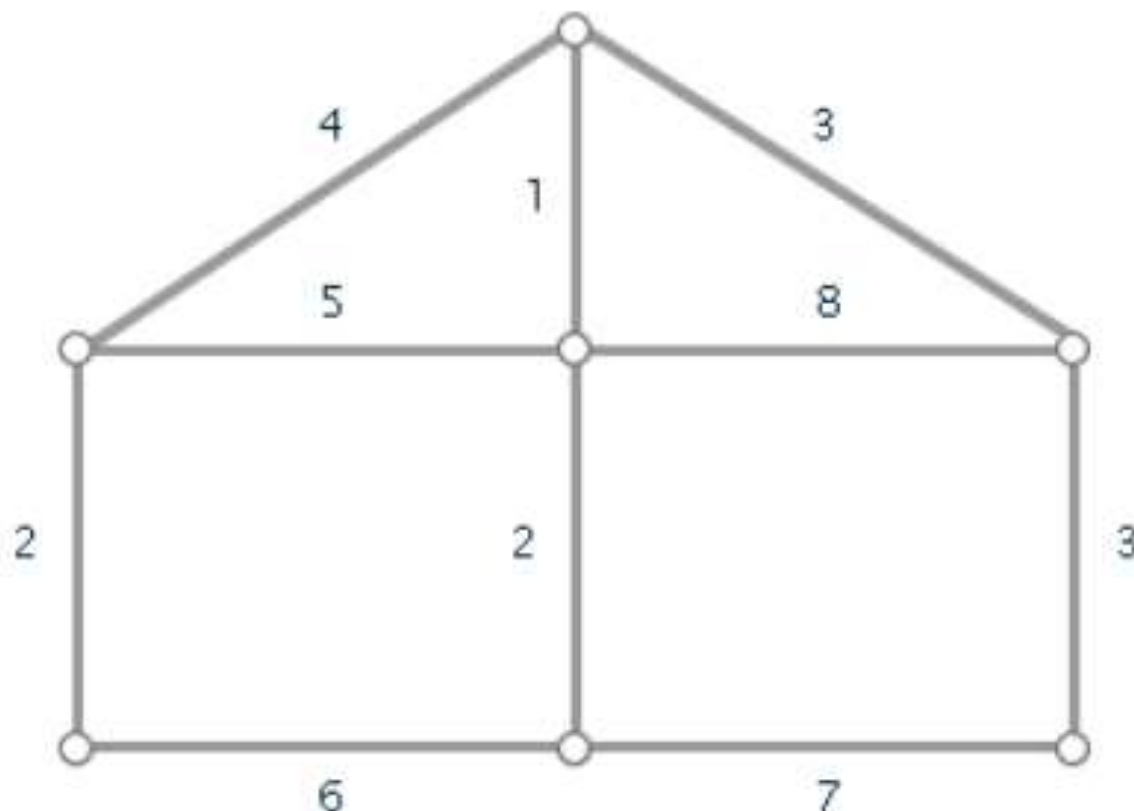
Rozvrh

Převozník

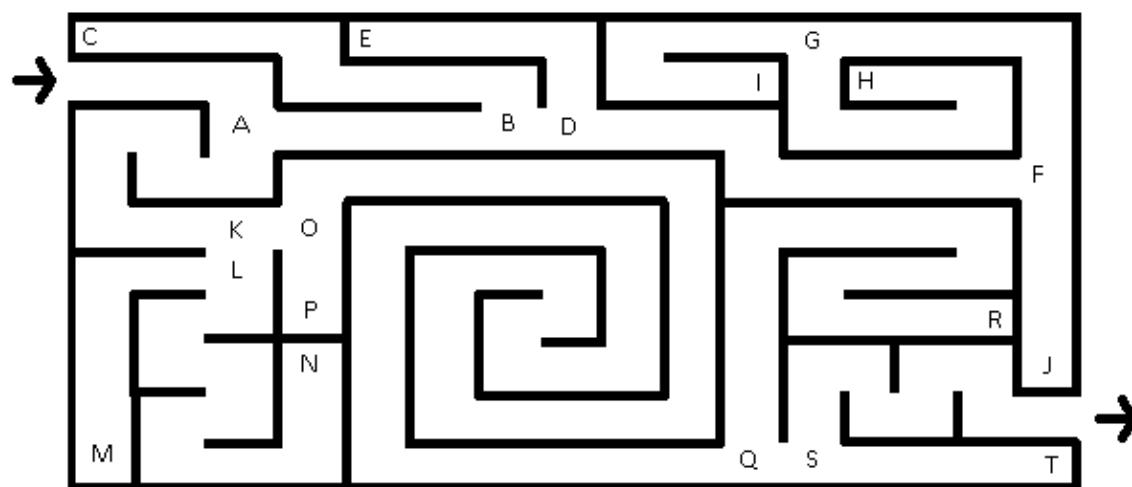
Toky v sítích

Teorie her

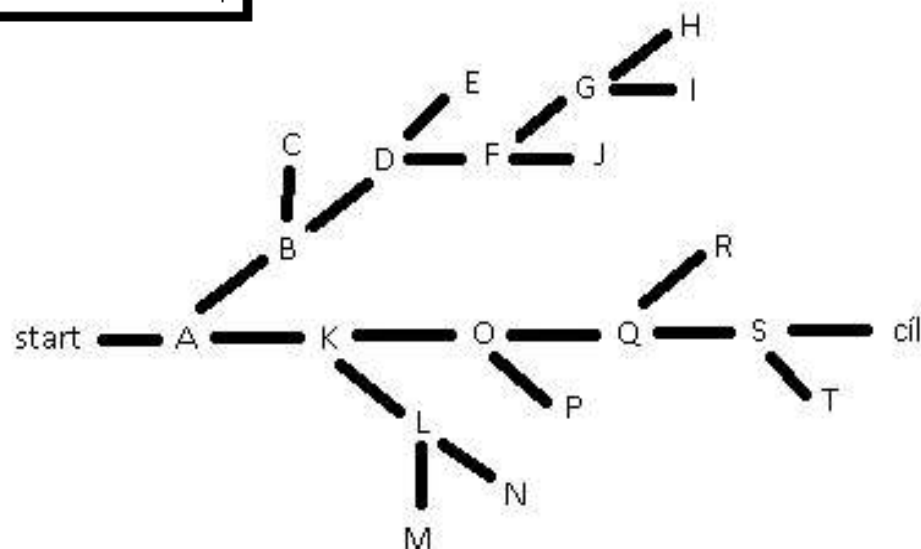
Hra NIM



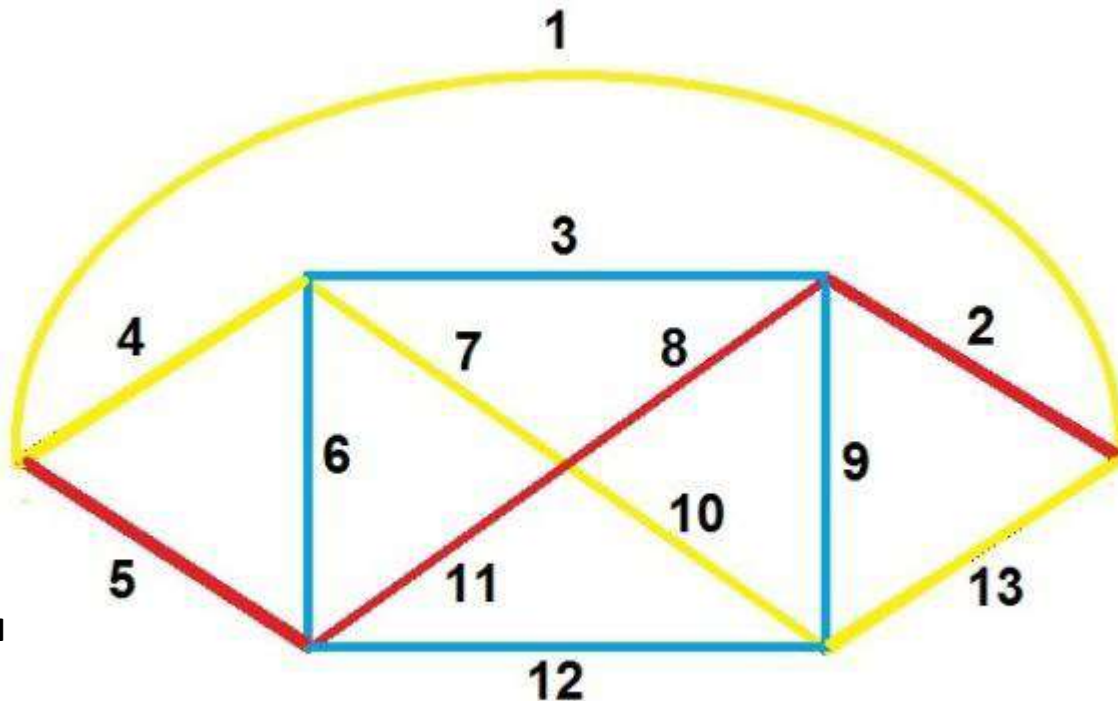
Ester Glasová: [Teorie grafů a její výskyt ve školské matematice](#),
diplomová práce, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická
fakulta, 2012.



Problém minimální kostry
Zebry
Domeček jedním tahem
Bludiště



Tatiana Mutinova: [Prvky teorie grafů v učivu matematiky na 1. stupni základní školy](#), diplomová práce, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2014

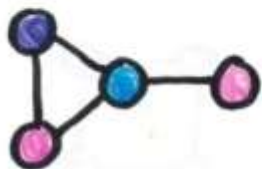


Jednotažky – mapa lesoparku
Dvoubarevný graf

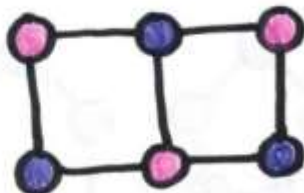
Joel David Hamkins

Math for seven-year-olds: graph coloring, chromatic numbers, and Eulerian paths and circuits

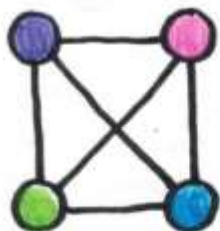
WHAT IS MY CHROMATIC NUMBER?



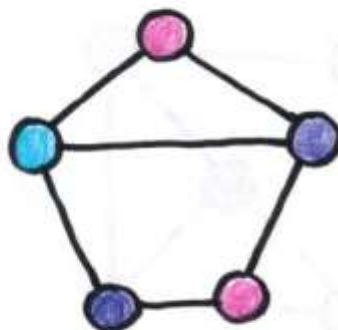
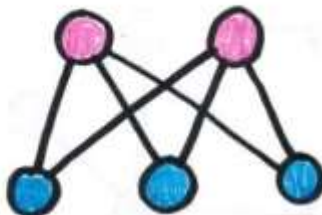
3



2



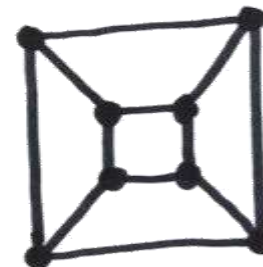
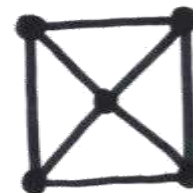
4



HOW MANY COLORS DID YOU USE?



ONLY SOME OF THESE GRAPHS
HAVE AN EULERIAN PATH OR CIRCUIT.
CIRCLE THE IMPOSSIBLE GRAPHS.

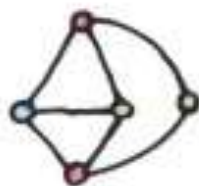


EVERY TIME YOU ENTER A NODE, YOU
LEAVE ON A FRESH LINE. SO:
CIRCUIT: EVERY NODE HAS EVEN DEGREE
PATH: EVERY NODE EXCEPT START/END

[Joel David Hamkins](#)

[Math for eight-year-olds: graph theory for kids!](#)

A GRAPH IS A
COLLECTION OF VERTICES
JOINED BY EDGES.



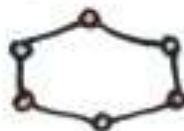
THIS GRAPH HAS
5 VERTICES
7 EDGES
AND IT DIVIDES THE
PLANE INTO
4 REGIONS



$$\begin{matrix} V & E & R \\ \textcircled{4} & - & \textcircled{4} + \textcircled{2} = \underline{2} \end{matrix}$$



$$\begin{matrix} V & E & R \\ \textcircled{5} & - & \textcircled{5} + \textcircled{2} = \underline{2} \end{matrix}$$



$$\begin{matrix} V & E & R \\ \textcircled{6} & - & \textcircled{6} + \textcircled{2} = \underline{2} \end{matrix}$$

HOW ABOUT THIS GRAPH?



$$\begin{matrix} V & E & R \\ \textcircled{4} & - & \textcircled{6} + \textcircled{5} = \underline{3} \end{matrix}$$

DID IT WORK?
NO!

IN THIS GRAPH, THE
DIAGONAL EDGES CROSS.
LET'S FIX THAT.

ADD A VERTEX



$$\begin{matrix} V & E & R \\ \textcircled{5} & - & \textcircled{8} + \textcircled{5} = \underline{2} \end{matrix}$$

MOVE AN EDGE

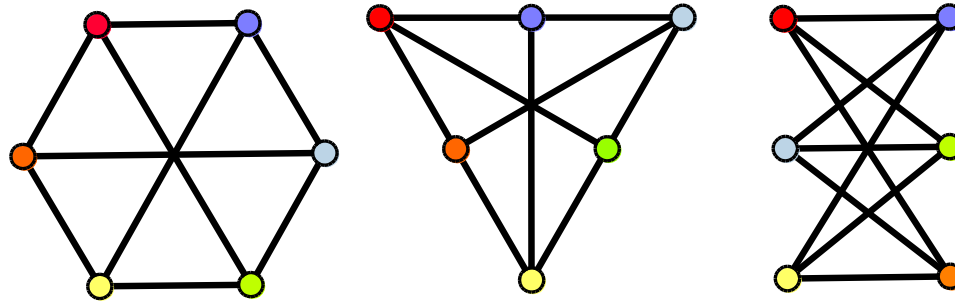


$$\begin{matrix} V & E & R \\ \textcircled{4} & - & \textcircled{6} + \textcircled{4} = \underline{2} \end{matrix}$$

NOW IT WORKS!

A PLANAR GRAPH CAN BE
DRAWN WITHOUT EDGES CROSSING.

Kreslení grafu, izomorfismus

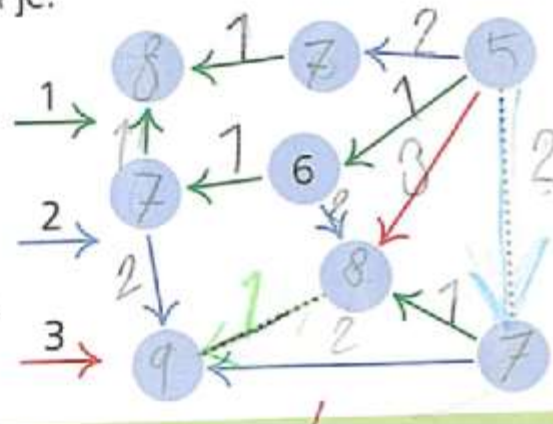
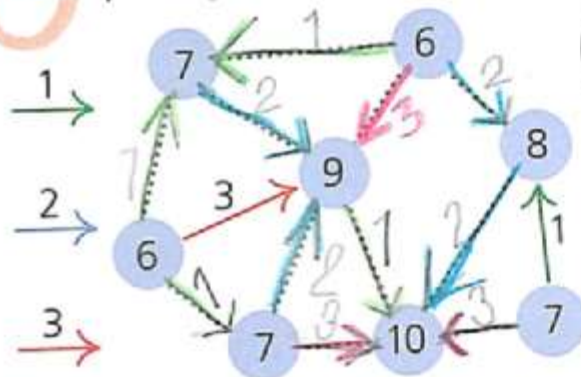


Číselné pavučiny

46,47



■ Doplň chybějící čísla. Doplň šipky a vybarvi je.

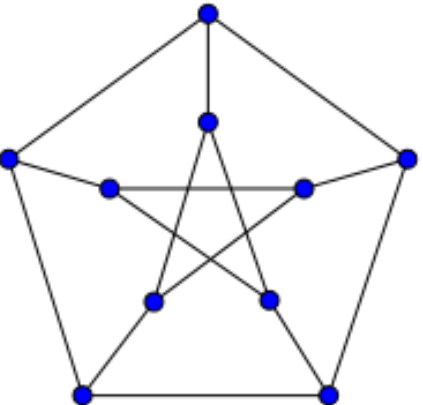


Petersen Graph

The Kuratowski's theorem says, that a graph is planar if, and only if it doesn't contain a subgraph that is a subdivision of K_5 or $K_{3,3}$. We are now using instead the more general theorem of Klaus Wagner and look for minors of K_5 and $K_{3,3}$. On the application below you can see the Petersen graph. Try to find the K_5 and $K_{3,3}$ minor in the Petersen graph. -You can merge vertices that are connected by edges by moving them together and left-clicking them. -You can use the rubber-tool to delete vertices and edges. -To restore the original version press the refresh-button on the right top. -You can rearrange the vertices of the K_5 and $K_{3,3}$ and try to overlap them with the Petersen graph.



Petersen graph



$K_{3,3}$



☐ Solution

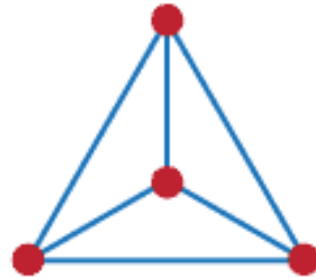
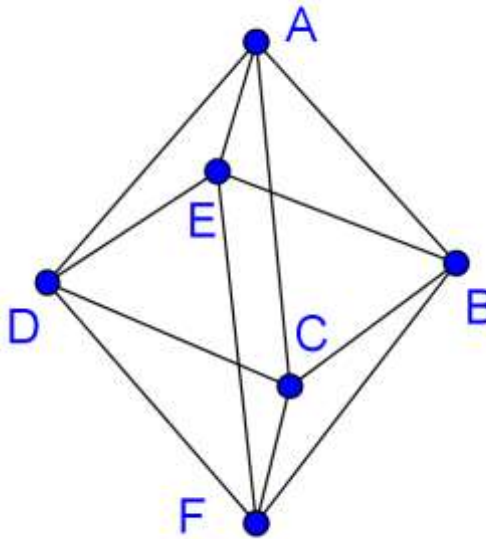
K_5



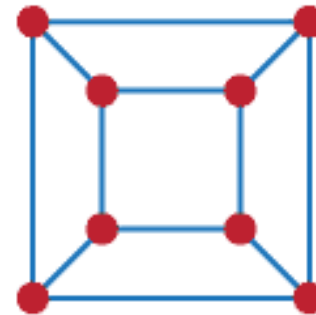
☐ Solution

<https://ggbm.at/f2WVxVBh>

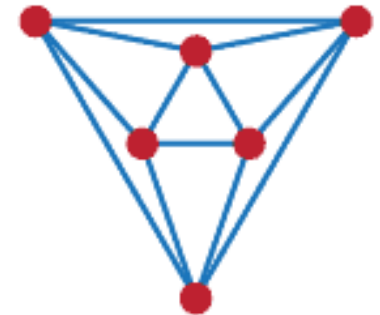
Planární graf platónských těles



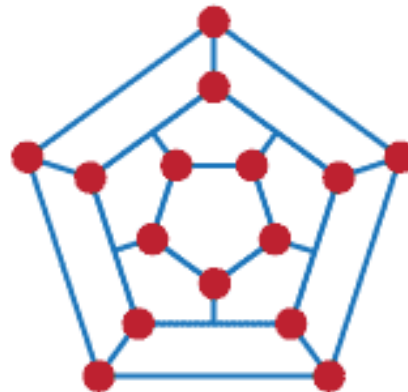
Tetrahedron



Cube



Octahedron



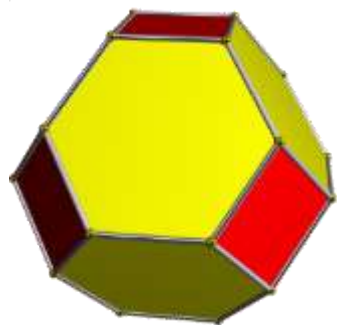
Dodecahedron



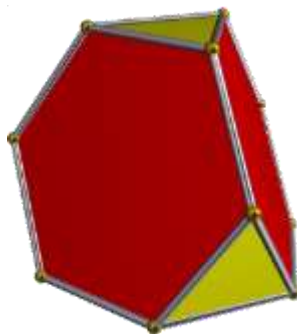
Icosahedron

Planární graf archimédovských těles

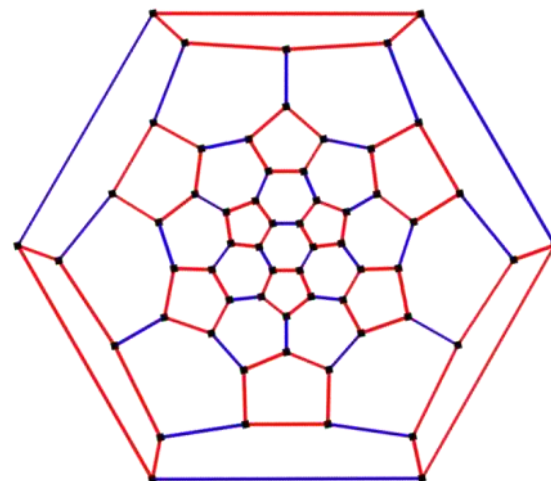
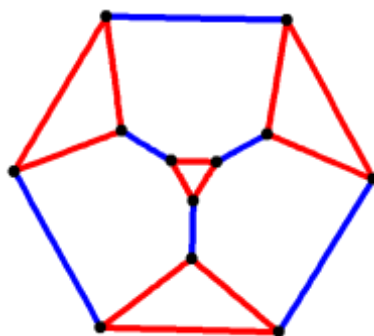
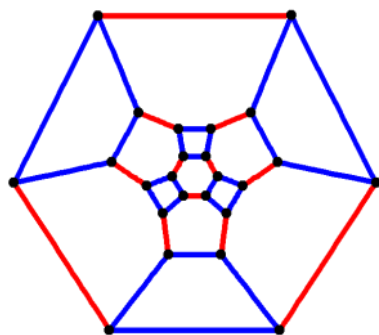
Komolý osmistěn



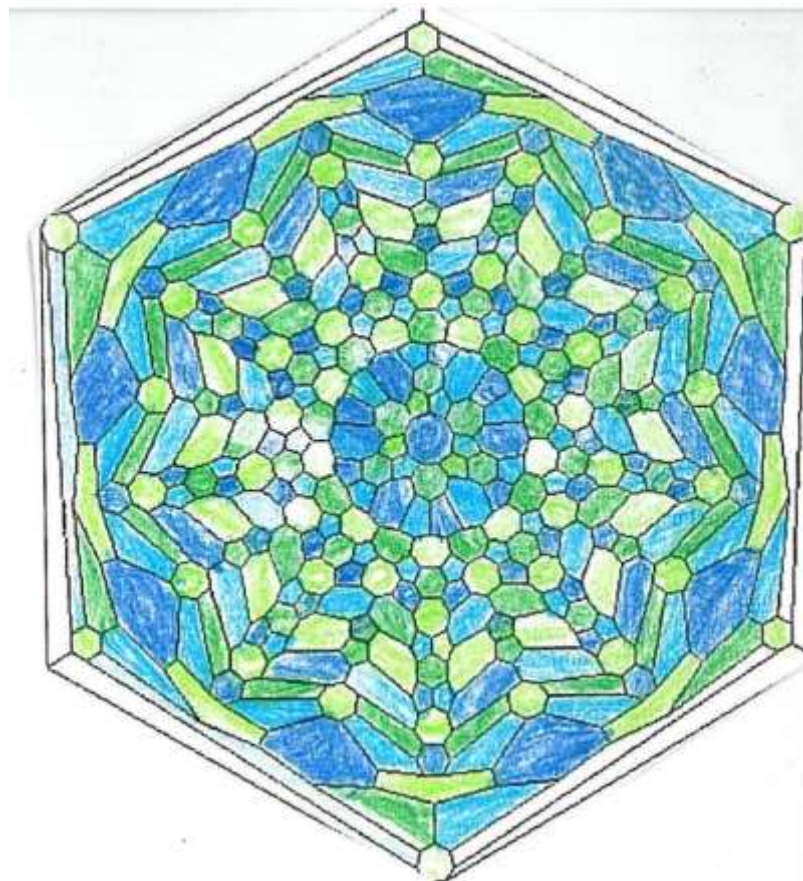
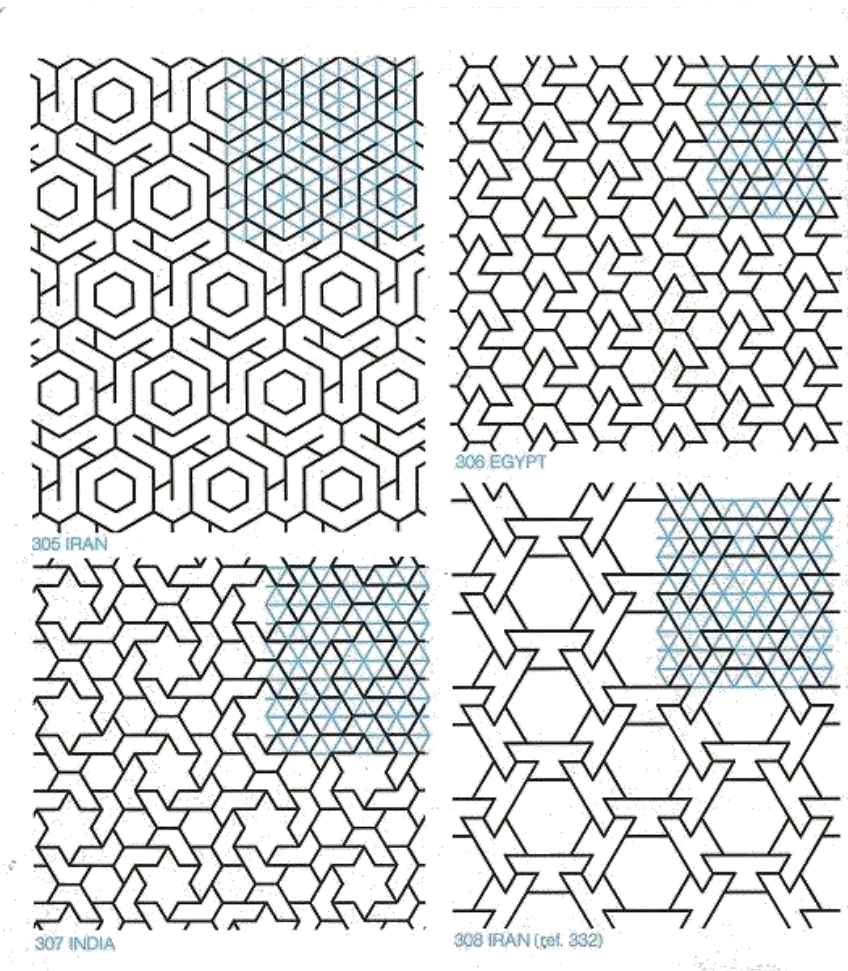
Komolý čtyřstěn



Komolý dvacetistěn



Omalovánky, Mozaiiky

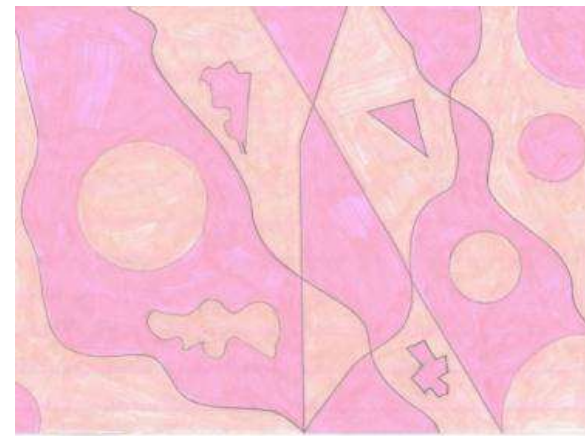
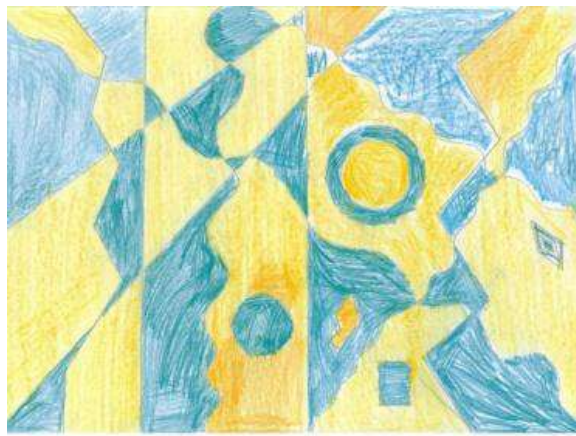
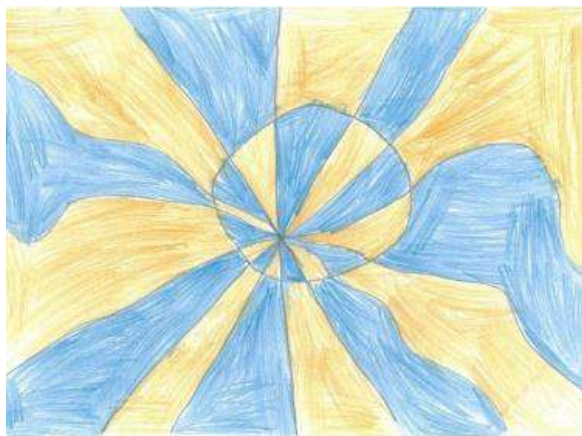




Dvoubarevné omalovánky

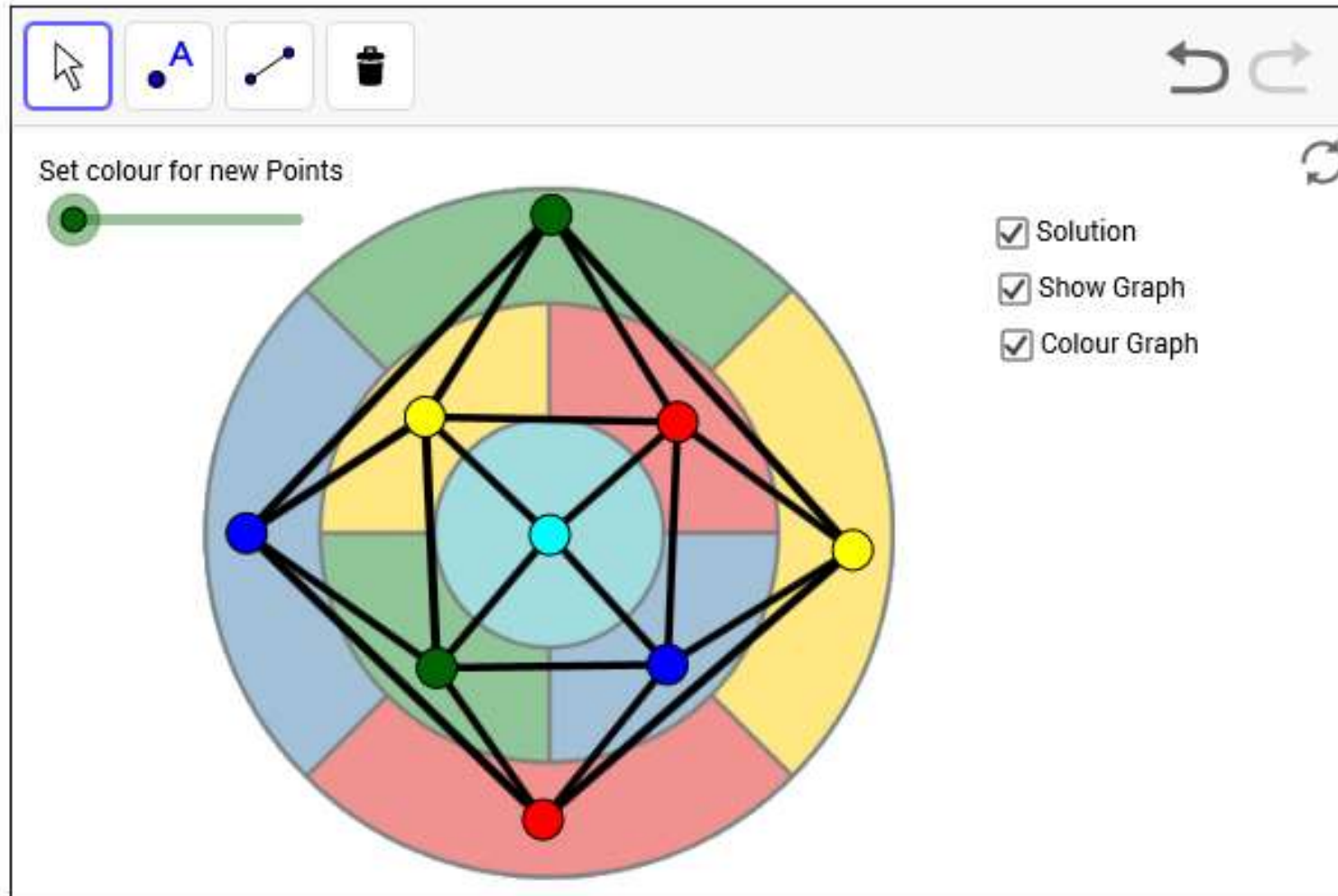
Tatiana Mutinova: [Prvky teorie grafů v učivu matematiky na 1. stupni základní školy](#),
diplomová práce, PdF UK v Praze, 2014

Jak vytvořit mozaiku na výkres A4 tak, abychem si vystačili se dvěma pastelkami, a přitom každý dílek takto vytvořené mozaiky by sousedil s dílkem jiné barvy?



Transformation of maps into graphs.

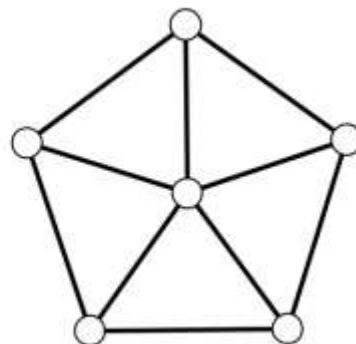
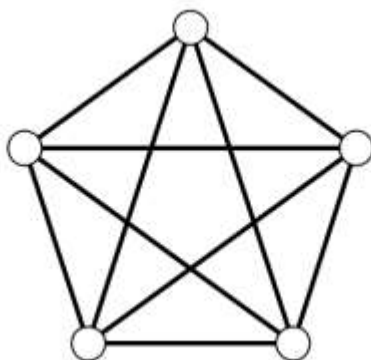
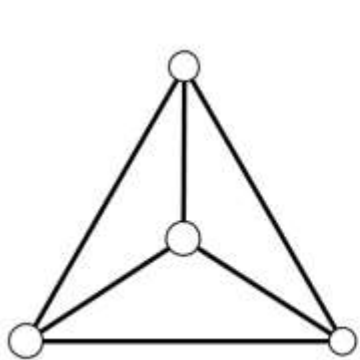
Some problems can be solved by converting them into graphs. Do so by following the tasks below the app.



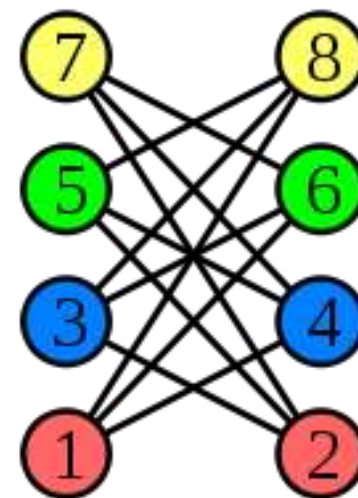
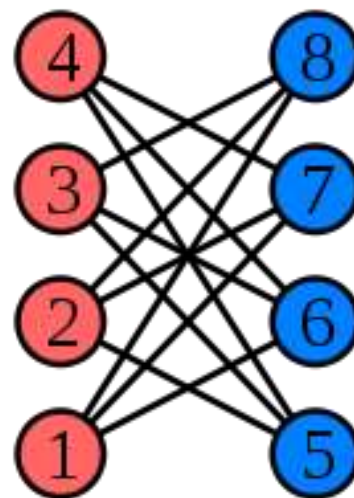
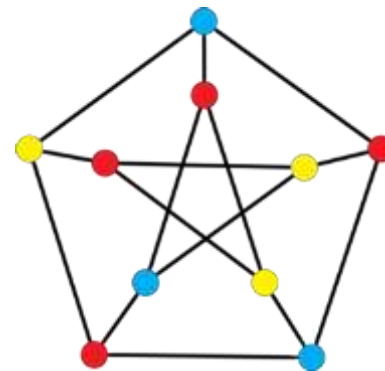
1) Create the corresponding graph with the same colours as the map is showing. 3) Check the solution and compare it to your result.

<https://ggbm.at/kjS6a7VE>

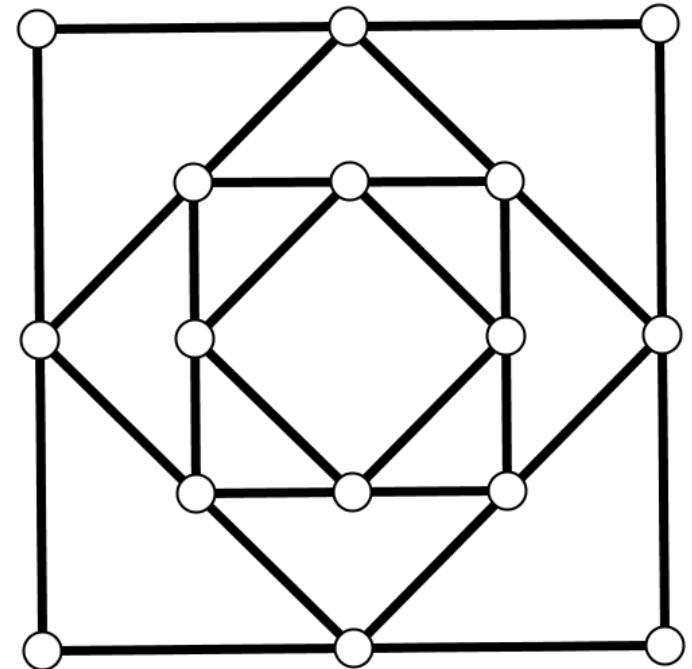
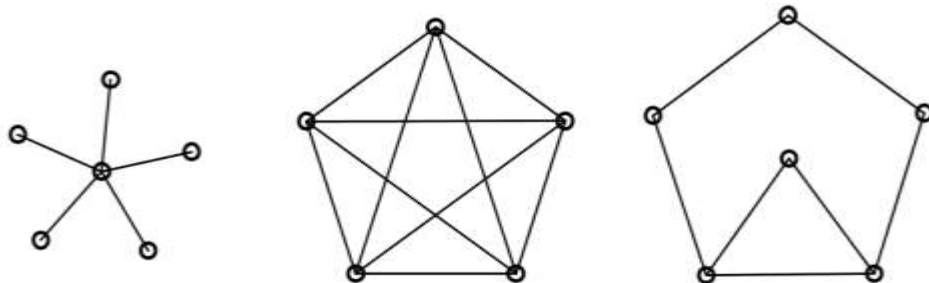
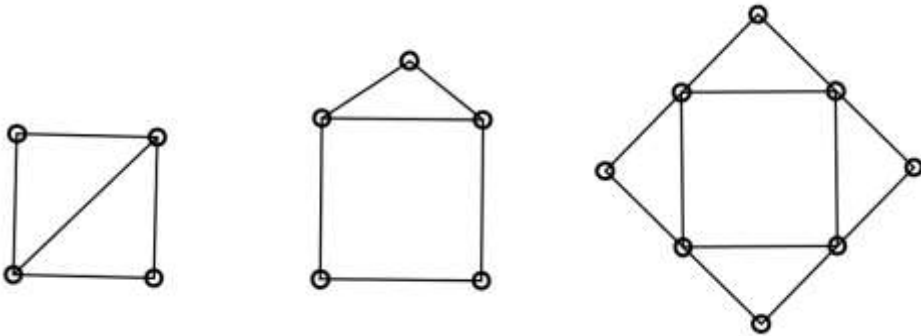
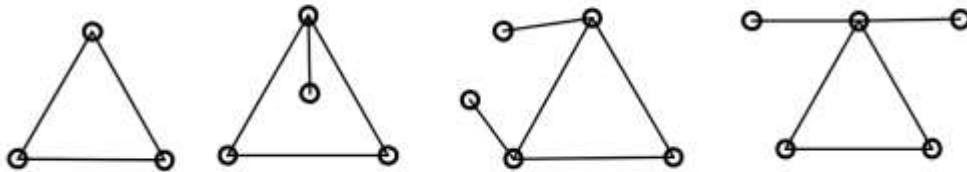
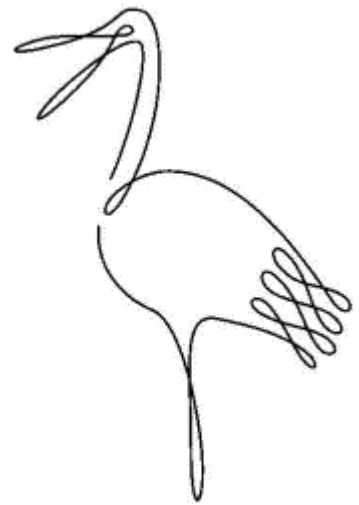
Barvení grafu

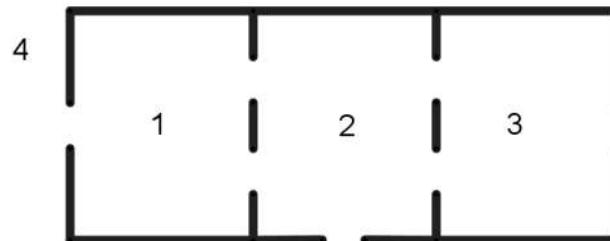
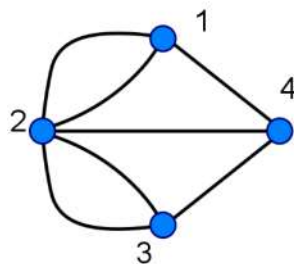
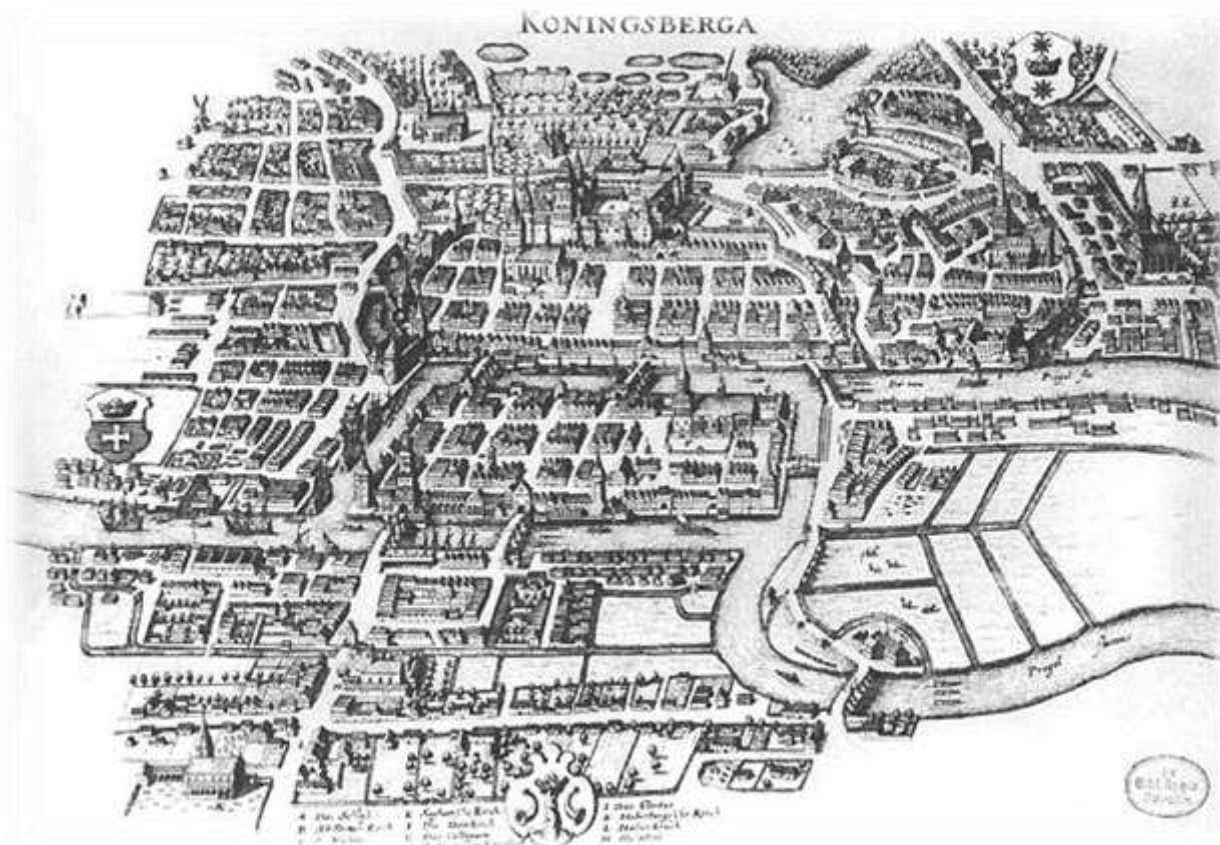


Dürerův graf



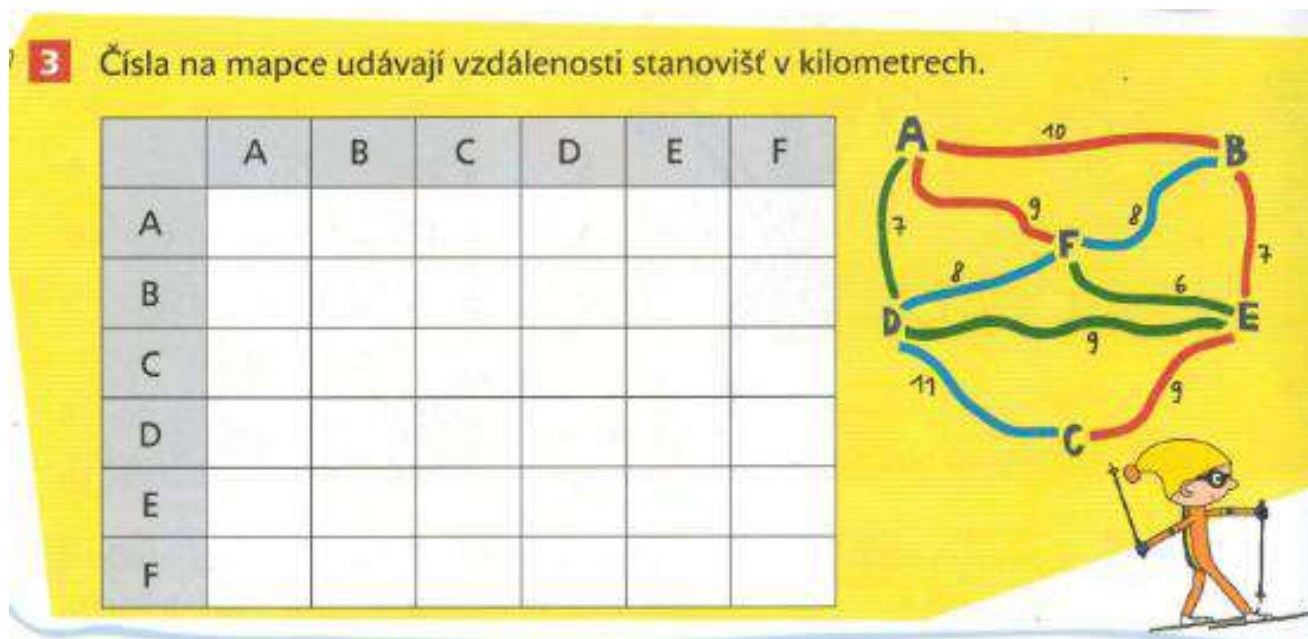
EulEROVY tahy - jednotážky





1652

Cesty v grafu

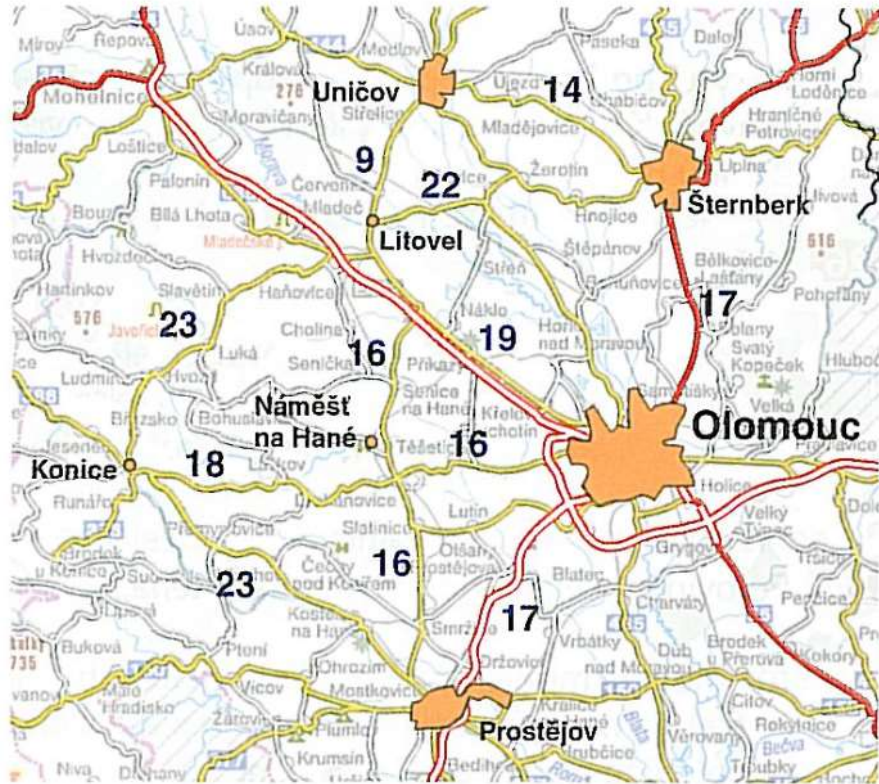


Lucka chce projít všechny stopy. Myslíte si, že je možné, aby ho prošla tak, že projde po každé stezce právě jednou?

Hejný, Jirotková a Slezáková-Kratochvílová, 2007-2011, 2. roč., 2. díl, s.32)

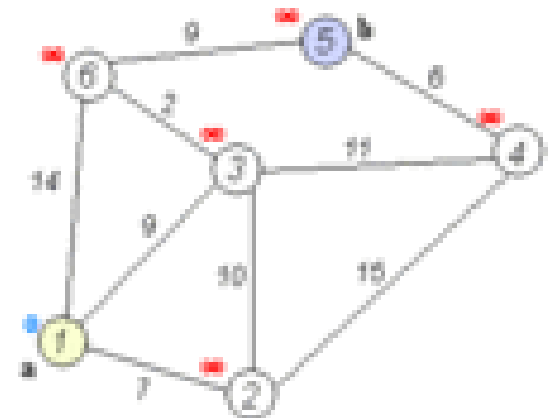
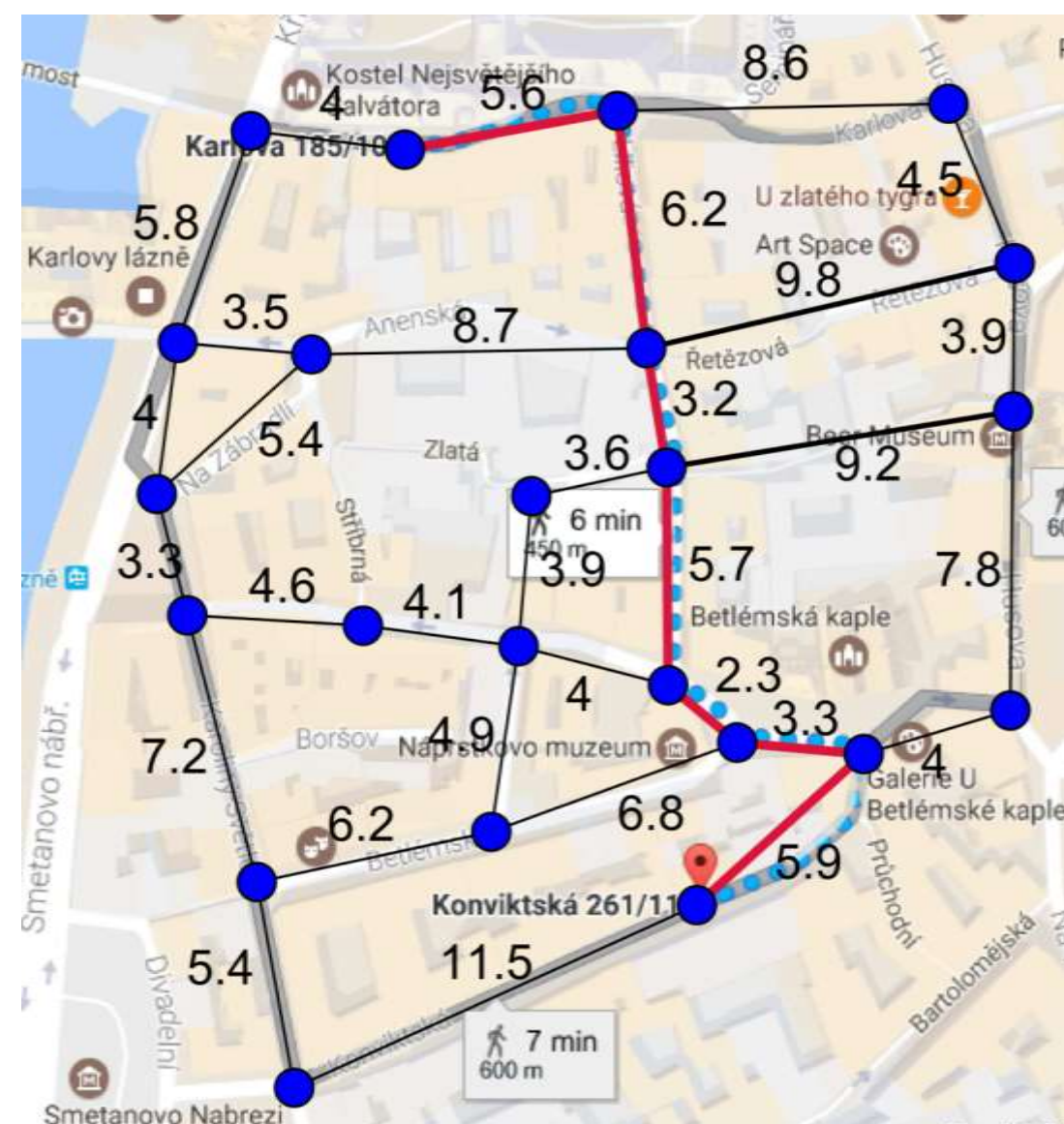
Cesty v grafu

20 Mezi 7 obcemi na mapě ze strany 91 jezdí dvě autobusové linky. První, kyvadlová, na trase Prostějov – Náměšť na Hané – Litovel – Uničov a zpět. Druhá, okružní, na trase Šternberk – Litovel – Konice – Náměšť – Olomouc – Šternberk. Napiš jízdní řád pro kyvadlovou linku, když první autobus vyjíždí z Prostějova v 5:00 ráno, jízda mu trvá tolik minut, kolik kilometrů je dlouhá trasa, na zastávce v Náměšti i Litovli stojí pokaždé 6 minut a na konečné v Uničově i Prostějově stojí 11 minut. V průběhu dne autobus projede celou trasu nahoru i dolů osmkrát.



M. Hejný, D. Jirotková, E. Bomerová, 2010, Matematika, učebnice pro 4. ročník ZŠ, s.103)

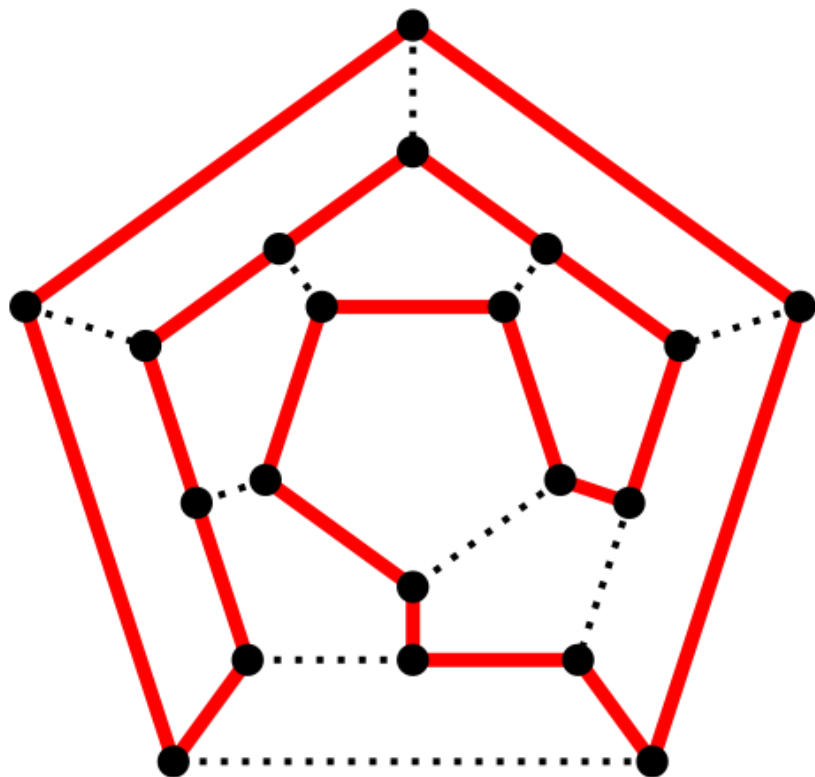
NejkratsiVzdalenost[ulice, start, cil]



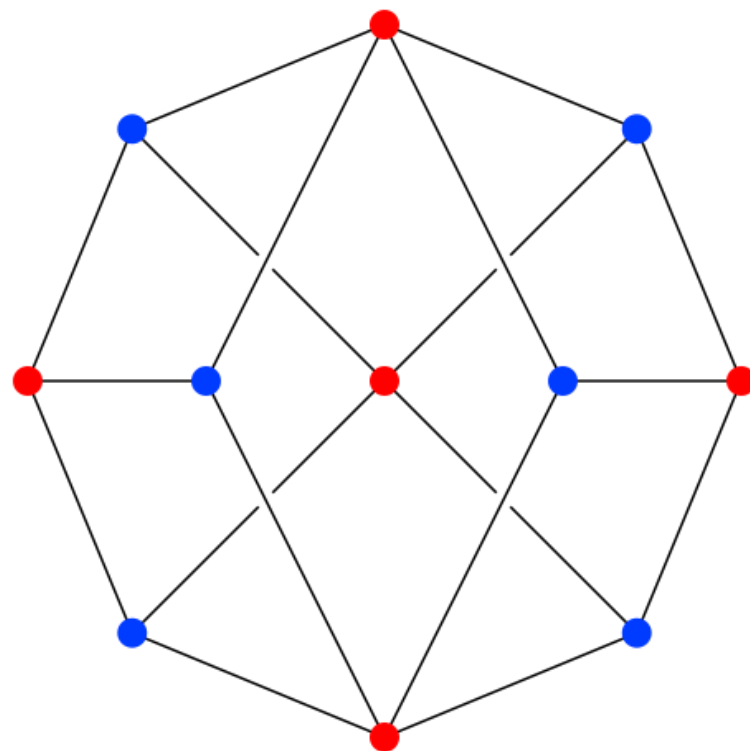
ObchodniCestujici[Mesta]



Hamiltonovská cesta

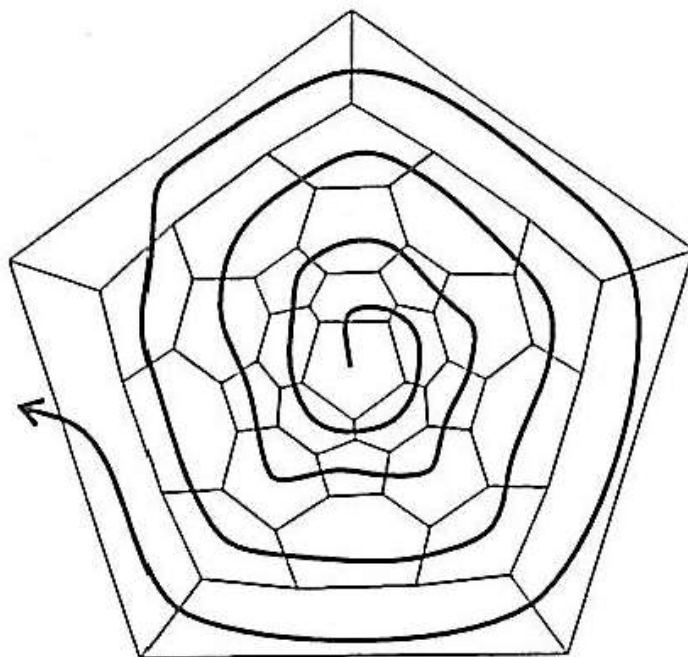


William Rowan Hamilton (1805-1865)
Icosian game 1857



Alexander Stewart Herschel (1836 – 1907)

Hamiltonův graf v krystalografii



Planární graf fullerenu C_{60} a spirála pro průchod stěnami.

P. W. Fowler, D. E. Manolopoulos : **An Atlas of Fullerenes**, 2006

Problém okružních jízd VRP (Vehicle Routing Problem)

Máme centrální skladiště, ze kterého rozvážíme různé zboží různým zákazníkům. Naším úkolem je najít nejkratší množinu cest, které začínají ve skladišti a vrací se zpět poté, co uspokojí všechny zákazníky.~

