

|                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Tento výukový materiál byl vytvořen v rámci projektu<br>MatemaTech – Matematickou cestou k technice |                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Předmět:                                                                                            | Matematika, fyzika                                                                                                                                                                                                                                                    |
| Téma:                                                                                               | Výpočet délky šroubovice                                                                                                                                                                                                                                              |
| Věk žáků:                                                                                           | 16-19 let                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Časová dotace:                                                                                      | 1 - 2 vyučovací hodiny                                                                                                                                                                                                                                                |
| Potřebné pomůcky,<br>požadavky na<br>techniku:                                                      | - dataprojektor pro učitele                                                                                                                                                                                                                                           |
| Požadované znalosti a<br>dovednosti žáků:                                                           | <ul style="list-style-type: none"> <li>- základní prostorová představivost</li> <li>- délka kružnice, Pythagorova věta</li> <li>- goniometrické funkce</li> <li>- pohyb po kružnici</li> <li>- délková teplotní roztažnost pevných látek</li> </ul>                   |
| Získané dovednosti a<br>znalosti:                                                                   | <ul style="list-style-type: none"> <li>- pochopení informací uvedených v teoretickém úvodu textu</li> <li>- aplikace znalosti výpočtu délky šroubovice při řešení praktické úlohy</li> <li>- pochopení užitečnosti matematiky při řešení reálného problému</li> </ul> |
| Aplikace tématu<br>v reálném životě:                                                                | <ul style="list-style-type: none"> <li>- řešení konkrétní praktické úlohy z praxe – délka odporového vodiče potřebného k navinutí na přívodní hadici s vodou</li> </ul>                                                                                               |
| Zdroje:                                                                                             | - vlastní fotografie, GeoGebra, vlastní GeoGebra book                                                                                                                                                                                                                 |
| Autor:                                                                                              | Mgr. Marek Vejsada                                                                                                                                                                                                                                                    |

# ŠROUBOVICE – ZÁKLADNÍ INFORMACE

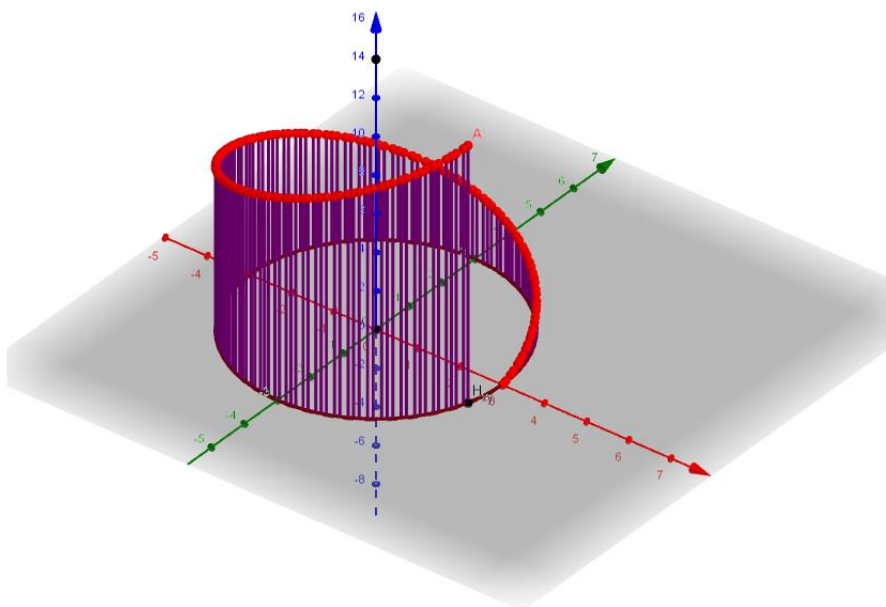
## 1. Šroubovice

Šroubovice je prostorová křivka. Můžeme si ji představit například tak, že roztočíme rovnoměrně válec a tužkou nakreslíme na jeho povrchu rovnoměrným pohybem úsečku rovnoběžnou s osou válce. Trajektorie hrotu tužky je právě šroubovice.

Trochu odborněji: *Šroubový pohyb* vzniká složením rovnoměrného otáčivého pohybu kolem pevné přímky (osy) a rovnoměrného posuvného pohybu ve směru této přímky. *Šroubovice* je pak dráha bodu při šroubovém pohybu – obr. 1. Část šroubovice odpovídající jednomu oběhu (tj. otočení o  $2\pi$  rad) se nazývá *závit*, vzdálenost koncových bodů závitu se nazývá *výška závitu*. [1]

Parametry šroubovice jsou poloměr kružnice, výška závitu a skutečnost, zda jde o levotočivou nebo pravotočivou šroubovici.

Obr. 1:



Vymodelování části šroubovice v programu GeoGebra [2]

## 2. Vlastnosti šroubovice

Jak bylo popsáno v předchozí kapitole, půdorysný průmět šroubovice je kružnice, jejíž parametrické rovnice jsou

$$x = r \cos t,$$

$$y = r \sin t.$$

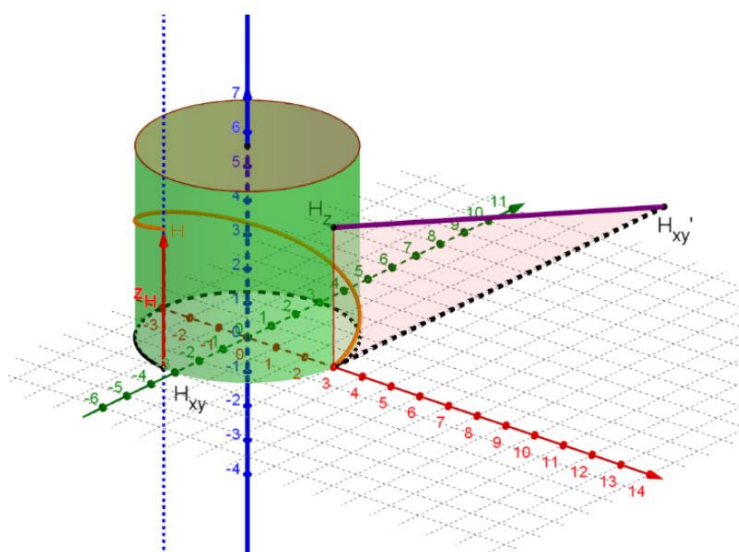
Pokud parametr  $t$  představuje úhel v radiánech, a mění od nuly do  $2\pi$ , opíše bod se souřadnicemi

výše kružnici s poloměrem  $r$ . Pokud přidáme třetí souřadnici

$$z = bt,$$

začne se bod opisující kružnici ještě „zvedat“ ve směru osy  $z$ . Kladný reálný parametr  $b$  udává rychlost zvedání bodu ve směru osy  $z$  a určuje výšku závitů  $2\pi b$ .

Bod  $H_{xy}$  se pohybuje po půdorysné kružnici, viz obr. 2. Pro hodnotu parametru  $t_o$  se bod  $H'_{xy}$  dostane do takové vzdálenosti od osy  $x$ , která odpovídá délce kružnicového oblouku, který je v půdorysu vyznačen černou čárkovanou čarou. Přitom se Bod  $H_{xy}$  „zvedne“ z půdorysné roviny do výšky  $bt_o$ . Délka šroubovice, odpovídající parametru  $t_o$ , je vyznačena tmavou fialovou úsečkou  $H_z H'_{xy}$ .



Obr. 2:

Ilustrace k odvození délky šroubovice, 1. část, vytvořeno v programu GeoGebra [2]

Z předchozí úvahy a obr. 3 vyplývá:

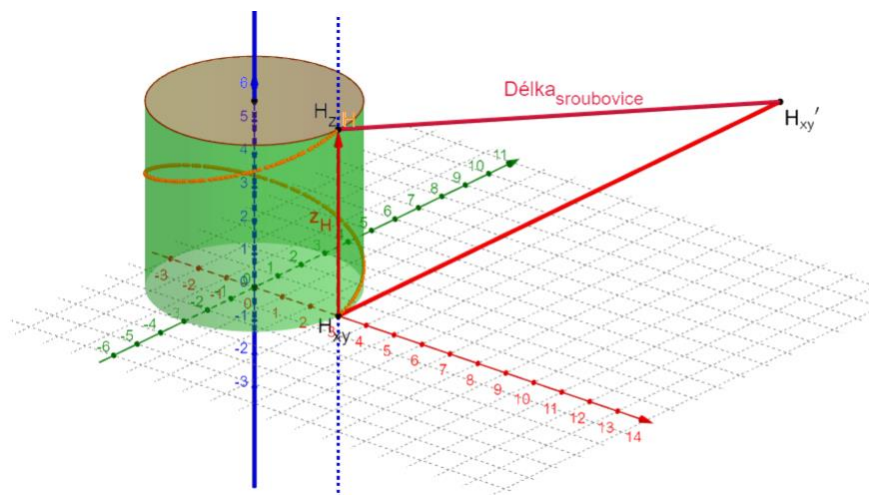
$$\begin{aligned} |H_{xy}H_z| &= bt = 2\pi b \\ |H_{xy}H'_{xy}| &= 2\pi r \end{aligned}$$

Délka jednoho závitu šroubovice je možno vyjádřit vztahem:

$$|H_z H'_{xy}| = 2\pi\sqrt{b^2 + r^2}$$

Poslední výraz udává délku jednoho závitu šroubovice.

Obr. 3:



Ilustrace k odvození délky jednoho závitu šroubovice, 2. část, vytvořeno v programu GeoGebra [2]

Podrobnější informace možno sledovat ve [4]

## 2. Šroubovice kolem nás

Rozhlédneme-li se kolem sebe, a víme-li, co máme hledat, můžeme spatřit šroubovici např. v závitě metrického šroubu (obr. 4), u značení nepřemístitelných překážek (obr. 5), popř. u točitého schodiště (obr. 6).

Obr. 4:



Šroubovicový závit metrického šroubu M6x80, [3]

Obr. 5:



Označení nepřemístitelné překážky na vlakové zastávce Chlumec u Českých Budějovic, [3]

Obr. 6:



Točité schodiště a tobogán – Stezka korunami stromů na Lipně, [3]

## ŠROUBOVICE – PRACOVNÍ LIST

### Zadání úloh:

#### Úloha č. 1:

Uvažujte přívodní hadici pro vodu, viz obr. 7. Její vnější průměr je 32 mm (tzv. pětičtvrtní, v palcích,  $\frac{5}{4} \cdot 2,54 \text{ cm} = 3,175 \text{ cm} \doteq 32 \text{ mm}$ ).

1.1 Vypočítejte délku odporového vodiče namotaného na zmíněnou hadici, má-li hadice délku 10 m a víte-li, že jedna otočka vodiče připadne na 10 cm délky hadice. (Viz model na obr. 8).

1.2 Představte si, že vodič budeme navíjet při 20°C. Zvažte, zda je možné navíjet vodič těsně na hadici.

Obr. 7:



Pětičtvrtní přívodní hadice

Obr. 8:

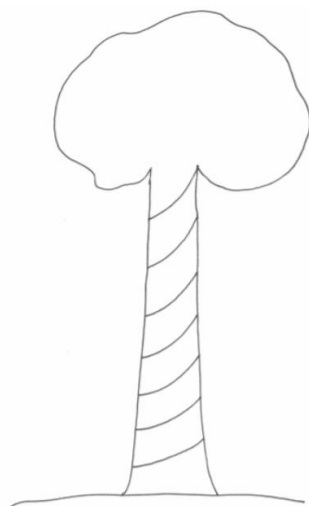


Přívodní hadice obmotaná provázkem místo odporového vodiče (model)

Úloha č. 2:

Podle staré čínské úlohy (9. kapitola *Chiu chang*): Strom má výšku 20 ch'ih (1 ch'ih = 0,35814 m) a obvod kmene 3 ch'ih. Kolem dokola kmenu se obtáčí vinná réva, která dosáhne vrchu kmene po sedmi otočkách. Jaká je délka stvolu vinné révy?

Obr. 9:



K úloze 2.

Úloha č. 3:

Úvodní text k úloze 3, [5], [3]:

Věž Jakobínka v Rožmberku nad Vltavou, která byla podle některých odborníků vystavěna již kolem roku 1300, prochází rozsáhlou rekonstrukcí. Tato rekonstrukce započala v roce 2013 a je prováděna historickými postupy. Nejdůležitějším prvkem bylo vybudování speciálního lešení z ručně opracovaného dřeva vytěženého v místním lese. Toto lešení obepíná věž po vnějším obvodu ve tvaru spirály.

Obr. 10:



K úloze 3 – náčrtek dřevěného lešení a jeho realizace.



Obr. 11:



K úloze 3.

**Zadání úlohy 3:**

Věž Jakobínka je vysoká 40 metrů (k patě kupole) a její vnější průměr je 10 metrů po celé její výšce. Vypočítejte vzdálenost, kterou musí ujít dělník od paty věže až k patě kupole ve vzdálenosti 0,8 metru od zdi věže. Vzdálenost vyjádřete s přesností na desítky metrů. Schůdky mezi jednotlivými segmenty lešení (viz obr. 11) neuvažujte.



## Řešení úloh:

### Úloha č. 1:

1.1 Počet závitů určíme vydělením délky hadice výškou jednoho závitu:

$$10 \text{ m} : 0,1 \text{ m} = 100 \text{ závitů}$$

Délku jednoho závitu  $d_1$  určíme podle vzorce

$$d_1 = 2\pi\sqrt{b^2 + r^2},$$

kde  $r$  je vnější poloměr hadice,  $r \doteq 16 \text{ mm} = 0,016 \text{ m}$ . Parametr  $b$  určíme z výšky jednoho závitu

$$0,1 \text{ m} = 2\pi\{b\} \Rightarrow b \doteq 0,016 \text{ m}$$

$$d_1 = 2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{0,016^2 + 0,016^2} \doteq 0,141 \text{ m}$$

Pro celkovou délku vodiče můžeme psát:

$$d = 100d_1 \doteq 14,1 \text{ m}$$

Jiné řešení pro určení  $d_1$ :

Vyjdeme z obrázku 3. V pravoúhlém trojúhelníku  $H_z H_{xy} H_{xy}'$  platí:

$$|H_z H_{xy}| = 10 \text{ cm} = 0,10 \text{ m}$$

$$|H_{xy} H_{xy}'| = 2\pi r \doteq 6,28 \cdot 0,016 \text{ m} \doteq 0,10 \text{ m}$$

Podle Pythagorovy věty je

$$d_1 = \sqrt{0,10^2 + 0,10^2} \doteq 0,141 \text{ m},$$

což se shoduje s původním postupem.

Závěr:

Délka odporového vodiče by měla být přibližně 14,1 m na 10 m přívodní hadice.

2.1 Předpokládejme, že odporový vodič je vyroben z mědi. Termostat, který je součástí sestavy na ohřívání hadice s vodou, spouští vyhřívání při teplotě  $3^\circ\text{C}$ , takže teplotní rozdíl činí  $\Delta t = 17^\circ\text{C}$ . Při tomto teplotním poklesu se měděný vodič původní délky  $l_0 = 14,1 \text{ m}$  zkrátí o délku

$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta t,$$

kde  $\alpha = 1,7 \cdot 10^{-7} \text{ K}^{-1}$  je koeficient teplotní délkové roztažnosti mědi. Dosadíme-li do předchozího vzorce, dostaneme

$$\Delta l = 14,1 \cdot 1,7 \cdot 10^{-7} \cdot 17 \text{ m} \doteq 4,1 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0,041 \text{ mm}$$

Závěr:

Protože na vypočítanou délku odporového vodiče dojde v daném teplotním intervalu o zkrácení tohoto vodiče o 0,041 mm, je možné ho navíjet těsně, protože toto zkrácení ho nemůže poškodit.

### Úloha č. 2:

Předpokládáme, že strom má stálý průměr po celé délce, po které se otáčí vinná réva.

Představíme si, že kmen stromu otočíme celkem sedm krát kolem své osy. Protože kmen stromu má obvod 3 ch'ih, je vzdálenost osy kmenu před a po rozvinutí  $7 \cdot 3 = 21 \text{ ch'ih}$ . Výška stromu je 20 ch'ih. Délka stvolu vinné révy je přepona pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami 21 ch'ih a 20 ch'ih.

Tedy 29 ch'ih.

Úloha č. 3:

Vyjdeme z obrázku 10, ze kterého určíme počet závitů šroubovice. Napočítáme celkem 12 závitů až k patě kupole. Je tedy

$$l = \sqrt{(12\pi d)^2 + h^2},$$

kde  $d = (10 + 0,8 + 0,8)$  m,  $h = 40$  m a  $l$  je hledaná vzdálenost.

Po dosazení a zaokrouhlení vychází  $l = 438,91$  m  $\doteq 440$  m.

## ŠROUBOVICE – REFERENCE

- [1] ZCU, KMA Přednášky – Doplněné křivky, [online], [cit. 22.8.2018]  
<http://home.zcu.cz/~rvyrut/WWW-KMA/GS2/Prednasky/Doplnene/Doplnene-krivky1.pdf>
- [2] [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)
- [3] VEJSADA, M. – Fotografie z vlastního archivu
- [4] VEJSADA, M. – <https://www.geogebra.org/m/fC6WxtcT>
- [5] iDNES.cz/ Budějovice a jižní Čechy – úryvky z článku, [online], [cit. volně 20.10.18]  
[https://budejovice.idnes.cz/jakobinka-vez-rozmberk-krakorce-dao-/budejovice-zpravy.aspx?c=A180801\\_418072\\_budejovice-zpravy\\_epkub](https://budejovice.idnes.cz/jakobinka-vez-rozmberk-krakorce-dao-/budejovice-zpravy.aspx?c=A180801_418072_budejovice-zpravy_epkub)