Interreg
EVROPSKÁ UNIE
Rakousko-Česká republika
Evropský fond pro regionální rozvoj

# MatemaTech

## Matematickou cestou k technice
## Durch den mathematischen Weg zur Technik

České Budějovice
2019

ATCZ35

EVROPSKÁ UNIE

JOHANNES KEPLER UNIVERSITY LINZ

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jhk.cz

Tento projekt byl podpořen Evropským fondem pro regionální rozvoj.
Dieses Projekt wurde vom Europäischen Fond für regionale Entwicklung unterstützt.

# MatemaTech

Matematickou cestou
k technice

# MatemaTech

Durch den mathematischen
Weg zur Technik

České Budějovice
2019

# Kolektiv autorů / Autoren

Vladislav Beňadik, *ZŠ Dukelská, České Budějovice*
Lucia Del Chicca, *PH Oberösterreich*
Jana Doležalová, *ZŠ Smetanova, Vimperk*
Jan Fiala, *Gymnázium V. Nováka, Jindřichův Hradec*
Roman Hašek, *JU v Českých Budějovicích*
Markus Hohenwarter, *JKU Linz*
Dagmar Jordánová, *JU v Českých Budějovicích*
Carolin Kern, *JKU Linz*
Pavel Kolář, *SPŠ, Tábor*
Edith Lindenbauer, *PH Oberösterreich*
Andreas Lindner, *PH Oberösterreich*
Hana Mahnelová, *Gymnázium B. Hrabala, Nymburk*
Květuše Mrázová, *ZŠ Bezdrevská, České Budějovice*
Jitka Nováková, *ZŠ Sepekov*
Pavel Pech, *JU v Českých Budějovicích*
Vladimíra Petrášková, *JU v Českých Budějovicích*
Hubert Pöchtrager, *PH Oberösterreich*
Sandra Reichenberger, *JKU Linz*
Libuše Samková, *JU v Českých Budějovicích*
Andreas Trappmair, *JKU Linz*
Marek Tyle, *Gymnázium, Písek*
Marek Vejsada, *Česko-anglické gymnázium, České Budějovice*
Tanja Wassermair, *JKU Linz*
Johanna Zöchbauer, *JKU Linz*
Yvona Zuntová, *ZŠ J. K. Tyla, Písek*


ISBN 978-80-7394-744-6

**Publikace vznikla v rámci projektu:**

Název projektu: Matematickou cestou k technice (MatemaTech)
Číslo projektu: ATCZ35
Webové stránky projektu: www.matematech.cz, www.matematech.eu
Délka trvání projektu: 01.09.2016 - 31.08.2019
Alokované prostředky EFRR: 547 073,14 €
Prioritní osa 3: Rozvoj lidských zdrojů
Vedoucí partner: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Projektový partner: Jihočeská hospodářská komora
Projektový partner: Johannes Kepler Universität Linz

*Hlavní cíl projektu:*
*Cílem projektu MatemaTech je vytvoření přeshraniční sítě pro systematické hledání cest a nástrojů, jak zvýšit zájem žáků ZŠ a SŠ o studium technických a přírodovědných oborů na SŠ a VŠ.*

**Die Publikation enstand im Rahmen des Projektes:**

Projektname: Durch den mathematischen Weg zur Technik (MatemaTech)
Projektnummer: ATCZ35
Projekt-Webseite: www.matematech.eu, www.matematech.cz
Projektdauer: 01.09.2016 - 31.08.2019
Genehmigte EFRE-Mittel: 547 073,14 €
Lead Partner: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Projektpartner: Jihočeská hospodářská komora
Projektpartner: Johannes Kepler Universität Linz

*Projektziele:*
*Ziel des Projektes MatemaTech ist die Bildung eines grenzüberschreitenden Netzwerkes und die systematische Suche nach Wegen, um das Interesse von SchülerInnen der Sekundarstufe für technisch-naturwissenschaftliche Fächer zu erhöhen.*

Interreg
EVROPSKÁ UNIE
Rakousko-Česká republika
Evropský fond pro regionální rozvoj

# Obsah

# Inhalt

# PŘEDMLUVA

Od roku 2016 se v jižních Čechách a Horním Rakousku uskutečnily více než tři desítky společných setkání českých a rakouských učitelů matematiky a žáků základních a středních škol, jejichž spojujícím tématem byla výuka matematiky a její význam pro společnost, přírodní vědy a technickou praxi. Patřily mezi ně například společné česko-rakouské workshopy a semináře pro učitele matematiky, které byly věnované inovativním postupům výuky matematiky, přeshraniční soustředění žáků základních a středních škol se zájmem o matematiku, návštěvy průmyslových podniků zaměřené na aplikace matematiky v technické praxi nebo popularizační akce pro širokou veřejnost představující sepětí matematiky s technikou. Všechny tyto akce byly pořádány v rámci česko-rakouského projektu Matematickou cestou k technice, zkráceně MatemaTech, financovaného v rámci programu přeshraniční spolupráce Interreg V-A Rakousko – Česká republika (číslo projektu ATCZ35). Přehled všech akcí projektu MatemaTech je k dispozici v projektové databázi iBox na adrese www.at-cz.eu/cz/ibox/po-3-rozvoj-lidskych-zdroju/atcz35_matematech a na stránkách projektu www.matematech.cz a www.matematech.eu.

Motivací pro realizaci projektu MatemaTech, jehož řešiteli jsou Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Jihočeská hospodářská komora a Johannes Kepler Universität Linz, je skutečnost, že stejně jako v celé Evropské unii, tak i v příhraniční česko-rakouské oblasti je pozorován pokles zájmu o studium technických a přírodovědných oborů na středních a vysokých školách. Podle zkušeností učitelů i názoru odborníků na vzdělávání je cestou, jak čelit tomuto nepříznivému trendu, výuka přírodovědných a technických předmětů s důrazem na jejich vzájemné propojení a přímou vazbu s reálným životem. Jako prostředník tohoto propojení hraje klíčovou roli ve vzdělávání na základních a středních školách matematika.

Hlavním cílem projektu MatemaTech bylo vytvoření přeshraniční sítě pro systematické hledání cest a nástrojů, jak prostřednictvím výuky matematiky zvýšit zájem žáků základních a středních škol o studium technických a přírodovědných oborů na středních a vysokých školách. V rámci této sítě spolupracují učitelé základních a středních škol se zástupci průmyslových podniků a s odborníky na vzdělávání v matematice na vytváření inovativních výukových materiálů založených na využití digitálních technologií a zaměřených na konkrétní aplikace matematiky v přírodních vědách a v technické praxi. Tyto materiály, v počtu kolem šedesáti, jsou publikovány na české a rakouské webové stránce projektu www.matematech.cz a www.matematech.eu. Dvacet šest z těchto materiálů, jejichž autory jsou učitelé základních i středních škol z Jihočeského kraje a z Horního Rakouska, je představeno v této bilingvní publikaci. Jejím cílem je zprostředkovat i ostatním učitelům uvedených regionů poznatky o možnostech rozšiřování zájmu o techniku při výuce matematiky, které byly získány při řešení projektu MatemaTech.

Kniha je bilingvní, skládá se ze dvou obsahově identických jazykových verzí, české a německé, z nichž každá je tvořena dvaceti sedmi kapitolami. V první kapitole, napsané společně zástupci Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích a Johannes Kepler Universität Linz, je podána zevrubná informace o vlastním projektu a o jeho výstupech. Zbývající kapitoly jsou věnovány vybraným materiálům, každá kapitola jednomu.

# 1. Matematickou cestou k technice

Publikace MatemaTech - Matematickou cestou k technice shrnuje výsledky stejnojmenného projektu, který je řešen v rámci přeshraniční spolupráce mezi Jihočeským krajem a Horním Rakouskem. Projekt je financován z Evropského fondu pro regionální rozvoj, programu INTERREG V-A Rakousko – Česká republika, vychází z dlouhodobé spolupráce Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích (JU) a Johannes Kepler Universität Linz (JKU) v oblasti didaktiky matematiky a je motivován společnou potřebou zvyšovat zájem žáků základních a středních škol o technické a přírodovědné obory ve vazbě na trh práce.

**Motivace projektu**

Důvodem pro zahájení řešení tohoto projektu byl neustále se prohlubující pokles zájmu žáků základních a středních škol o studium matematiky a technických oborů na středních a vysokých školách. Významný impulz vzešel také z realizace předcházejícího společného projektu JU a JKU Matematika přes hranice: Jak zvýšit zájem středoškolských studentů o matematiku – výměna zkušeností a hledání nových cest (2012 - 2014), jehož výstupy byly prezentovány prostřednictvím obou zapojených univerzit a příslušných hospodářských komor průmyslovým podnikům v obou regionech, které následně projevily zájem účastnit se inovace výukových materiálů v souvislosti s praktickým využitím matematiky a rozvojem zájmu o techniku. Potvrzený byl také zájem ze strany základních a středních škol, resp. učitelů matematiky, na obou stranách hranice. Partnerské organizace, JU jako vedoucí partner spolu s JKU a Jihočeskou hospodářskou komorou, proto připravily tento jedinečný projekt s cílem vytvoření přeshraniční sítě pro systematické hledání cest a nástrojů, jak zvýšit zájem žáků základních a středních škol o studium technických a přírodovědných oborů na středních a vysokých školách. Jihočeská hospodářská komora (JHK) jako partner projektu plní důležitou roli prostředníka mezi JU a průmyslovými podniky v Jihočeském kraji. Podobným způsobem se Hospodářská komora Horního Rakouska, oddělení průmyslu, spolupodílela na výběru průmyslových podniků v Horním Rakousku a zprostředkování jejich spolupráce s JKU.

**Výstupy projektu**

Jako hlavní výstupy projektu Matematickou cestou k technice lze jmenovat:

- Vytvoření souboru inovativních výukových materiálů pro výuku matematiky na základních a středních školách v češtině a němčině s využitím počítačových technologií včetně využití volně stažitelného matematického softwaru GeoGebra vyvíjeného na JKU.
- Vytvoření pracovních skupin učitelů za základních a středních škol doplněných o zástupce vybraných průmyslových podniků pro tvorbu výukových materiálů.
- Realizace přeshraničních koordinačních a vzdělávacích aktivit pro různé organizace a veřejnost (workshopy, semináře pro učitele, soustředění pro žáky, akce pro veřejnost).

- Založení a spuštění provozu vzdělávacího centra STEM (Science, Technology, Engineering, and Mathematics) na JU na základě zkušeností STEM centra na JKU s cílem zajistit soustavné a dlouhodobé prosazování myšlenek projektu a šíření získaných poznatků.

Hlavními cílovými skupinami projektu jsou vzdělávací instituce, jejich pracovníci a žáci, pro které jsou výstupy projektu, zejména nové výukové materiály v elektronické podobě a akce v rámci projektu, primárně určeny.

Prostřednictvím Jihočeské hospodářské komory byly na projekt navázány tři průmyslové podniky z Jihočeského kraje: MOTOR JIKOV Group a.s. (konkrétně jeho provozy v Českých Budějovicích a Soběslavi), ZVVZ a.s. (provoz Milevsko) a ROHDE & SCHWARZ závod Vimperk, s.r.o. Stejně tak i v Horním Rakousku byla navázána spolupráce s následujícími průmyslovými podniky: Energie AG Oberösterreich, Invest-Design Vermögensverwaltung GmbH, Ganser Liftsysteme, Schaumann GmbH & Co KG, Wenna Glas GmbH. Prostřednictvím JU a JKU je do projektu zapojeno 10 základních a středních škol na každé straně hranice.

Vytvoření projektového týmu, který by sdružoval učitele ze základních a středních škol spolu s odborníky na vzdělávání v matematice na každé straně hranice, bylo základem pro úspěšnou realizaci projektu. Jádro řešitelského týmu tvořili učitelé z obou partnerských univerzit. V čele rakouské části týmu stál prof. Markus Hohenwarter, v čele české části pak prof. Pavel Pech. Jejich účast byla zárukou úrovně práce projektového týmu. Klíčovými členy týmu pak byli učitelé z pěti základních a pěti středních škol na každé straně hranice. Při jejich výběru byly využity dlouhodobé zkušenosti ze setkávání s učiteli v rámci dalšího vzdělávání učitelů matematiky. Tým se v průběhu realizace projektu scházel formou společných workshopů každý rok vždy dvakrát na české straně a jednou na rakouské straně. Během těchto workshopů byl celý tým dva dny pohromadě a pracoval na předem připravených otázkách. Místa workshopů byla vybírána se zřetelem k pamětihodnostem a technickým zvláštnostem v obou partnerských regionech. Například během workshopu v Rožmberku nad Vltavou byla navštívena hradní věž Jakobínka, která je opravována technickými prostředky doby svého vzniku. Pod odborným výkladem pana Mgr. Petra Pavelce, Ph.D. z Územní památkové správy Národního památkového ústavu v Českých Budějovicích členové projektového týmu odhalovali matematickou podstatu realizace a fungování konstrukcí a zařízení využitých při konstrukci věže (zvedání břemen, kladkostroj, nakloněná rovina, šroubovice apod.). Obdobně během workshopu ve Vodňanech se při návštěvě Střední rybářské školy účastníci setkali s řadou předmětů technického charakteru, ke kterým bylo nutné použít znalosti z matematiky. Stejně tak tomu bylo při workshopech v Rakousku, kdy byli účastníci seznámeni například s technickou realizací výroby ohýbaného skla v továrně Wenna Glass nebo navštívili provoz továrny Gmundner Keramik.

Činnost v projektu MatemaTech vychází z dlouhodobých zkušeností, jež naznačují, že možnou cestou, jak čelit poklesu zájmu o technické předměty, je vyučovat přírodovědné a technické předměty s důrazem na jejich vzájemné propojení a přímou vazbu s reálným životem a využívat matematiku jako prostředníka tohoto propojení.

Během tří let trvání projektu se uskutečnilo 9 společných česko-rakouských workshopů obou projektových týmů, 14 seminářů pro učitele matematiky, 9 společných soustředění pro žáky a studenty z obou stran hranice a 5 akcí pro širokou veřejnost. Průběžně po celou dobu trvání projektu probíhaly exkurze žáků a studentů základních a středních škol v průmyslových podnicích. Tyto exkurze byly vždy připravované ve spolupráci zástupce příslušného podniku s učitelem matematiky tak, aby se matematická témata mohla promítnout do obsahu exkurze a obsah exkurze se mohl promítnout do aktivit v hodinách matematiky. V návaznosti na exkurze a na zkušenosti jednotlivých učitelů zapojených do projektu vznikaly pak výukové materiály zaměřené na vztah matematiky a techniky.

Semináře pro učitele matematiky základních a středních škol se konaly vždy dva za jeden rok na JU a JKU.  V jednom z těchto seminářů byli učitelé průběžně seznamováni s výsledky projektu  a s prací učitelů ze zapojených škol. Byly představovány soubory příkladů z matematiky, které jsou vhodné při řešení technických problémů z praxe (konstrukce mostů, kladkostroj, typy převodů, konstrukce lan apod.).  Ve druhém semináři v každém roce, který byl většinou pořádán v počítačových učebnách, pak účastníci pod odborným vedením učitelů zapojených v projektu řešili vybrané matematické problémy. Při jejich řešení byly využívány nové technologie včetně programu dynamické geometrie GeoGebra.

Velmi cenná byla vzájemná setkávání žáků z českých a rakouských škol. Během těchto setkání žáci komunikovali v angličtině. Nejprve zpravidla navštívili pořádající školu, případně i jeden průmyslový podnik. Společné česko-rakouské skupiny žáků následně řešily matematické problémy spojené s technikou a místními památkami. Vzájemné návštěvy žáků se takto konaly na obou stranách hranice. Dlužno dodat, že uvedená setkání  žáků obou zemí, komunikace v angličtině a společná řešení problémů vedou často k navázání dlouhodobých kontaktů.  Tyto aktivity byly velmi oceňovány jak samotnými žáky, tak i jejich rodiči.

V rámci projektu MatemaTech probíhaly v obou regionech také akce Setkání s matematikou a technikou určené pro širokou veřejnost, na kterých bylo, také za pomoci vybraných výstupů projektu, členy projektového týmu populární formou prezentováno sepětí matematiky s technikou. Na české straně se Setkání s matematikou a technikou konala při příležitosti Dobrodružství s technikou, akce, jejímž hlavním pořadatelem je Jihočeská hospodářská komora, partner projektu. S myšlenkou projektu a s jeho výstupy tak mělo možnost se seznámit několik tisíc návštěvníků, většinou žáků z různých základních a středních škol, jejich učitelů a rodičů. Setkání s matematikou a technikou určená pro širokou veřejnost se konala také v Linci. Například formou „LIT Open House Day - Treffen mit Mathematik und Technik „ (LIT je zkratkou pro Linz Institute of Technology, část JKU), kde mělo mnoho návštěvníků příležitost vyzkoušet si různé aktivity a interaktivní simulace ilustrující sepětí matematiky s technikou. Také akce „ Langen Nacht der Forschung „ a „Family Day“, které byly součástí konference Bridges v Linci, se staly dobrými příležitostmi pro to, aby se návštěvníci různých věkových kategorií seznámili s myšlenkou projektu MatemaTech a vyzkoušeli si materiály v jeho rámci vytvořené.

### Vzdělávací centrum STEM

Jako jeden z výstupů projektu MatemaTech bylo na Jihočeské univerzitě v Českých Budějovicích, na Pedagogické fakultě, založeno vzdělávací centrum STEM (STEM Education Centre). Stalo se tak 29. srpna 2018 za přítomnosti děkana Pedagogické fakulty Mgr. Michala Vančury, Ph.D., prof. Dr. Markuse Hohenwartera z Linz School of Education, Department of STEM Education, JKU, prof. RNDr. Pavla Pecha, CSc. z Katedry matematiky PF JU a dalších členů projektového týmu z obou partnerských regionů při příležitosti semináře pro učitele matematiky základních a středních škol Jihočeského kraje.

Vzdělávání STEM reprezentuje mezipředmětový přístup k výuce, který vychází z reálného sepětí matematiky s vědou a technikou (STEM: Science, Technology, Engineering, and Mathematics). Vzdělávací centrum STEM na Jihočeské univerzitě si stanovilo následující cíle:

- Podpora učitelů základních a středních škol i studentů učitelství ve vyučování v duchu myšlenky vzdělávání STEM sdílením poznatků získaných řešením projektu MatemaTech, formou workshopů, seminářů, kurzů a přednášek.
- Pokračování v práci započaté v projektu MatemaTech, další rozvíjení získaných poznatků a jejich předávání učitelům v regionu.
- Spolupráce s Department of STEM Education na JKU Linz a s dalšími centry zaměřenými na vzdělávání STEM, jak na zahraničních, tak i na domácích univerzitách připravujících učitele základních a středních škol.

Vzdělávací centrum STEM se podílelo na organizaci a pořádání přednášky prof. Thomase Kobally, děkana College of Education, Georgia Southern University, Statesboro, Georgia, USA a erudovaného odborníka na STEM vyučování, který hostoval na PF JU. Přednáška s názvem „STEM Teaching and Learning in the USA: One Science Educator's Perspective" se konala 11. dubna 2019. Prof. Koballa v ní seznámil přítomné s myšlenkou STEM vzdělávání, s jeho historií v USA a představil několik konkrétních příkladů, které řešil s žáky základních škol, a v nichž se propojovalo řešení technických problémů s aplikací přírodních věd a s využitím znalostí matematiky.

### Spojitost matematiky s technickými obory

V rámci projektu MatemaTech byl proveden dotazníkový výzkum mezi žáky 9. ročníků základních škol na téma „Spojitost matematiky s technickými obory." Do šetření se zapojilo 9 základních škol z okresů Tábor a Písek, kde byl dotazník zadán celkem 169 žákům devátých tříd. Dotazník obsahoval 9 otázek zaměřených na užití matematiky v každodenním životě, na pojem technika a její propojení s matematikou a na výběr budoucí střední školy a eventuálního povolání žáků. Dotazník byl žákům zadán před jejich návštěvou podniků a po jejich návštěvě v podnicích (cca 2 měsíce poté). Byla položena celá řada hypotéz (viz www.matematech.cz/category/materialy/vyzkum), z nichž některé se potvrdily a některé nikoliv. Předmětem zkoumání byla i skutečnost, zda návštěva podniků měla vliv na změnu postoje žáka k matematice či zda jej ovlivnila při jeho volbě povolání. Další šetření, které bylo v rámci projektu provedeno, bylo šetření zkoumající faktory ovlivňující žáky (ZŠ i SŠ) při volbě jejich povolání (rodinné zázemí, prestiž povolání, prospěch ve škole atd.).

**Webové stránky projektu**

Projekt MatemaTech má své webové stránky www.matematech.cz a www.matematech.eu informující v češtině a v němčině o jeho motivaci, cílech a výstupech. Na stránkách jsou podrobně zmapovány a fotografiemi dokumentovány všechny aktivity projektu. Dominantní částí obsahu těchto stránek je pak kolekce kolem šedesáti výukových materiálů, hlavních výstupů projektu. Materiály, tímto způsobem zpřístupněné širokému okruhu zájemců, jsou na těchto stránkách prezentovány způsobem, který dovoluje jejich přímé použití. Zájemce, učitel matematiky na základní nebo střední škole, případně žák nebo jeho rodič, získají jak prvotní informace o každém materiálu, tak také všechny potřebné zdroje umožňující jeho okamžité použití. Stránka bude spravována i po ukončení řešení projektu tak, aby mohly být stávající materiály dále využívány a aktualizovány a zároveň aby mohly být doplňovány další materiály související se zaměřením projektu MatemaTech.

Kromě výše uvedených webových stránek jsou všechny aktivity projektu MatemaTech zdokumentovány v projektové databázi iBox programu přeshraniční spolupráce Interreg V-A Rakousko – Česká republika na adrese www.at-cz.eu/cz/ibox/po-3-rozvoj-lidskych-zdroju/atcz35_matematech.

# VORWORT

Seit September 2016 fanden in Südböhmen und in Oberösterreich über dreißig gemeinsame Treffen von tschechischen und österreichischen MathematiklehrerInnen aus der Sekundarstufe statt. Dabei stand der Mathematikunterricht und die Bedeutung von Mathematik für die Gesellschaft, die Naturwissenschaften und die technische Praxis jeweils im Vordergrund. Es fanden einerseits gemeinsame tschechisch-österreichische Workshops und Seminare für Mathematiklehrkräfte statt, in denen neue innovative Methoden für den Mathematikunterricht thematisiert wurden. Andererseits fanden auch grenzüberschreitende SchülerInnen-Camps zur Förderung des Interesses an Mathematik, sowie Besuche verschiedener Industriebetriebe mit Schwerpunkt der Anwendung von Mathematik in der technischen Praxis oder öffentliche Veranstaltungen für alle Altersklassen statt, in denen die Verbindung der Mathematik mit der Technik dargestellt wurde. Alle diese Veranstaltungen wurden im Rahmen des tschechisch-österreichischen Projektes „Durch den mathematischen Weg zur Technik“ kurz: MatemaTech (eine Kombination der tschechischen Wörter Matematic und Technice) organisiert. Dieses Projekt wurde im Rahmen der grenzüberschreitenden Zusammenarbeit Interreg V-A Österreich – Tschechische Republik (Projekt-Nr. ATCZ35) finanziert. Die Übersicht und die Beschreibungen aller Veranstaltungen des Projektes MatemaTech befinden sich in der Projektdatenbank iBox unter www.at-cz.eu/cz/ibox/po-3-rozvoj-lidskych-zdroju/atcz35_matematech sowie auf den Internetseiten des Projektes unter www.matematech.cz und www.matematech.eu.

An dem Projekt MatemaTech beteiligen sich folgende Projektpartner: die Universität Südböhmen in Budweis, die Wirtschaftskammer Südböhmen und die Johannes Kepler Universität in Linz.

Die Motivation zur Durchführung dieses Projekts war die von den Betrieben und der Wirtschaftskammer erwähnte Tendenz, dass das Interesse technische und naturwissenschaftliche Fächer und Fachrichtungen zu lernen und zu studieren in unserem Grenzgebiet tendenziell sinkt. Ein Weg, um diesen ungünstigen Trends entgegenzuwirken, sollte – laut Erfahrungen der LehrerInnen sowie Meinung von Experten - sein, die naturwissenschaftlichen und technischen Fächer mit Fokus auf ihre gegenseitige Verbindung und den direkten Anschluss an das tatsächliche Leben bzw. die Berufswelt zu unterrichten. Als Vermittler dieser Verbindung spielt Mathematik eine wichtige Rolle in der schulischen Ausbildung.

Das Hauptziel des Projektes MatemaTech war die Gestaltung eines grenzüberschreitenden Netzwerkes für die systematische Suche nach Wegen und Instrumenten für die Interessensteigerung der SchülerInnen aus der Sekundarstufe am Lernen und Studium der technischen und naturwissenschaftlichen Fächer und Fachrichtungen. Im Rahmen dieses Netzwerkes erstellten MathematiklehrerInnen der Sekundarstufen in Zusammenarbeit mit Vertretern der Industriebetriebe und mit Experten für Mathematikdidaktik anwendungsbezogene Unterrichtsmaterialien. Diese basieren auf der Anwendung digitaler Technologien und auf konkreten Anwendungen der Mathematik in Naturwissenschaften oder in der technischen Praxis. Es wurden ungefähr sechzig Unterrichtsmaterialien erstellt, die auf der tschechischen bzw. österreichischen Internetseite des Projektes (www.

matematech.cz und www.matematech.eu) veröffentlicht sind. Von diesen erstellten Materialien, deren Autoren LehrerInnen der Sekundarstufe aus Südböhmen und Oberösterreich sind, werden 26 in diesem zweisprachigen Handbuch vorgestellt.

Das Ziel ist, dass die im Projekt erstellten Materialien für eine breite Masse zugänglich gemacht werden. So sollen auch andere LehrerInnen von den Ergebnissen und Erfahrungen des Projekts profitieren können und diese auch in ihren eigenen Unterricht einfließen lassen.

Dieses Buch ist zweisprachig und es besteht aus zwei Teilen, die inhaltlich identisch sind. Sie unterscheiden sich nur in der Sprache (tschechisch und deutsch) und beinhalten jeweils 27 Kapitel. Im ersten Kapitel, das von den VertreterInnen der Universität Südböhmen in Budweis und der Johannes Kepler Universität in Linz geschrieben wurde, ist die allgemeine Information über das Projekt selbst und seine Ergebnisse gegeben. In den weiteren Kapiteln finden Sie ausgewählte Unterrichtsmaterialien für den Mathematikunterricht.

# 1. Durch den mathematischen Weg zur Technik

Die Publikation „MatemaTech – Durch den mathematischen Weg zur Technik“ umfasst die Ergebnisse des gleichnamigen Projektes, das im Rahmen der grenzüberschreitenden Zusammenarbeit zwischen Südböhmen und Oberösterreich durchgeführt wurde. Das Projekt ist aus dem Europäischen Fonds für die regionale Entwicklung, dem Programm INTERREG V-A Österreich – Tschechische Republik, finanziert worden. Es basiert auf der langfristigen Zusammenarbeit der Universität Südböhmen in Budweis (USB) und der Johannes Kepler Universität in Linz (JKU) im Bereich der Didaktik der Mathematik und ist durch das gemeinsame Ziel motiviert, das Interesse der SekundarschülerInnen an technischen und naturwissenschaftlichen Fachrichtungen in Bezug auf den Arbeitsmarkt zu steigern.

**Motivation des Projektes**

Der Grund für den Beginn dieses Projektes war das fallende Interesse der SekundarschülerInnen am Lernen und Studium der Mathematik und der technischen Fächer und Fachrichtungen. Ein bedeutender Impuls kam auch aus der Umsetzung des vorhergehenden gemeinsamen Projektes MatemaTech der USB und der JKU hervor: „Mathematik über Grenzen: Wie kann man das Interesse der MittelschülerInnen an Mathematik erhöhen – Erfahrungsaustausch und Suche nach neuen Wegen (2012 - 2014)“. Die Ergebnisse dieses Projektes wurden mittels beider involvierter Universitäten, der Südböhmischen Wirtschaftskammer und den Industriebetrieben in den beiden Regionen präsentiert. Seitens der Wirtschaftskammer und der Industriebetriebe wurde das Interesse geäußert, sich an der Entwicklung von anwendungsbezogenen Unterrichtsmaterialien für den Mathematikunterricht, die das Interesse der SchülerInnen wecken oder steigern können, zu beteiligen. Auch seitens der MathematiklehrerInnen beider Länder wurde ein Interesse an einer weiteren Zusammenarbeit geäußert. Die Partnerorganisationen, die USB als federführender Partner zusammen mit der JKU und der Wirtschaftskammer Südböhmen, haben deshalb dieses einzigartige Projekt mit dem Ziel der Gestaltung eines grenzüberschreitenden Netzwerkes für die systematische Suche nach Wegen und Instrumenten für die Steigerung des

Interesses der SchülerInnen am Lernen und Studium der Mathematik und der technischen Fächer und Fachrichtungen an den Sekundarschulen vorbereitet.

Die Südböhmische Wirtschaftskammer (JHK) erfüllt als Projektpartner die wichtige Rolle eines Vermittlers zwischen der USB und den Industriebetrieben in Südböhmen.

**Ergebnisse des Projektes**

Die Hauptergebnisse des Projektes „Durch den mathematischen Weg zur Technik" sind wie folgt zu nennen:

- Schaffung einer Sammlung von innovativen Unterrichtsmaterialien für den Mathematikunterricht an Sekundarschulen unter Verwendung von Computertechnologien sowie der frei verfügbaren Mathematiksoftware GeoGebra
- Bildung der Arbeitsgruppen der LehrerInnen und Vertretern ausgewählter Industriebetriebe für die Gestaltung der Unterrichtsmaterialien
- Durchführung von grenzüberschreitenden Koordinations- und Bildungsaktivitäten für verschiedene Einrichtungen sowie für die Öffentlichkeit (Workshops, Seminare für LehrerInnen, Camps für SchülerInnen, Veranstaltungen für die Öffentlichkeit)
- Gründung eines STEM Bildungszentrums (Science, Technology, Engineering, Mathematics) an der Universität Südböhmen anhand der Erfahrungen des STEM Zentrums an der JKU, mit dem Schwerpunkt der systematischen und langfristigen Durchsetzung der Projektideen und Verbreitung der gewonnenen Kenntnisse

Die Hauptzielgruppen des Projektes sind Bildungseinrichtungen und ihre MitarbeiterInnen und SchülerInnen, für welche die Ergebnisse des Projektes, besonders die neuen Unterrichtsmaterialien in der elektronischen Form, sowie die projektrelevanten Veranstaltungen primär bestimmt sind.

Mit Hilfe der Wirtschaftskammer Südböhmen wurden drei Industrieunternehmen in Südböhmen ins Projekt involviert: MOTOR JIKOV Group a.s. (Involvierte Standorte: Budweis und Soběslav), ZVVZ a.s. (Betrieb Milevsko) und ROHDE & SCHWARZ Betrieb Vimperk, .s.r.o. In Oberösterreich konnten fünf Unternehmen für eine Zusammenarbeit gewonnen werden: Energie AG Oberösterreich, Invest-Design Vermögensverwaltung GmbH, Ganser Liftsysteme, Schaumann GmbH & CoKG, Wenna Glas GmbH. Die Bildung eines Projektteams, welches aus LehrerInnen der Sekundarstufe und Mathematik-Didaktik-Experten auf beiden Seiten bestand, war maßgeblich für die erfolgreiche Umsetzung des Projektes verantwortlich. Der Kern des Teams bestand aus Lehrkräften beider Partneruniversitäten, wobei das österreichische Team von Prof. Markus Hohenwarter und das tschechische Team von Prof. Pavel Pech geleitet wurde. Die Kernmitglieder des Teams waren LehrerInnen aus zehn verschiedenen Sekundarschulen aus beiden Ländern. Gemeinsame Projekttreffen fanden zweimal jährlich in Tschechien und einmal jährlich in Österreich statt. Während dieser Workshops arbeitete das Team je zwei Tage lang zusammen an vorher vorbereiteten Fragen. Die Standorte der Workshops wurden im Hinblick auf Sehenswürdigkeiten und technischen Besonderheiten in den beiden Partnerregionen gewählt. Beim Workshop in Rožmberk nad Vltavou wurde zum Beispiel der Burgturm Jakobínka besucht, der mit technischen Mitteln aus der Zeit seiner Entstehung saniert wird. Unter der fachlichen Darstellung von Herrn

Mag. Petr Pavelec, Ph.D. aus der Gebiets-Kulturschutzverwaltung der Nationalen Denkmalschutzbehörde in Budweis haben die Mitglieder des Projektteams die mathematischen Grundlagen der Ausführung und der Funktion der Bauweisen und Einrichtungen abgeschätzt, die zur Konstruktion des Turmes verwendet worden sind (Heben der Lasten, Flaschenzug, schiefe Ebene, Schraubenlinie etc.). Beim Workshop in Vodňany besuchten die TeilnehmerInnen die Mittlere Fischerschule. Dabei erfuhren sie viel über den technischen Charakter der Anlagen. Bei den Workshops in Österreich wurde zum Beispiel die technische Durchführung der Herstellung von gebogenen Glasscheiben des Betriebs Wenna Glas erkundet.

Die Tätigkeiten im Projekt MatemaTech basierten auf langjährigen Erfahrungen der einzelnen Teammitglieder und den fachlichen Expertisen der Teamleiter. Diese deuten an, dass ein möglicher Weg zur Vergrößerung des Interesses an technischen Fächern die Verbindung der naturwissenschaftlichen Unterrichtsfächer mit realen technischen Problemstellungen sein könnte.

Während der Projektdauer von drei Jahren fanden in beiden Ländern insgesamt 9 tschechisch-österreichische Workshops und 14 Seminare für MathematiklehrerInnen, 9 gemeinsame Camps für die SchülerInnen und 5 Veranstaltungen für die breite Öffentlichkeit statt. Während der ganzen Projektdauer erfolgten auch Schulexkursionen zu ausgewählten Industriebetrieben. Diese Exkursionen wurden immer vom Vertreter des jeweiligen Unternehmens in Zusammenarbeit mit einer Lehrperson des Projektes so vorbereitet, dass sich mathematischen Themen in der Exkursion wiederfanden und der Inhalt der Exkursion sich in Aktivitäten der nachfolgenden Mathematikstunden widerspiegeln konnten. Im Anschluss an die Exkursionen sowie aus den Erfahrungen einzelner im Projekt mitwirkender LehrerInnen entstanden außerdem Unterrichtsmaterialien, die sich auf die Verbindung von Mathematik und Technik fokussieren.

Es fanden jährlich jeweils zwei Seminare für die Lehrpersonen des Projektes an der USB und der JKU statt. In einem dieser Seminare wurden die LehrerInnen mit Ergebnissen des Projektes sowie mit der Arbeit der LehrerInnen aus involvierten Schulen bekannt gemacht. Es wurden mathematische Musteraufgaben vorgestellt, die zur Lösung der technischen Probleme aus der Praxis geeignet sind (Brückenbau, Flaschenzug, Arten der Getriebe, Seilkonstruktion etc.). Auch in weiteren Seminaren wurden den teilnehmenden Lehrpersonen die entwickelten Unterrichtsmaterialien vorgestellt und die TeilnehmerInnen bearbeiteten auch ausgewählte mathematische Probleme. Zur Bearbeitung wurden Technologien, wie zum Beispiel die dynamische Mathematiksoftware GeoGebra in Anspruch genommen. Viele Unterrichtsmaterialien, die während des Projektes entstanden, stützen sich auf GeoGebra, da Prof. Hohenwarter der Gründer und CEO von GeoGebra ist.

Als besonders wertvoll stellten sich die Treffen der tschechischen und österreichischen SchülerInnen heraus, bei welchen in englischer Sprache kommuniziert wurde. Die veranstaltende Schule bzw. ein Industriebetrieb wurden besucht und anschließend lösten tschechisch-österreichisch-gemischte Gruppen mathematische Probleme, die mit der Technik und örtlichen Sehenswürdigkeiten verbunden waren. Die gemeinsamen Besuche der SchülerInnen fanden auf beiden Seiten der Grenze statt. Durch den intensiven Kontakt entstanden unter den SchülerInnen oft längerfristige Kontakte, was insbesondere von den SchülerInnen selbst, als auch von den Eltern hoch geschätzt wurde.

Im Rahmen des Projektes MatemaTech erfolgte auch eine Veranstaltung für die breite Öffentlichkeit, genannt “Treffen mit Mathematik und Technik”, bei denen die Verbindung von Mathematik und Technik durch Mitglieder des Projektteams in breitenwirksamer Form anhand ausgewählter Projektergebnisse vorgestellt wurden. Auch in Linz wurden öffentliche Veranstaltungen organisiert und umgesetzt. Am “LIT Open House Day” konnten zahlreiche BesucherInnen verschiedene Aktivitäten und interaktive Simulationen an der Station “Treffen mit Mathematik und Technik” erforschen. Auch die “Lange Nacht der Forschung” und der “Family Day” im Rahmen der Bridges Konferenz in Linz boten jung und alt die Gelegenheit das Projekt und die entstandenen Unterrichtsmaterialien interaktiv auszuprobieren.

Auf der tschechischen Seite fanden die Treffen mit Mathematik und Technik anlässlich der Veranstaltung “Abenteuer mit Technik” statt, die von der Wirtschaftskammer Südböhmen, einem der Projektpartner, organisiert wurde. Auf diese Weise konnten sich einige tausend Besucher, meistens SchülerInnen verschiedener Sekundarschulen, LehrerInnen und Eltern, mit der Idee des Projektes und seinen Ergebnissen bekannt machen.

**Das STEM Bildungszentrum**

Ein Ergebnis des Projektes MatemaTech ist die Gründung des STEM Bildungszentrums (STEM Education Center) an der Pädagogischen Fakultät der Universität Südböhmen in Budweis. Die Eröffnung dieses Bildungszentrums fand am 29. August 2018 unter Teilnahme von Mag. Michal Vančura, Ph.D., Dekan der Pädagogischen Fakultät; Prof. Dr. Markus Hohenwarter von der Linz School of Education, Abteilung für MINT Didaktik, JKU; Prof. RNDr. Pavel Pech, CSc., aus dem Lehrstuhl für Mathematik der Pädagogischen Fakultät der Universität Südböhmens und von weiteren Mitgliedern des Projektteams beider Partnerregionen statt. Die Eröffnung fand im Zuge eines Seminars für die MathematiklehrerInnen der Haupt- und Mittelschulen Südböhmens statt.

Die STEM-Bildung vertritt einen fächerübergreifenden Unterrichtsansatz, der auf der Verbindung von Mathematik mit der Wissenschaft und Technik basiert (STEM: Science, Technology, Engineering, Mathematics). Das STEM Bildungszentrum an der Universität Südböhmen hat sich folgende Ziele gesetzt:

- Unterstützung der LehrerInnen der Sekundarstufe sowie der Lehramtsstudierenden beim Unterricht im Sinne der Idee der STEM-Bildung durch die Verbreitung der im Projekte MatemaTech gewonnenen Kenntnisse, und zwar in der Form von Workshops, Seminaren, Kursen und Vorträge.
- Fortsetzung der Arbeit, mit der im Projekt MatemaTech begonnen wurde, Weiterentwicklung der erhaltenen Kenntnisse und ihre Verbreitung unter LehrerInnen in der Region.
- Zusammenarbeit mit der Abteilung für MINT Didaktik an der JKU Linz und mit weiteren zwei Zentren mit Schwerpunkt der STEM-Bildung, sowohl an ausländischen als auch an inländischen Universitäten mit Lehramt.

Das STEM Bildungszentrum an der Universität Südböhmen beteiligte sich auch an der Organisation des Vortrags von Prof. Thomas Koballa, Dekan des College of Education, Georgia Southern University, Statesboro, Georgia, USA, ein namhafter Experte für den STEM-Unterricht. Die Veranstaltung fand am 11. April 2019 an der

Pädagogischen Fakultät der Universität Südböhmen statt. In dem Vortrag „STEM Teaching and Learning in the USA: One Science Educator's Perspective" referierte Prof. Koballa über die Idee der STEM-Bildung und über dessen Geschichte in den USA. Er stellte einige konkrete Beispiele für den Unterricht vor, in denen die Lösung der technischen Probleme mit Anwendung der Naturwissenschaften und mit mathematischen Kenntnissen verbunden war.

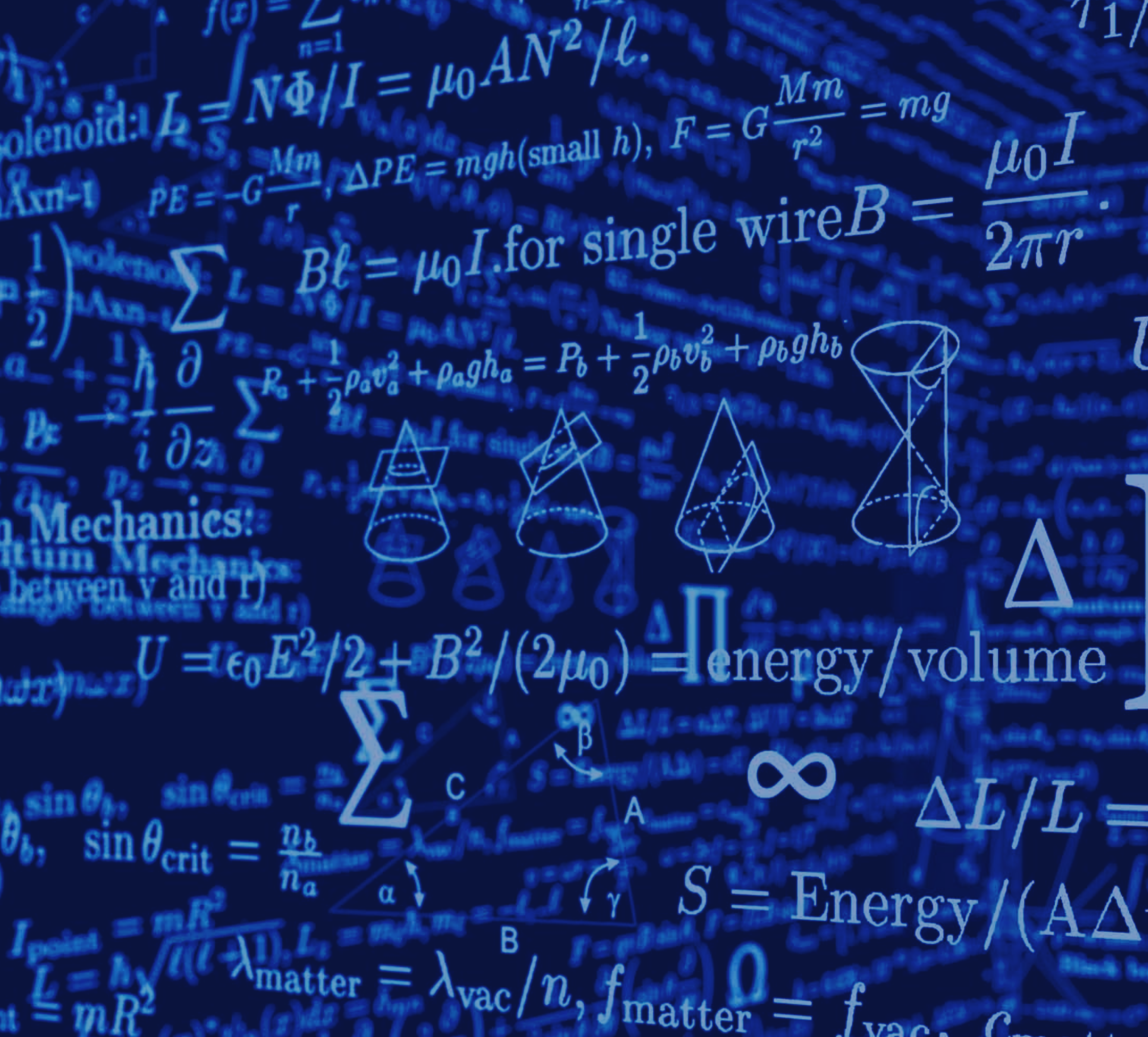
**Verbindung der Mathematik mit technischen Fachbereichen**

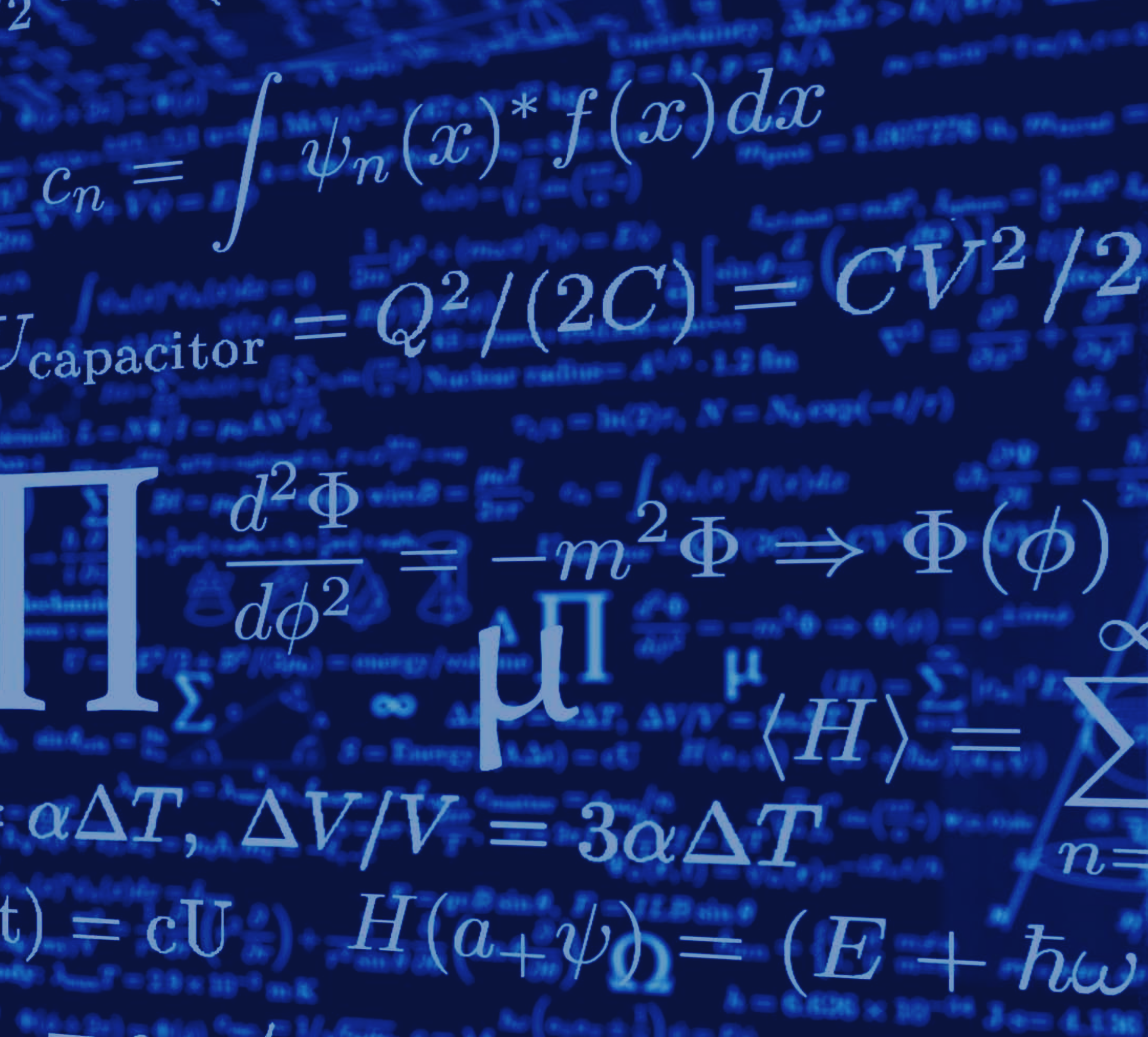
Im Rahmen des Projektes MatemaTech erfolgte eine Umfrage unter SchülerInnen der 9. Klassen an Hauptschulen mit dem Thema „Verbindung der Mathematik mit technischen Fachbereichen." An der Umfrage nahmen neun Hauptschulen aus den Bezirken Tábor und Písek teil und die Fragebogen wurden insgesamt unter 169 SchülerInnen verteilt. Der Fragebogen beinhaltete neun Fragen, welche auf die Anwendung der Mathematik im Alltag, auf den Begriff Technik und ihre Verbindung mit der Mathematik sowie auf die Auswahl der künftigen Mittelschule und des eventuellen Berufes der SchülerInnen fokussierten. Die Fragebogen wurden den SchülerInnen vor dem Besuch der Unternehmen sowie ca. zwei Monate nach dem Besuch überreicht. Die Hypothesen und die Auswertung der Fragebögen sind auf www.matematech.cz/category/materialy/vyzkum zu finden. Die Untersuchung befasste sich auch damit, ob der Besuch der Unternehmen einen Einfluss auf Änderung der Einstellung der Jugendlichen zur Mathematik hatte oder ob dadurch die Wahl des Berufes beeinflusst wurde. Die weitere Untersuchung, die im Rahmen des Projektes durchgeführt wurde, war die Untersuchung von Faktoren, welche die SchülerInnen (der Haupt- sowie Mittelschulen) bei der Wahl des Berufes beeinflussen (Familienmilieu, Prestige des Berufes, Erfolg in der Schule etc.).

**Internetseiten des Projektes**

Auf den beiden Internetseiten www.matematech.cz und www.matematech.eu wurde auf Tschechisch und Deutsch über die Motivation, die Ziele und die Ergebnisse des Projektes MatemaTech informiert. Auf den Internetseiten sind alle Aktivitäten des Projektes beschrieben und mit Fotos dokumentiert. Der größte Teil dieser Internetseiten ist die Sammlung von über sechzig Unterrichtsmaterialien, welche die Hauptergebnisse des Projektes darstellen. Die in dem Projekt entwickelten Materialien sind auf diese Weise einem breiten Interessentenkreis zugänglich gemacht. Sie können direkt im Unterricht eingesetzt werden und mit Hilfe der beigefügten Unterrichtsplanung von jeder Lehrperson eingesetzt werden. Die Interessierten, also die Mathematiklehrkräfte, beziehungsweise die Jugendlichen oder die Eltern, erhalten sowohl die Kurzinformation über jedes Material, wie Thema und Schulstufe, als auch alle notwendigen Quellen, die für den Einsatz des Unterrichtsmaterials benötigt werden. Die Internetseiten werden auch nach Beendigung des Projektes so verwaltet, dass die bestehenden Materialien weiterverwendet werden können und auch weitere Materialien ergänzt werden können, die mit dem Schwerpunkt des Projektes MatemaTech zusammenhängen.

Zusätzlich zu den oben genannten Internetseiten sind alle Aktivitäten des Projektes MatemaTech auch in der Projektdatenbasis iBox des Programms der grenzüberschreitenden Zusammenarbeit Interreg V-A Österreich–Tschechische Republik unter www.at-cz.eu/at/ibox/pa-3-entwicklung-von-humanressourcen/atcz35_matematech dokumentiert.






# MatemaTech

Matematickou cestou k technice

# 2. Statické testování horolezeckého lana

### Úvod

Pracovní list je zaměřený na zkoumání statických vlastností horolezeckého lana a ověřování, zda dané lano splňuje normu EN 892 pro horolezecká lana. Rozšířená varianta tohoto výukového materiálu (o dynamické testování lana) a další odkazy jsou k dispozici na webu www.matematech.cz.

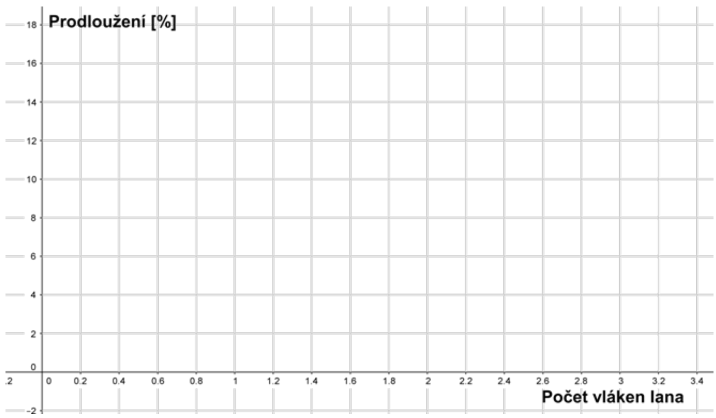
| **Základní informace o materiálu** | |
|---|---|
| Autor | Vladislav Beňadik |
| Věk žáků | 14 – 19 let |
| Časová dotace | 1 vyučovací hodina |
| Potřebné pomůcky a požadavky na techniku | - počítač, popř. tablet<br>- statické a dynamické lano (1,5 m dlouhá)<br>- délkové měřidlo<br>- závaží |
| Požadované znalosti a dovednosti žáků | - vyhledávání a zpracovávání potřebných informací<br>- zručnost s délkovým měřidlem<br>- skupinová spolupráce<br>- základní matematické znalosti – trojčlenka, práce s grafy, výpočet aritmetického průměru, přímá a nepřímá úměrnost |
| Získané dovednosti a znalosti | - zpracování nalezených informací – důležité pro správné testování lana<br>- nalézání chyb a odchylek při měření a výpočtech<br>- vytvoření závěru ze získaných hodnot testování |
| Aplikace tématu | - sport – lezení na umělé stěně a na skalách – bezpečnost materiálu<br>- práce – práce ve výškách, v jeskyních |
| Zdroje | webové stránky: www.theuiaa.org, www.ukclimbing.com, www.climbing.com, www.lezec.cz, www.horolezeckametodika.cz |

**Pracovní list pro žáky**

### Teoretická část

1) Jaký je rozdíl mezi statický a dynamickým lanem? Proč se v horolezení používá dynamické lano?
2) Myslíte si, že uzel snižuje nebo zvyšuje nosnost lana? Odpověď zdůvodněte!
3) Proč se lano skládá z tolika menších pramenů a opletu?
4) Co to je norma EN 892?
5) Vysvětlete statické prodloužení lana?

### Praktická část




*Obr. 2.1: Předloha grafu pro zanesení výsledků měření*

## Úloha č. 1

Vypracujte teoretické otázky v pracovním listu. K nalezení správných odpovědí můžete využít tablet či počítač. Odpovědi pečlivě zapisujte.

## Úloha č. 2

Protože nelze testovat lano ve školních podmínkách s certifikovanými 80 kg, nejprve určete, jaké závaží budete potřebovat na jeden (vnitřní) pramen lana.

## Úloha č. 3

Určete pomocí měření prodloužení 1, 2 a 3 pramenů, které lano je statické a které dynamické. Než ale začnete měřit, zkuste nejprve odhadnout, jak by vám mělo měření vycházet. Co by mělo být grafem? Výsledky i váš odhad zaneste do předlohy grafu v pracovním listu (obrázek 2.1). Nezapomeňte, že přesnost měření může ovlivnit výsledek. Pokud budete mít dostatek času, opakujte měření, čímž můžete zpřesnit výsledek.

**Zkušenosti s použitím výukového materiálu**

Doporučuji pro žáky připravit dva typy lan – statické a dynamické. Tím budou vycházet dvojí výsledky a žáci se budou muset zamýšlet nad závěry. Díky tomu, že se zde nevyužívají žádné složité matematické výpočty, není zde žádná složitá teorie, ale záleží i na manuální zručnosti, tak žáky tento pracovní list velmi bavil.

**Vzorové řešení**

### Úloha č. 1 (odpovědi na teoretické otázky)

1) Dynamické lano je pružné, statické nikoli. Při horolezení se používají dynamická lana z důvodu, že když dojde k pádu, nebude na lezce působit taková rázová síla (https://ggbm.at/wF8Nzf8P) a zmenší se tím možnost zranění.
2) Uzly snižují nosnost lana, některé až o 50 %. Největším problémem je tření a zahřívání materiálů, čímže se lano může poškodit.
3) Z důvodu bezpečnosti. Při poškození opletu a jádra (několika pramenů lan), zbývající prameny lana jsou schopny ještě lezce udržet a lano se nepřetrhne.
4) Bezpečnostní norma určující podmínky, jaké vlastnosti musí horolezecká lana splňovat.
5) Přesné znění je v normě EN 892: Užitné statické prodloužení se zkouší zatížením lana závažím o hmotnosti 80 kg. Nesmí překročit 10 % u lan jednoduchých (jeden pramen lana).

### Úloha č. 2

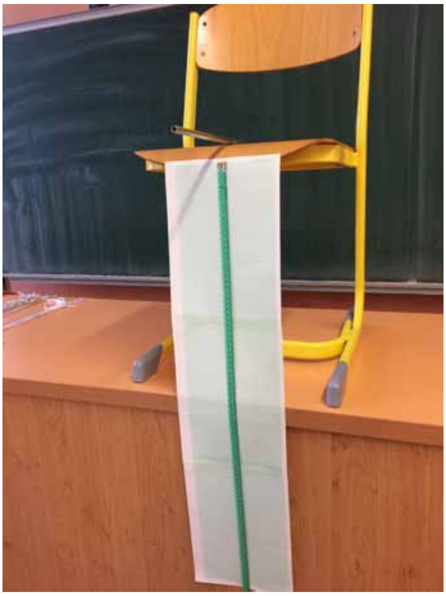
Jak bylo poznamenáno v zadání úlohy, není možné ve školních podmínkách provádět certifikované testy s 80 kg závažím, je vhodné tyto testy provádět na jednom (popř. dvou, třech pramenech lana) s menším závažím. Jak těžké závaží bude potřeba, lze jednoduše spočítat pomocí trojčlenky. Samotný oplet lana nese 20% váhy a zbývající váhu pouze rozpočteme mezi počet pramenů lana (https://ggbm.at/b2GzSyj3). Dáváme pozor, neboť každé lano může obsahovat různý počet pramenů.

### Úloha č. 3

Nejprve odhadneme prodloužení 1, 2 i 3 pramenů lan tak, že budeme předpokládat, že při zatížení 1 pramene lana nedojde k maximálnímu prodloužení (12 %), ale jen k částečnému (8 %). Pro zbývající počet lan vypočítáme výsledek pomocí nepřímé úměrnosti. Grafem je tudíž hyperbola.

Dále je při měření potřeba dávat pozor, protože při zatížení pramene lana závažím dojde k utažení uzlů, tudíž při měření celé délky by mohlo dojít ke zkreslení výsledků. Proto je vhodné si udělat značky a měřit prodloužení pouze mezi těmito značkami (opět hlídáme, zda měříme nad značkami, či pod nimi). U dynamického lana budou výsledky odpovídat našemu předpokladu (včetně grafu) a u statického lana bude prodloužení vycházet pouze okolo 2 %.

Jako návod či kontrola může posloužit naše měření i s popisem: https://ggbm.at/kFtJatUS.



*Obr. 2.2: Záběry z pokusu – statické prodloužení pramenu lana*

**Další podobné výukové materiály**

Na webu www.matematech.cz jsou k dispozici další výukové materiály týkající se měření a odhadování výsledků – Objem koule, Měření rozměrů odlitku trnu.

# 3. Určení výšky kostela

**Úvod**

Pracovní list vznikl na základě architektonické exkurze, která se v rámci jednoho z přeshraničních workshopů uskutečnila ve Vodňanech: v kostele Narození P. Marie a v Městském muzeu a galerii. Je koncipován jako inspirace pro učitele, jak mohou žákům ukázat v praxi poměr a měřítko. Žáci si mohou sami vyzkoušet, jak danou problematiku zvládají.

| **Základní informace o materiálu** | |
|---|---|
| Autor | Vladislav Beňadik |
| Věk žáků | 14 – 19 let |
| Časová dotace | 1 vyučovací hodina |
| Potřebné pomůcky a požadavky na techniku | - délkové měřidlo<br>- kalkulačka, popř. mobilní telefon<br>- tablet, počítač |
| Požadované znalosti a dovednosti žáků | - zručnost s délkovým měřidlem<br>- skupinová spolupráce<br>- základní matematické znalosti – měřítko, podíl, přímá úměrnost |
| Získané dovednosti a znalosti | - nalézání chyb a odchylek při měření a výpočtech<br>- vytvoření závěru ze získaných hodnot testování<br>- odhad správnosti výsledku |
| Aplikace tématu | - architektura<br>- měřítko map |
| Zdroje | Architektonický plán kostela Narození P. Marie, archív Městského muzea a galerie Vodňany.<br>Úvodní text o kostele: autor Mgr. Jitka Velková, redakce PhDr. Pavla Stuchlá, Ph.D. |

## Kostel Narození Panny Marie ve Vodňanech

Děkanský kostel ve Vodňanech vznikl snad současně s městem v 2. polovině 13. století pravděpodobně v souvislosti s kolonizací jižních Čech za vlády krále Přemysla Otakara II. V 1. polovině 15. století byl mistrem Jaklíkem a jeho synem Václavem nově postaven presbytář ve slohu vrcholné gotiky. V 80. letech 16. století byla upravena severní loď se zpěváckou kruchtou a předsíní. Kostel značně poškodil požár města roku 1722, poté byl restaurován. Patrně v té době byly na kostelní věži nainstalovány znaky města Vodňan, Království českého a tehdejšího děkana A. Vokouna. V letech 1894 - 1897 byla stavba regotizována stavitelem Rudolfem Stechem podle návrhu architekta Josefa Mockera. Tehdy byl chrám vyzdoben uvnitř nástěnnými freskami, vně na štítech sgrafity a v oknech presbytáře vitrážemi podle návrhů malíře Mikoláše Alše. Zároveň bylo pořízeno novogotické zařízení. Alšovy návrhy spolu s částí někdejšího barokního mobiliáře se nacházejí ve sbírkách Městského muzea a galerie Vodňany. Současné varhany byly postaveny firmou Eduarda Hubeného z Protivína v roce 1926. Na 64 metrů vysoké věži visí šest zvonů, z nichž největší jménem Marek byl odlit v roce 1725. U jižní strany kostela stojí misijní kříž z roku 1853. V dlažbě u paty věže je vyznačena památka na zvon jménem Jan, který se roztříštil při snímání pro válečné účely roku 1917.

## Pracovní list pro žáky

### Úloha č. 1

Na obrázku 3.1 jsou vyobrazeny vnitřní prostory kostela Narození P. Marie ve Vodňanech. Určete co nejpřesněji výšku stropu kostela jen za pomoci měření a výpočtů.

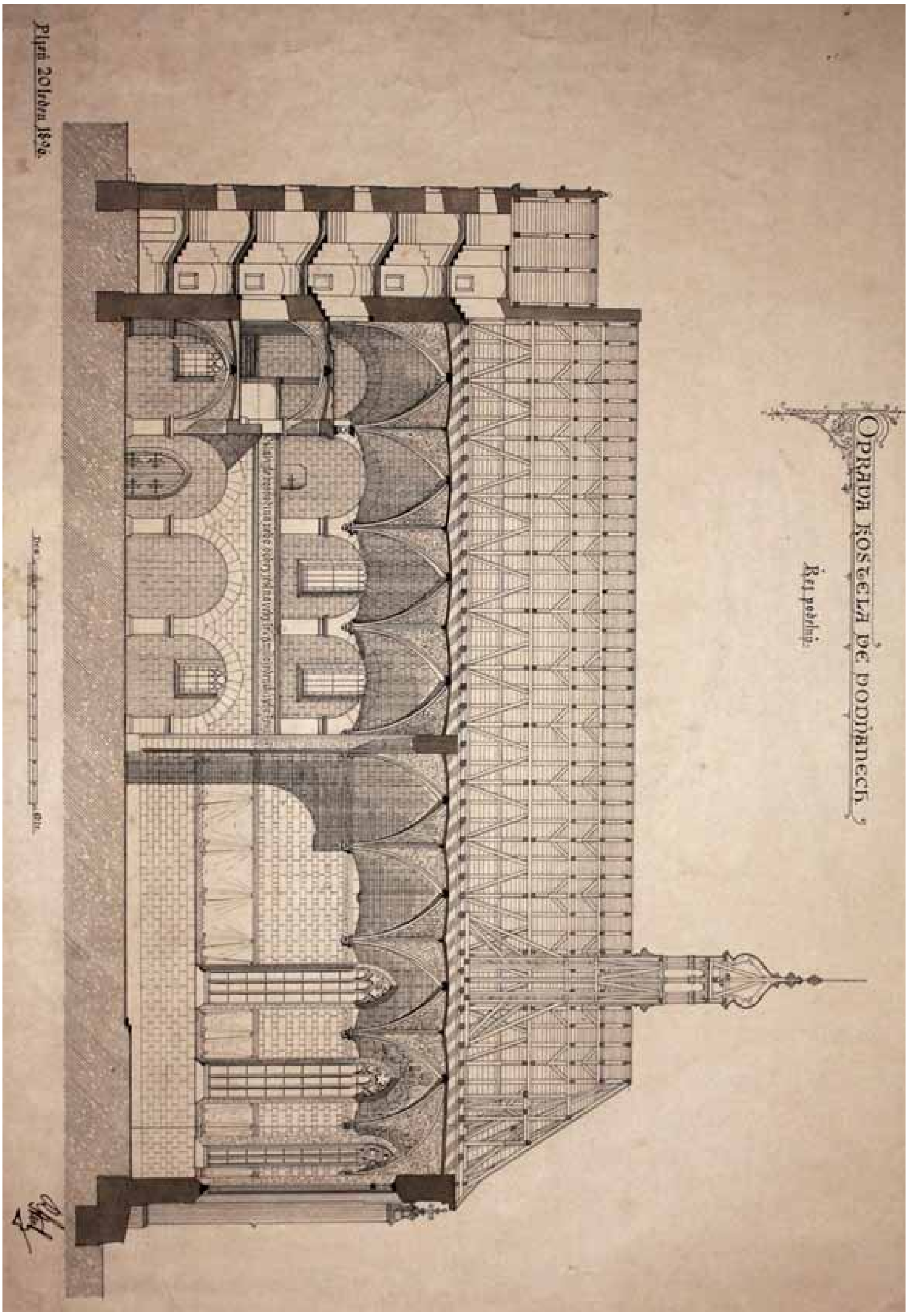
### Úloha č. 2

Na obrázku 3.2 je architektonický plán – bokorys kostela Narození P. Marie ve Vodňanech. Využijte uvedené měřítko a zkontrolujte, zda výsledek úlohy 1 odpovídá tomuto plánu. Detail měřítka je uveden na obrázku 3.3.

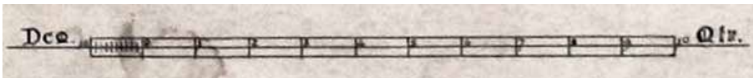
### Zkušenosti s použitím výukového materiálu

Tento materiál slouží pouze jen jako inspirace pro učitele. Ne každý se dostane se žáky do Vodňan, aby mohli přeměřovat kostel, proto lze tento pracovní list upravit a použít na jakýkoli kostel či budovu ve vašem městě.

*Obr. 3.1: Kostel Narození P. Marie ve Vodňanech*




*Obr. 3.2: Kostel Narození P. Marie ve Vodňanech – bokorys*




*Obr. 3.3: Detail měřítka z plánu na obrázku 3.2*

**Vzorové řešení**

### Úloha č. 1

Pro určení výšky stropu kostela je optimální si zvolit nějaký předmět v kostele, u kterého jsme schopni určit nebo odhadnout výšku. Poté odhadnout, kolikrát se tam vejde a jednoduchým výpočtem získat výsledek. Jako předmět může sloužit například svícen, sloup, nebo v našem případě člověk. Tento postup je vhodné zvolit při řešení na místě a je potřeba dbát na přesnost.

Výška člověka na fotografii z obrázku 3.1 je 1,85 m. Jeho postavu jsme do fotografie umístili nad sebe celkem 7-krát a ještě přibližně třetina postavy by se pod strop vešla (pozici člověka na podlaze odpovídá černá čára na stropě; viz obrázek 3.4).

Výpočtem $7{,}33 \cdot 1{,}85 = 13{,}5605$ zjistíme, že přibližná výška stropu kostela je 13,6 metru.

### Úloha č. 2

Na obrázku 3.2 změříme pravítkem výšku budovy od úrovně chodníku po dolní okraj střechy a délku vyznačeného „desetimetrového“ úseku (na měřítku se jedná o tu část, která není vyšrafovaná – deset dílků). Jejich poměr vyjde přibližně 1,44.

Výška stropu kostela je tedy přibližně $10 \cdot 1{,}44 = 14{,}4$ metru.

Odhady z úlohy 1 a úlohy 2 se liší, ale ne o moc (méně než 10 % z menšího čísla). To je dáno mnoha nepřesnostmi, kterých jsme se dopustili při jejich hledání: zkreslením při fotografování obrázků 3.1 a 3.2, pouze přibližným umisťováním postavy „nad sebe“ na obrázku 3.3, nepřesností při měření pravítkem na vytištěném obrázku 3.3. U podobných odhadů je taková nepřesnost běžná.

Je-li k dispozici laserové měřidlo, je možné při osobní návštěvě kostela zjistit přesnou výšku stropu a porovnat odhady s přesnou hodnotou.

*Obr. 3.4: Odhad výšky kostela v praxi; výřez z obrázku 3.1 upraven v programu GeoGebra*

# 4. Pájení – úloha z praxe

**Úvod**

Pracovní list řeší příklad z reálné praxe firmy Rohde & Schwarz ve Vimperku, s použitím základních matematických operací. Příklad je založený na exkurzi do tohoto podniku, na vlastní zkušenosti žáků s pájením. Návštěvě podniku Rohde & Schwarz se věnuje také kapitola 5 této knihy.

| **Základní informace o materiálu** | |
|---|---|
| Autor | Jana Doležalová |
| Věk žáků | 11 – 15 let |
| Časová dotace | 4 vyučovací hodiny |
| Potřebné pomůcky a požadavky na techniku | - deska plošných spojů<br>- pájka<br>- rezistory<br>- internet (mobil, tablet) |
| Požadované znalosti a dovednosti žáků | - znalost základních matematických operací<br>- manuální zručnost odpovídající věku 11 -15 let |
| Získané dovednosti a znalosti | - pochopení užitečnosti matematiky při řešení reálného příkladu ze života<br>- zručnost při práci s pájkou<br>- procvičení základních matematických operací |
| Aplikace tématu | Vychází přímo z reálného prostředí firmy Rohde & Schwarz závod Vimperk s.r.o. |
| Zdroje | Rohde & Schwarz závod Vimperk s.r.o. |

**Pracovní list pro žáky**

**Úloha č. 1**

Při osazování součástek na desku plošných spojů jsme v daném limitu stačili zapájet 3/5 součástek správně, 3/10 chybně a 10 součástek jsme zapájet nestihli. Kolik součástek měla mít deska?

**Úloha č. 2**

Naším úkolem je vyrobit vzorkovou zakázku 5 kusů osazeného plošného spoje, kde na každém je nutno zapájet 180 součástek (rezistorů) velikosti 1206 a 180 součástek (rezistorů) velikosti 0603. Zakázka má být vyhotovena za jeden pracovní den. Stanovte, kolik pracovníků musí pracovat na této zakázce.

**Zkušenosti s použitím výukového materiálu**

Úloha je založena na výpočtu průměrné doby pájení určitého počtu rezistorů. Pokud žáci nemají možnost pájet, úloha se pro ně stává málo zajímavá. Jde o komplexní úlohu, kde se propojuje praxe a matematika. Žáci si mohou být vzájemně užiteční při skupinové práci. Je zde však velké množství výpočtů, kde se žáci často dopouštějí numerických chyb. Před vlastním pájením je potřeba žáky poučit o BOZP. Exkurze v podniku Rohde -Schwarz je vhodným doplněním, neboť žáci vidí úlohu v reálném prostředí firmy.

**Vzorové řešení**

**1. hodina**

Probíhá ve třídě.

Vymezení jednotlivých potřebných pojmů:

Deska plošných spojů – slouží k upevnění jednotlivých součástek.

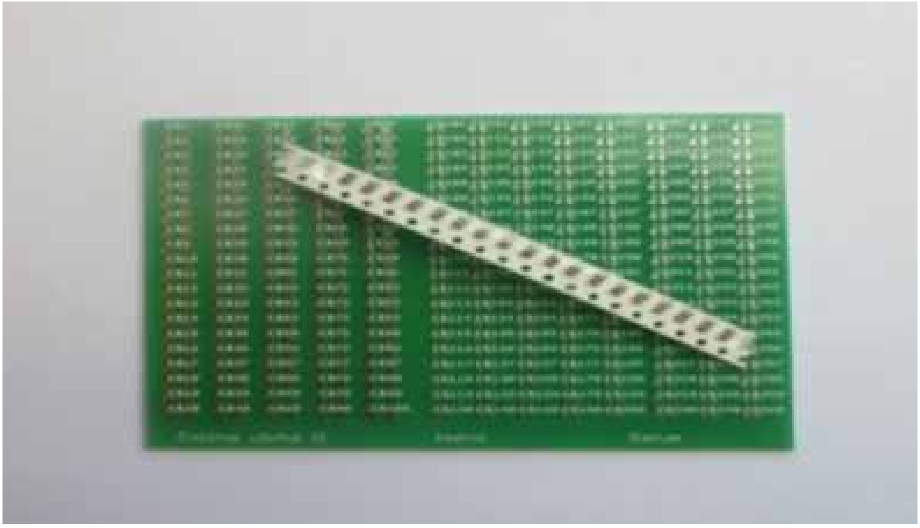
Rezistory – pasivní elektrotechnická součástka. Důvodem použití je především snížení velikosti elektrického proudu nebo získání určitého úbytku napětí.

Pájka – kov určený k pevnému spojování materiálů z jiných kovů. Spojování pomocí pájky se nazývá pájení. V elektrotechnice zajišťuje pevné vodivé spojení součástek.

Cín – součást pájky, která představuje významnou skupinu slitin cínu.

Délková míra palec a stopa – palec je jednotkou délky anglosaského původu. Velikost palce je definována jako 1/12 stopy nebo také 2,54 cm. Palec není jednotkou SI. Zkratka in pochází z anglického inch (palec). Označení součástek – v našem případě značení 1206 a 0603 představuje rozměry rezistorů (u označení 1206 číslo 12 znamená 12 setin palce a 06 představuje 6 setin palce).

**Úloha č. 1** - motivační úloha. Doporučuji žákům ukázat skutečnou desku plošných spojů s rezistory (obrázek 4.1).



*Obr. 4.1: Deska plošných spojů s rezistory*

Vzhledem k tomu, že 3/5 + 3/10 = 9/10 , zbylá 1/10 představuje 10 součástek. Daná deska má tedy 100 součástek.

### Úloha č. 2

Označení součástek a výpočet rozměrů:

Označení 1206 znamená, že délka součástky v setinách palce je 12 a šířka součástky v setinách palce 6. To znamená, že délka součástky v milimetrech je $0{,}12 \cdot 25{,}4 = 3{,}048$ mm a šířka součástky v milimetrech je $0{,}06 \cdot 25{,}4 = 1{,}524$ mm.

Označení 0603 znamená, že délka součástky v setinách palce je 6 a šířka součástky v setinách palce 3. To znamená, že délka součástky v milimetrech je $0{,}06 \cdot 25{,}4 = 1{,}524$ mm a šířka součástky v milimetrech je $0{,}03 \cdot 25{,}4 = 0{,}762$ mm.

### 2. a 3. hodina

Probíhá v podniku.

Žáci si nejdříve nacvičí pájení dvou typů součástek na cvičné desce plošných spojů. Pak si připomenou zadání slovní úlohy a hledají způsoby řešení. Vzájemně se domluví, kolik součástek budou na čas pájet.

Zaznamenají čas, který každý potřeboval k zapájení daného počtu (možno domluva na zapájení pěti rezistorů každého druhu).

### 4. hodina

Žáci zjistí aritmetickým průměrem, jak dlouhou dobu budou potřebovat na pájení zvoleného počtu rezistorů.

Ve skupinách hledají cestu k vyřešení slovní úlohy.

Prezentace jednotlivých možností řešení. Například: zvolený počet 10 součástek žáci připájeli v průměrném čase 8 minut. Na jednu desku budeme potřebovat 180 + 180 = 360 součástek. Při počtu pěti desek je to 1 800 součástek. Pomocí přímé úměrnosti zjistíme, že potřebný čas bude 1 440 minut, tedy 24 hodin. To znamená, že na dané práci musí pracovat 3 zaměstnanci.

# 5. Společná práce – šroubování

**Úvod**

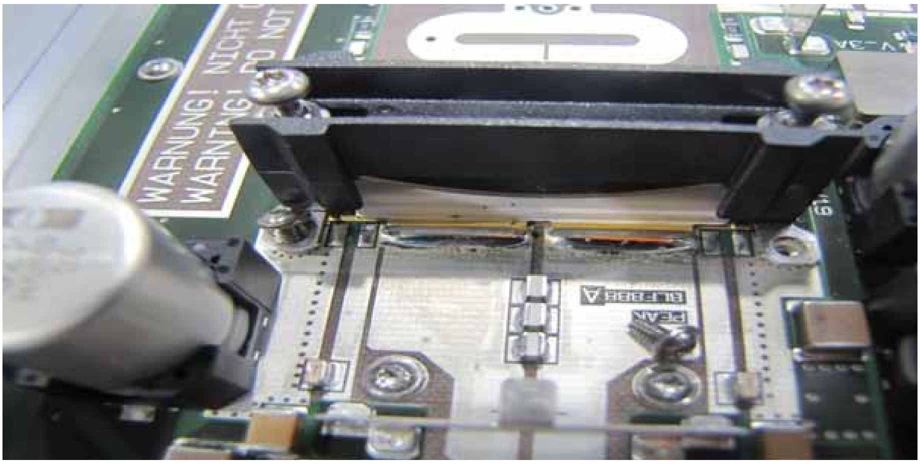
Pracovní list využívá znalosti žáků, získané v hodinách matematiky v osmém ročníku, při řešení reálného příkladu ze života firmy Rohde & Schwarz ve Vimperku. Návštěvě podniku Rohde & Schwarz se věnuje také kapitola 4 této knihy.

| **Základní informace o materiálu** | |
|---|---|
| Autor | Jana Doležalová |
| Věk žáků | 14 – 15 let |
| Časová dotace | 2 vyučovací hodiny |
| Potřebné pomůcky a požadavky na techniku | - cvičná šroubovací deska<br>- šroubky, šroubovák<br>- stopky<br>- kalkulačka |
| Požadované znalosti a dovednosti žáků | - řešení slovních úloh vedoucí k lineární rovnici o jedné neznámé – společná práce<br>- znalost statistických pojmů: aritmetický průměr, modus, medián<br>- manuální zručnost odpovídající věku 14 -15 let |
| Získané dovednosti a znalosti | - manuální zručnost při práci se šroubovákem<br>- pochopení užitečnosti matematiky při řešení reálného příkladu ze života<br>- procvičení základních matematických operací |
| Aplikace tématu | Vychází přímo z reálného prostředí firmy Rohde & Schwarz závod Vimperk s.r.o. |
| Zdroje | Rohde & Schwarz závod Vimperk s.r.o. |

**Pracovní list pro žáky**

### Úloha č. 1

Do firmy Rohde & Schwarz přišla nová zakázka na zesilovač pro televizní vysílání. Elektronické moduly je třeba připevnit ke chladiči 200 šrouby. Vzhledem k tomu, že ještě nemáme naprogramovaný šroubovací automat, musí vše zvládnout člověk. Zjisti prakticky s pomocí cvičné šroubovací desky, za jakou dobu bys daný úkol dokázal splnit ty.




*Obr. 5.1: Zesilovač pro televizní vysílání – detail*

### Úloha č. 2

Vytvořte skupiny po pěti žácích a vypočítejte nyní, za jakou dobu byste dokázali společně zpracovat jednu zakázku.

### Úloha č. 3

A ještě trochu statistiky. Určete aritmetický průměr, modus a medián doby, za kterou zašroubujete 200 šroubů.

Nejprve jako statistickou jednotku použijte dobu, kterou potřebuje na zašroubování jeden žák. Výsledky porovnej se svým vlastním měřením.

Jako statistickou jednotku použijte dobu, kterou potřebuje na zašroubování skupina žáků. Výsledky porovnejte se svým skupinovým měřením.

**Zkušenosti s použitím výukového materiálu**

Úloha využívá mezipředmětových vztahů. Měření potřebné doby zašroubování 200 kusů šroubů provádějí žáci v hodině praktických činností. Do hodiny matematiky již přichází s výsledky svého měření a řeší úlohu na společnou práci (úloha č. 2) skupinově. Vzhledem k tomu, že dobu potřebnou k zašroubování můžeme použít jako hodnoty statistického šetření, je dobré je dále využít pro zjištění aritmetického průměru, modusu a mediánu (úloha č. 3).

Poté je přínosné navštívit závod Rohde & Schwarz Vimperk, oddělení koncové výroby, kde žáci přímo v provozu vidí činnost šroubovacího automatu.

**Vzorové řešení**

### 1. hodina

Žáci si nejprve „natrénují“ šroubování (obrázek 5.2). Důležitá je přesnost a kvalita provedené činnosti. Potom se domluví na zašroubování určitého počtu šroubů – ideálně deset. Potřebná doba k zašroubování tohoto počtu se pohybuje v rozmezí od 3 do 10 minut. Výsledky si zaznamenají do jednoduché tabulky (jméno žáka, potřebná doba k zašroubování deseti šroubků).

*Obr. 5.2: Nácvik šroubování během hodiny praktických činností*

### 2. hodina

Žáci si přinášejí do hodiny matematiky údaje o době, kterou potřebují na zašroubování daného počtu (v našem případě deseti) šroubků. Dále žáci pracují ve skupinách. Vytvořili jsme skupiny po pěti žácích. Ve vzorové skupině měli hodnoty měření 6,5 minuty, 3 minuty, 4 minuty, 3,5 minuty a 7,5 minuty. Jednoduchou úvahou každý žák sám dopočítal, za jakou dobu by zašrouboval celý výrobek (200 šroubů).

Dále počítali ve skupině – vytvořením rovnice pro společnou práci

$$\frac{x}{130} + \frac{x}{60} + \frac{x}{80} + \frac{x}{70} + \frac{x}{150} = 1.$$

Řešením je x = 17 minut. Pokud by těchto pět žáků pracovalo společně, elektronické moduly by připevnili ke chladiči za 17 minut.

Doba potřebná na zašroubování 200 šroubků se u některých žáků velice liší od aritmetického průměru (způsobeno horší manuální zručností a nesprávným – šikmým šroubováním), ve skupinovém porovnání se již tato hodnota tak neliší. Této vlastnosti můžeme využít pro zdůraznění důležitosti týmové práce.

# 6. Měření výrobku na sinusovém magnetu

## Úvod

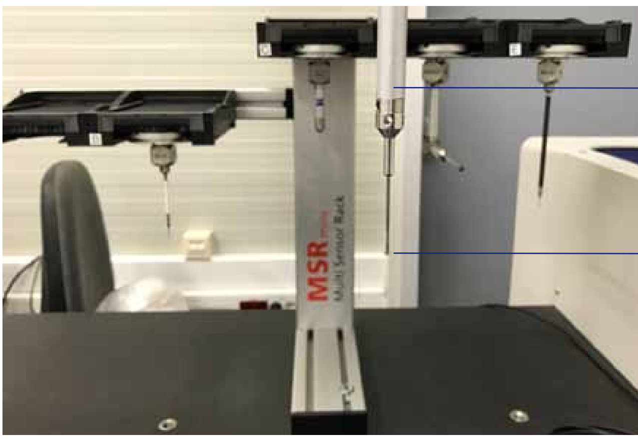
Výukový materiál se tematicky věnuje užití goniometrických funkcí při řešení praktických úkolů v technické praxi. Jednotlivá zadání úloh pro žáky vychází z práce na měřicím přístroji, jehož úkolem je zjistit přesné rozměry výrobku (zde se zajímáme zvláště o jeho vnitřní rozměry) a ověřit tak přesnost, a tím také kvalitu výroby. Postup a správnost řešení zadaných úloh je možné zkontrolovat v materiálu v poznámkách pro učitele.

| **Základní informace o materiálu** | |
|---|---|
| Autor | Jan Fiala |
| Věk žáků | 15 – 16 let |
| Časová dotace | 1 vyučovací hodina |
| Potřebné pomůcky a požadavky na techniku | - kalkulačka |
| Požadované znalosti a dovednosti žáků | - goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku<br>- „čtení“ technického výkresu s porozuměním dat<br>- vyjádření neznámé ze vzorce, dosazení do vztahu a výpočet pomocí kalkulátoru |
| Získané dovednosti a znalosti | - prohloubení a upevnění početních dovedností žáků a jejich znalostí o uplatnění goniometrických funkcí při řešení problémů z praxe<br>- prohloubení dovednosti číst technickou dokumentaci<br>- matematické modelování situace z praxe |
| Aplikace tématu | Řešený problém a příslušný výpočet každodenně využívají zaměstnanci firmy Husky – KTW při kontrole rozměrů výrobku na měřícím zařízení. |
| Spolupráce s podnikem | Husky – KTW, s.r.o., Jindřichův Hradec |
| Zdroje | Výřez technického výkresu a fotografie poskytl pan Lukáš Rotta, mistr odborného výcviku z firmy Husky – KTW, s.r.o., J. Hradec. |

**Pracovní list pro žáky**

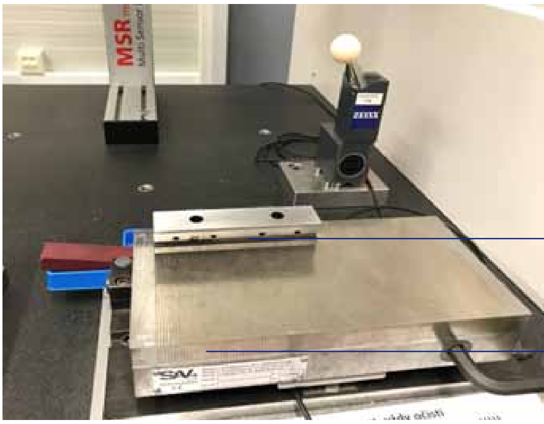
V technické praxi se provádí kontrola rozměrů nového výrobku. Přesnost měření se provádí na speciálním měřicím přístroji, tzv. souřadnicovém zařízení. (Obrázek 6.1) Jde o zařízení opatřené pohyblivými čidly, která jsou zakončená kuličkou citlivou na dotek. Detail čidla je vidět na další fotografii. (Obrázek 6.2)


*Obr. 6.1: Měřicí přístroj – souřadnicové zařízení*



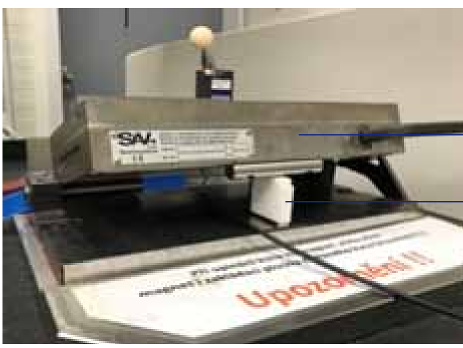

*Obr. 6.2: Detail čidla na souřadnicovém zařízení*

Na některém výrobku se rozměry ověří snadno, na jiném může být měření obtížné. Výrobky totiž často obsahují vnitřní otvory, do nichž se musí čidlo dostat a mít tak možnost změřit některé vnitřní kóty. Příkladem takového vnitřního otvoru je vyvrtaná díra, tedy otvor ve tvaru válce. Jsou-li takové válcové otvory vyvrtány kolmo k podstavě tělesa (výrobku), může se čidlo do takového otvoru snadno dostat. Je-li však válcový otvor vyvrtán do výrobku tak, že osa tohoto otvoru není kolmá k podstavě tělesa (tedy vyvrtaná díra je ve tvaru kosého válce), nemůže již čidlo změřit vnitřní rozměry otvoru. Takový problém se pak řeší jednoduše tak, že se měřené těleso musí naklonit o určitý úhel. Naklánění výrobku se provádí na tzv. sinusovém magnetu. (Obrázek 6.3)

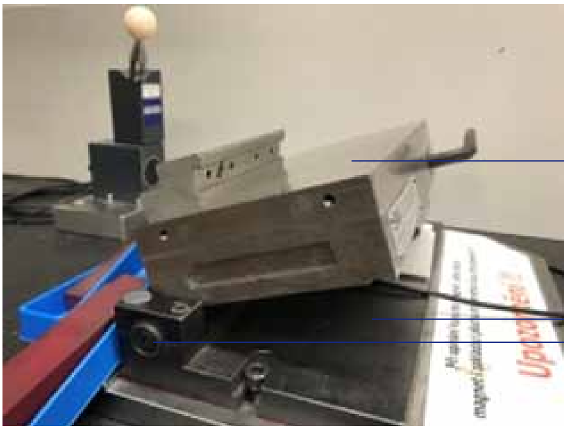



*Obr. 6.3: Sinusový magnet s výrobkem se šikmo vyvrtanými otvory*

Protože se většinou měří výrobky vyrobené z kalené oceli či různých kovových slitin, drží měřený výrobek díky magnetickým vlastnostem magnetu dobře na vrchní ploše magnetu. Jestliže chceme nakloněný sinusový magnet s výrobkem zafixovat v určité poloze, podloží se konec jeho zvednuté části podložkou, jak je to vidět na dalších obrázcích. (Obrázky 6.4 a 6.5)

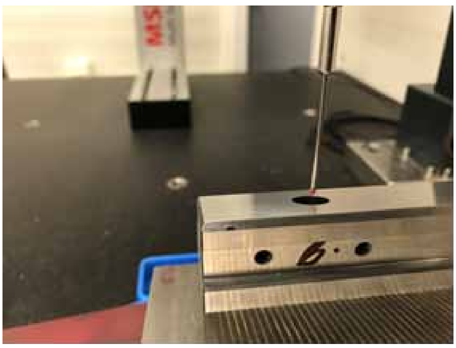


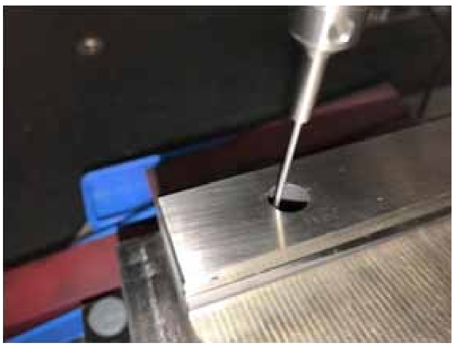

*Obr. 6.4: Nakloněný sinusový magnet*

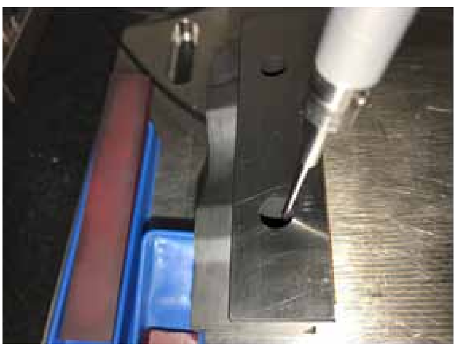



*Obr. 6.5: Nakloněný sinusový magnet (pohled z boku)*

Jestliže se podaří magnet s výrobkem naklonit o správný úhel, může již čidlo změřit vnitřní rozměry otvorů vyvrtaných do výrobku. Měření rozměrů vnitřních částí výrobku ukazují další obrázky. (Obrázek 6.6)

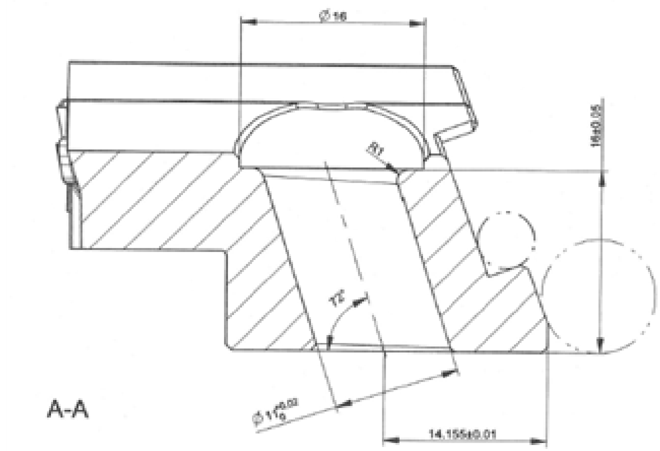






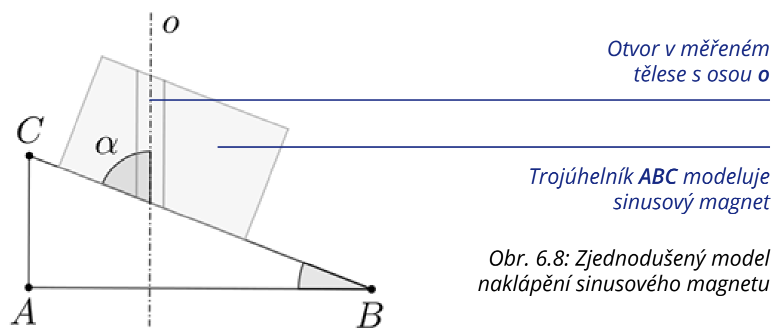
*Obr. 6.6: Měření vnitřního otvoru výrobku pomocí měřicího přístroje s kuličkovým čidlem*

Pro výpočty v úlohách formulovaných dále uvažujme výrobek, jehož technický výkres je na obrázku. (Obrázek 6.7)




*Obr. 6.7: Technický výkres měřeného výrobku*

Na technickém výkresu představuje šrafovaná část vlastní výrobek. V prostřední části je zřejmý otvor o průměru 11 mm (tato hodnota se při výpočtech nepoužívá), jehož osa svírá s podstavnou stěnou výrobku úhel 72°. Jde tedy o výrobek s vnitřním otvorem, jehož osa není kolmá k podstavné stěně výrobku, a tak bude potřeba pro měření vnitřních rozměrů otvoru výrobek naklonit na sinusovém magnetu. Ve formulovaných úlohách ovšem měřené těleso (s původně poměrně složitým tvarem - Obrázek 6.7) zjednodušíme a budeme jej modelovat kvádrem, v němž je vyvrtán otvor válcovitého tvaru. Osa otvoru svírá s podstavnou stěnou obdobně jako u skutečného výrobku úhel 72°. Pro další výpočty v úlohách je také potřebné zdůraznit, že používaný sinusový magnet má délku své sklopné části 115 mm. Celou situaci naklápění sinusového magnetu s umístěným tělesem zjednodušeně znázorníme takto (Obrázek 6.8):




*Obr. 6.8: Zjednodušený model naklápění sinusového magnetu*

### Úloha č. 1

Ve výrobku ve tvaru kvádru je otvor ve tvaru válce, jehož osa svírá s podstavnou stěnou výrobku úhel α. O jaký úhel je potřeba naklonit sinusový magnet s výrobkem, aby čidlo měřicího přístroje mohlo změřit hloubku otvoru, pohybuje-li se svisle dolů, tj. kolmo k podložce, na níž leží sinusový magnet. Úlohu řešte pro hodnotu $\alpha=72°$.

### Úloha č. 2

O kolik je potřeba podložit magnet s upevněným výrobkem na měřícím souřadnicovém zařízení, aby byl vnitřní měřený otvor výrobku v ose svislého pohybu měřícího čidla s kuličkou? Délka magnetu je 115 mm a úhel, který svírá podložka magnetu a vodorovná plocha, je 18°?

### Úloha č. 3

Jak daleko je pata kolmice vedené koncovým bodem magnetu od kloubu, pomocí něhož magnet zvedáme? Délka magnetu je 115 mm a úhel, který svírá podložka magnetu a vodorovná plocha, je 18°.

### Úloha č. 4

Jaký úhel by svírala podložka magnetu od vodorovné plochy, byl-li magnet podložen o 50 mm? Délka magnetu je 115 mm.

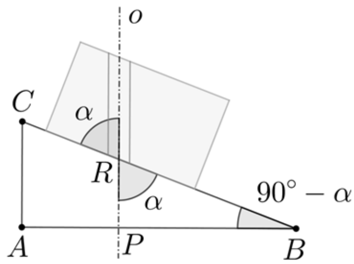
### Zkušenosti s použitím výukového materiálu

Zadání úlohy vychází z každodenní praxe pracovníků ve firmě Husky. Protože žáci (a většinou ani učitelé) nemají s technickou praxí zkušenosti, může být pro žáky zpočátku obtížné porozumět situaci s měřením výrobku, který je potřeba naklonit. Pro lepší pochopení popisované situace slouží pořízené fotografie. Ty by měl učitel žákům okomentovat.

Při studiu technického výkresu by měl žákům opět pomoct učitel, protože se žáci s technickými výkresy setkávají ve škole jen minimálně. Především je potřeba žákům vysvětlit základní principy kótování délek a velikostí úhlů. Zpočátku může být pro žáky obtížné rozlišit, co je vlastní výrobek a co jsou v něm vyvrtané otvory. Zajímavé jsou údaje o přípustných chybách změřených délek oproti délkám požadovaným. Největší pozornost by měli žáci věnovat zobrazené kótě úhlu s velikostí 72°, tj. velikosti úhlu, který svírá osa vyvrtaného otvoru vůči podstavě výrobku.

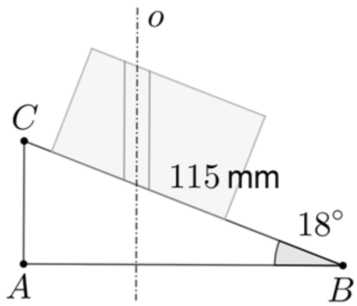
**Vzorové řešení**

Řešení úlohy 1 je patrné z obrázku (Obrázek 6.9). Výrobek je znázorněn jako obdélník. Osa o otvoru výrobku svírá s přeponou BC v pravoúhlém trojúhelníku ABC (s pravým úhlem u vrcholu A), úhel α. Vrcholový úhel k α je ∢PRB a má také velikost *α*. Tedy |∢RBP| je 90°– *α*. Pro *α* = 72° je |∢RBP| = 18°.




*Obr. 6.9: Model situace měření vnitřního otvoru výrobku*

Situaci z úlohy 2 modelujeme pravoúhlým trojúhelníkem ABC (Obrázek 6.10).




*Obr. 6.10: Pravoúhlý trojúhelník ABC*

K výpočtu délky strany *AC* využijeme vztah sin 18° = $\frac{|AC|}{|BC|}$.

Z toho odvodíme $|AC| = |BC| \cdot \sin 18°$, tedy $|AC| = 115 \cdot \sin 18° \doteq 35{,}5$ mm.

Zadání úlohy 3 je možné modelovat stejným obrázkem jako u úlohy 2 (Obrázek 6.10). Hledáme délku odvěsny *AB* v pravoúhlém trojúhelníku *ABC* (s pravým úhlem u vrcholu *A*). Pro výpočet (bez využití výsledku z úlohy 2 a bez užití Pythagorovy věty) je potřeba využít funkci kosinus: $\cos 18° = \frac{|AC|}{|BC|}$. Z toho $|AB| = |BC| \cdot \cos 18°$.

Po dosazení $|AB| = 115 \cdot \cos 18° \doteq 109{,}4$ mm.

Také čtvrtý úkol je možné modelovat stejným obrázkem (Obrázek 6.10). Hledáme velikost úhlu u vrcholu *B* pravoúhlého trojúhelníku *ABC* (s pravým úhlem u vrcholu *A*), je-li $|AC| = 50$ mm a $|BC| = 115$ mm. Při řešení vhodně využijeme funkci sinus: $\sin\alpha = \frac{|AC|}{|BC|}$. Po dosazení $\sin\alpha = \frac{50}{115} \doteq 0{,}4347826087$, tedy $\alpha = \sin^{(-1)} \frac{10}{23} \doteq 25°46'$.

# 7. Výrobní cena výrobku

**Úvod**

Materiál je vytvořen ve spolupráci s firmou MOTOR JIKOV Group a.s. a je zaměřen na řešení reálného problému firmy, tj. výpočet nákladové ceny výrobku. Používají se základní matematické operace a pracuje se zde s fyzikálními jednotkami. Rozšířená varianta tohoto výukového materiálu je k dispozici na webu www.matema-tech.cz

| **Základní informace o materiálu** | |
|---|---|
| Autor | Pavel Kolář |
| Věk žáků | 16-19 let |
| Časová dotace | 1 vyučovací hodina |
| Potřebné pomůcky a požadavky na techniku | - vytištěný pracovní list<br>- kalkulačka |
| Požadované znalosti a dovednosti žáků | - znalost fyzikálních jednotek a jejich významu, převody jednotek<br>- základní matematické operace<br>- procenta<br>- základy finanční gramotnosti (mzda, cena energie apod.) |
| Získané dovednosti a znalosti | - upevnění a procvičení znalostí z oblasti převodů jednotek, fyzikálních výpočtů a pojmů z finanční gramotnosti<br>- pochopení spojitosti matematiky a fyziky s reálnou praxí<br>- seznámení se základy ekonomiky podniku<br>- rozvoj logického uvažovaní a orientace v textu |
| Aplikace tématu | ukázka řešení reálného problému ve skutečné firmě |
| Spolupráce s podnikem | MOTOR JIKOV Group a.s. |
| Zdroje | podklady poskytnuté firmou Motor Jikov |

## Pracovní list pro žáky

### Zadání úlohy

Hmotnost jednoho metru hřídele při průměru 40 mm je 9 865 g. Cena materiálu o průměru 40 mm, jakosti 12 040, je 25,- Kč/kg. Výrobní kapacita stroje je 625 ks/hod. Příkon hlavního motoru stroje je 50 kWh a jeho účinnost činí 60 %. Cena 1 kWh elektrické energie je 2,50 Kč. Hrubá mzda dělníka pracujícího u tohoto stroje činí 24.000,- Kč/měsíc při 156 odpracovaných hodinách.

### Úkol

Vypočítejte celkové výrobní náklady výrobku, na který se spotřebuje 10 cm hřídele o průměru 40 mm, jestliže se do mzdových nákladů započítává také výrobní režie (mzdové odvody, odpisy, ochranné pomůcky, nástroje, topení, úklid, podíl mezd kontrola, seřizovač, mistr) ve výši 400 % mzdy dělníka na jeden výrobek a správní režie (mzdy konstrukce, technolog, prodej, nákup, ředitel, odpisy počítače, opravy budov) ve výši 200 % mzdy dělníka na jeden výrobek.

### Zkušenosti s použitím výukového materiálu

Tento materiál je určen všem žákům na všech typech středních škol, kteří se již orientují ve fyzikálních a matematických pojmech použitých v pracovním listu.

Účelem listu je v prvé řadě ukázat žákům, jaké úkoly může řešit pracovník ve skutečné firmě a seznámit je s tím, jak probíhá výpočet prvotní ceny výrobku a co vše je do této ceny zahrnuto. Vhodné je se žáky prodiskutovat, jak se v ceně výrobku promítnou další náklady (marže dopravce, skladování, daně apod.), než si mohou výrobek sami koupit.

Hodnoty v zadání lze samozřejmě pozměnit a přizpůsobit je reálným hodnotám v čase, kdy se pracovní list řeší (např. ceny materiálu a energie, mzda apod.)

Tento pracovní list je možné zpracovávat i v tabulkovém editoru (např. MS Excel), ve kterém si zároveň procvičí i práci s tímto typem softwaru.

Vyučující by měl při zpracování tohoto listu nechat žáky pracovat samostatně a zasahovat do řešení jen minimálně, např. vysvětlením některého s pojmů. Na konci řešení je vhodné se žáky celý postup řešení projít, aby si mohli svůj postup zkontrolovat.

**Vzorové řešení**

materiál:

1 m . . . . . . . . . . . . . . 9 865 g

10 cm = 0,1 m . . . . . 986,5 g

1 kg . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25 Kč

986,5 g = 0,9865 kg . . . . . **24,66 Kč**

mzda dělníka:

24.000 Kč : 156 hod ≐ 153,85 Kč/hod

153,85 Kč/hod : 625 ks/hod ≐ **0,25 Kč/ks**

energie:

příkon stroje 50 kWh

účinnost 60 % => výkon 30 kWh

30 kWh · 2,50 Kč/kWh = 75 Kč

75 Kč : 625 ks = **0,12 Kč/ks**

marže:

výrobní režie 400 % mzdy dělníka 4 · 0,25 Kč = 1 Kč

správní režie 200 % mzdy dělníka 2 · 0,25 Kč = 0,50 Kč

celkem . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1,50 Kč**

**Celkem: 24,66 + 0,25 + 0,12 + 1,50 = 26,53 Kč/ks**

**Další podobné výukové materiály**

Další výukový materiál týkající se tématu finanční matematiky je uveden v kapitole 8 této knihy.

# 8. Výpočet mzdy

**Úvod**

Pracovní list řeší reálný problém výpočtu čisté mzdy pracovníka. Žáci díky němu proniknou do mzdové problematiky a seznámí se s pojmy, které se v této oblasti vyskytují. Pracovní list vznikl na základě podnětů z firmy Motor Jikov. Rozšířená varianta tohoto výukového materiálu je k dispozici na webu www.matematech.cz

| **Základní informace o materiálu** | |
|---|---|
| Autor | Pavel Kolář |
| Věk žáků | 16-19 let |
| Časová dotace | 1 vyučovací hodina |
| Potřebné pomůcky a požadavky na techniku | - vytištěný pracovní list<br>- kalkulačka |
| Požadované znalosti a dovednosti žáků | - základní matematické operace<br>- procenta<br>- základní pojmy z finanční matematiky |
| Získané dovednosti a znalosti | - pochopení principu výpočtu čisté mzdy<br>- upevnění znalostí výpočtu procent<br>- pochopení principu odvodu daní a srážek ze mzdy |
| Aplikace tématu | výpočet čisté mzdy pracovníka ve skutečné firmě |
| Spolupráce s podnikem | MOTOR JIKOV Group a.s. |
| Zdroje | podklady poskytnuté firmou Motor Jikov |

## Pracovní list pro žáky

### Zadání úlohy

Výpočet čisté mzdy k výplatě podléhá několika pravidlům:

| | |
|---|---|
| základní mzda | pevná částka v pracovní smlouvě |
| pohyblivá složka mzdy | pohyblivá složka, záleží na plnění povinností |
| odvody zaměstnavatele = 34 %, z toho 25 % na sociální pojištění a 9 % na zdravotní pojištění | počítá se z hrubé mzdy |
| srážka ze mzdy zaměstnance na sociální pojištění = 6,5 % | počítá se z hrubé mzdy |
| srážka ze mzdy zaměstnance na zdravotní pojištění = 4,5 % | počítá se z hrubé mzdy |
| měsíční záloha daně z příjmů = 15 % | počítá se ze superhrubé mzdy |
| měsíční sleva na dani na poplatníka = 2.070 Kč | pevná částka daná zákonem |

### Úkol

Vypočítejte na základě uvedených údajů svojí čistou mzdu, je-li vaše základní mzda uvedená v pracovní smlouvě 24.000,- Kč.

### Zkušenosti s použitím výukového materiálu

Pracovní list je možno využít kdykoliv při probírání tématu z finanční matematiky nebo finanční gramotnosti.

Účelem listu je naučit žáky postupu, kterým probíhá výpočet čisté mzdy pracovníka ve firmě, aby si mohl alespoň orientačně překontrolovat správnost své budoucí výplaty. Přímo z firmy Motor Jikov, s jejíž spoluprací byl list vytvořen, bylo zjištěno, že pracovníci se neorientují v pojmech, které souvisí s jednotlivými položkami výplatní pásky a následně si stěžují, že došlo k chybnému výpočtu jejich mzdy.

Vyučující by měl při zpracování tohoto listu nechat žáky pracovat samostatně a zasahovat do řešení jen minimálně, např. vysvětlením některého s pojmů. Na konci řešení je vhodné se žáky celý postup řešení projít, aby si mohli svůj postup zkontrolovat.

Pracovní list je možné doplnit také ukázkou reálné výplatní pásky z nějakého podniku a zadat žákům úkol, aby překontrolovali, zda bylo vše vypočteno v pořádku. Díky tomu se naučí i orientovat ve struktuře podobných dokumentů.

**Vzorové řešení**

Řešení tohoto úkolu je vhodné například pomocí následující tabulky:

| | zaměstnanec | | zaměstnavatel | |
|---|---|---|---|---|
| | procenta | částka | procenta | částka |
| základní mzda | 100 % | 24.000,- | | |
| pohyblivá složka mzdy | 20 % | 4.800,- | | |
| hrubá mzda | | 28.800,- | | |
| sociální pojištění | 6,5 % | 1.872,- | 25 % | 7.200,- |
| zdravotní pojištění | 4,5 % | 1.296,- | 9 % | 2.592,- |
| superhrubá mzda | | | | 38.592,- |
| měsíční záloha daně | 15 % | 5.789,- | | |
| sleva na dani | | 2.070,- | | |

čistá mzda:

28.800 – 1.872 – 1.296 – (5.789 – 2.070) = **21.913,-**

celkové procento odvodů ze superhrubé mzdy:

(21.913 : 38.592) × 100 = 56,78 % => **43,22 %**

**Další podobné výukové materiály**

Další výukový materiál týkající se tématu finanční matematiky je uveden v kapitole 7 této knihy.

# 9. Matematika mostních staveb – Zavěšený most přes Odru a Antošovické jezero

**Úvod**

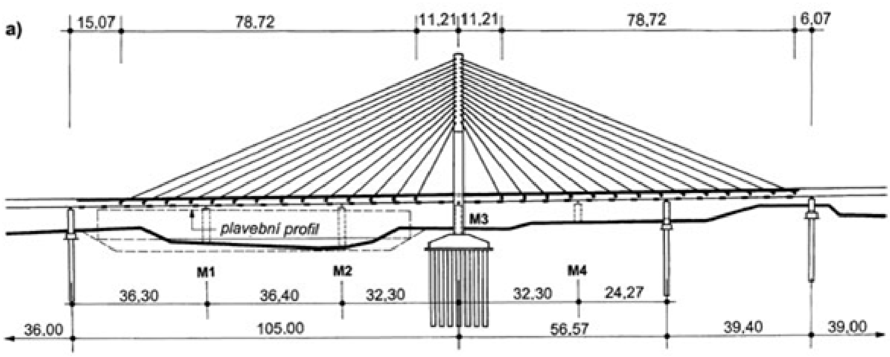
Člověk díky svým rozumovým schopnostem a praktickým dovednostem vytváří obvykle v souladu s přírodou různé objekty, které zkvalitňují jeho život. Mezi ně beze sporu patří mostní stavby sloužící k překlenutí řek, údolí či jiných překážek. Vlastní stavbě každého z nich předchází architektonický návrh vycházející z výborné znalosti geometrie, od něj se pak odvíjí případné technické úpravy a parametry tak, aby architektův model vyhovoval reálným podmínkám a fyzikálním zákonům. Úlohy tohoto pracovního listu byly inspirovány zavěšeným mostem původně plánované dálnice D47 (dnes součástí D1) poblíž Bohumína. Rozšířená varianta výukového materiálu zahrnující i další mostní stavby je k dispozici na webu www.matematech.cz.

| **Základní informace o materiálu** | |
|---|---|
| Autor | Hana Mahnelová |
| Věk žáků | 16 – 19 let |
| Časová dotace | 30 minut |
| Potřebné pomůcky a požadavky na techniku | - kalkulátor |
| Požadované znalosti a dovednosti žáků | - aritmetická posloupnost<br>- goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku<br>- Pythagorova věta<br>- osvojení pojmů mostní závěs, mostovka, pylon |
| Získané dovednosti a znalosti | - rozvoj čtenářské gramotnosti žáka<br>- čtení dat z konstrukční předlohy<br>- aplikace posloupnosti<br>- aplikace výpočtů v pravoúhlém trojúhelníku |
| Aplikace tématu | Stavební praxe mostů |
| Zdroje | [1] www.casopisstavebnictvi.cz/zaveseny-most-pres-odru_A1613_I24 |

**Pracovní list pro žáky**

*Obr. 9.1: Zavěšený most přes Odru a Antošovické jezero, převzato z [1], autoři fotografie: Tomáš Malý, Jiří Dvořák*

K zajímavým stavbám roku 2008 patří beze sporu i dálniční most přes řeku Odru a přes Antošovické jezero (obrázek 9.1). Konstrukce je zavěšena z každé strany 14 závěsy na jediném pylonu v podélné ose mostu (obrázek 9.2). Závěsy mají délky od 23 m do 99 m a na vzdálenost mezi jejich zakotveními na pylonu je 1,2 m. Pylon o celkové výšce 46,81 m vyčnívá 37,5 m nad mostovku. Další údaje jsou na obrázku 9.2.




*Obr. 9.2: Podélný řez zavěšeného pole mostu, převzato z [1], autoři nákresu: Tomáš Malý, Jiří Dvořák*

## Úloha

a) Užitím posloupnosti vypočtěte vzdálenost symetrického ukotvení závěsů na mostovce.
b) V jaké výšce nad mostovkou jsou ukotveny nejkratší závěsy?
c) Pod jakým úhlem od pylonu jsou zavěšeny nejkratší a nejdelší závěsy?

**Zkušenosti s použitím výukového materiálu**

PL je vhodné zadat jako samostatnou práci žáka.
Problém a) lze řešit i jinak, proto je v zadání cílený požadavek užitím aritmetické posloupnosti.

**Vzorové řešení**

Protože ukotvení závěsů je symetrické, vzdálenost mezi sousedními dvěma závěsy je vždy stejná. Označme tuto vzdálenost d. Z obrázku 9.2 vidíme, že umístění nejkratšího závěsu je ve vzdálenosti 11,21 m. Postupujeme-li v tomto směru k nejdelšímu závěsu, který je od pylonu ve vzdálenosti 78,72 + 11,21 = 89,93 m, pak vzdálenosti všech závěsů od pylonu tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí $d$.

Proto $a_1=11{,}21, a_{14}=89{,}93$ a platí $a_{14}=a_1+13d$, odkud vyjádříme diferenci a dosadíme

$d=(a_{14}-a_1):13$

$d=(89{,}93-11{,}21):13\approx 6{,}06$

Závěsné kabely jsou ukotveny v mostovce po 6,06 metrech.

Potřebnou vzdálenost vypočítáme užitím Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku, ve kterém je přeponou nejkratší závěs a kratší odvěsnou vzdálenost ukotvení tohoto závěsu od pylonu. Označíme-li hledanou délku $x$, pak platí

$x^2 = 23^2 - 11{,}21^2 \Longrightarrow x \approx 20{,}08.$

První závěsy na pylonu jsou ukotveny 20,08 metrů nad mostovkou.

Také při řešení této úlohy vystačíme s pravoúhlým trojúhelníkem, kde tentokrát využijeme goniometrické funkce. Pro případ nejkratšího závěsu použijeme stejný trojúhelník jako v předcházejícím výpočtu. Označíme-li hledaný úhel $\alpha$, pak

$\sin\alpha = 11{,}21 : 23 \Longrightarrow \alpha \approx 29°10'$

Analogicky řešíme i odchylku nejdelšího závěsu, označme ji $\beta$. Přeponou pravoúhlého trojúhelníka je jeho délka, kratší odvěsnou vzdálenost 89,93 m.

$\sin\beta = 89{,}93 : 99 \Longrightarrow \beta \approx 65°17'$

**Další podobné výukové materiály**

Na webových stránkách www.matematech.cz jsou k dispozici další výukové materiály inspirované zajímavými mostními stavbami České republiky. Např. bechyňskou Duhou, Mariánským mostem v Ústí nad Labem nebo lávkou v Českých Budějovicích. Zkrácená verze prvního z nich je součástí této knihy (kapitola 10).

Kromě již uvedených matematických témat úlohy také prověřují kupříkladu znalost kvadratické funkce a odchylky rovin. Propojení s technickou praxí je realizováno získáváním dat z grafické dokumentace jednotlivých staveb, které jsou součástí pracovních listů.

# 10. Matematika mostních staveb – bechyňská Duha

## Úvod

Již v minulém století naši předkové citlivě vzhledem k přírodě překlenuli řeku Lužnici v jihočeské Bechyni silničním a současně železničním mostem. Výsledkem je nejen užitečná stavba v podobě unikátního obloukového mostu, ale také ojedinělý umělecký objekt. I zde najdeme několik námětů k vytvoření matematických problémů. Zaměříme se na analytickou geometrii kuželosečky a ukázku využití souřadného systému jako nezbytného nástroje pro řešení matematické úlohy. Rozšířená varianta výukového materiálu zahrnující i další mostní stavby je k dispozici na webu www.matematech.cz.

| **Základní informace o materiálu** | |
|---|---|
| Autor | Hana Mahnelová |
| Věk žáků | 16 – 19 let |
| Časová dotace | 15 minut |
| Potřebné pomůcky a požadavky na techniku | - tužka<br>- kalkulátor |
| Požadované znalosti a dovednosti žáků | - grafické znázornění v Kartézské soustavě souřadné<br>- osová rovnice paraboly<br>- osvojení pojmů rozpětí a vzepětí mostního oblouku |
| Získané dovednosti a znalosti | - rozvoj čtenářské gramotnosti<br>- rozvoj grafického projevu žáka v souřadném systému<br>- schopnost aplikace matematiky na reálný problém |
| Aplikace tématu | Stavební praxe mostů |
| Zdroje | [1] www.inbest.cz/profil-spolecnosti |

### Pracovní list pro žáky

*Obr. 10.1: Most přes Lužnici v Bechyni, převzato z [1], autor fotografie: Michael Šmucr*

Od 1. 10. 2014 je Bechyňský most (obrázek 10.1), často označovaný jako Duha nebo Duhový most, prohlášen národní kulturní památkou. Jedná se o silniční a současně železniční most, jehož stavba započala v roce 1926, slavnostně otevřen byl 28. října 1928, rekonstrukce proběhla v letech 2003 – 2004. Most tvoří jeden železobetonový oblouk o rozpětí 90 m a vzepětí 38 m, přičemž jeho nejvyšší bod je asi 50 m nad hladinou řeky Lužnice. Předpokládejme, že oblouk je parabolický.

### Úloha

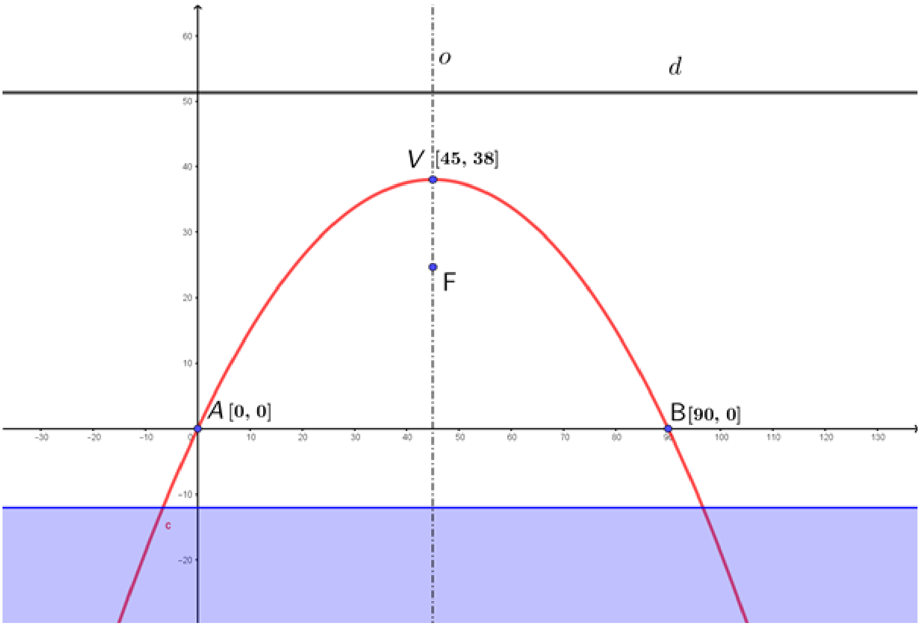
a) Načrtněte podélný řez mostu vhodně umístěného do soustavy souřadné a užitím nástrojů analytické geometrie zjistěte parametr paraboly.
b) Jak vysoko nad vodní hladinou Lužnice leží ohnisko parabolického oblouku?

### Vzorové řešení

Zvolíme-li umístění konkávní paraboly tak, že vrchol má souřadnice $V[45, 38]$ (jako na obrázku 10.2), pak její rovnice bude ve tvaru

$$(x-45)^2 = -2p(y-38), \text{ kde parametr } p > 0.$$

Dosazením souřadnic bodů $A[0, 0]$ nebo $B[90, 0]$ stanovíme hodnotu parametru $p = \frac{2025}{76}$. Ohnisko je umístěno na ose *o* paraboly a ve vzdálenosti menší o polovinu parametru než je ypsilonová souřadnice vrcholu. Proto $F\left[45, \frac{3751}{152}\right]$ a jeho reálnou vzdálenost od vodní hladiny můžeme vyjádřit například součtem $\frac{3751}{152} + 12$, což je přibližně 37 metrů.




*Obr. 10.2: Znázornění mostního oblouku v programu GeoGebra*

**Zkušenosti s použitím výukového materiálu**

Úloha je určena k samostatné práci žáků.

Rozpětí oblouku představuje maximální vzdálenost např. podpěr, vzepětí je nejkratší vzdálenost vrcholu oblouku od spojnice pat podpěr. Zkušenosti ukazují, že těmto pojmům žáci intuitivně rozumí.

**Další podobné výukové materiály**

Na webových stránkách www.matematech.cz jsou k dispozici další výukové materiály inspirované zajímavými mostními stavbami České republiky. Např. zavěšeným mostem přes Odru a Antošovické jezero poblíž Bohumína, Mariánským mostem v Ústí nad Labem nebo lávkou v Českých Budějovicích. Zkrácená verze prvního z nich je součástí této knihy (kapitola 9).

Kromě již uvedených matematických témat úlohy také prověřují kupříkladu znalost kvadratické funkce a odchylky rovin. Propojení s technickou praxí je realizováno získáváním dat z grafické dokumentace jednotlivých staveb, které jsou součástí pracovních listů.

# 11. Technické zobrazování

**Úvod**

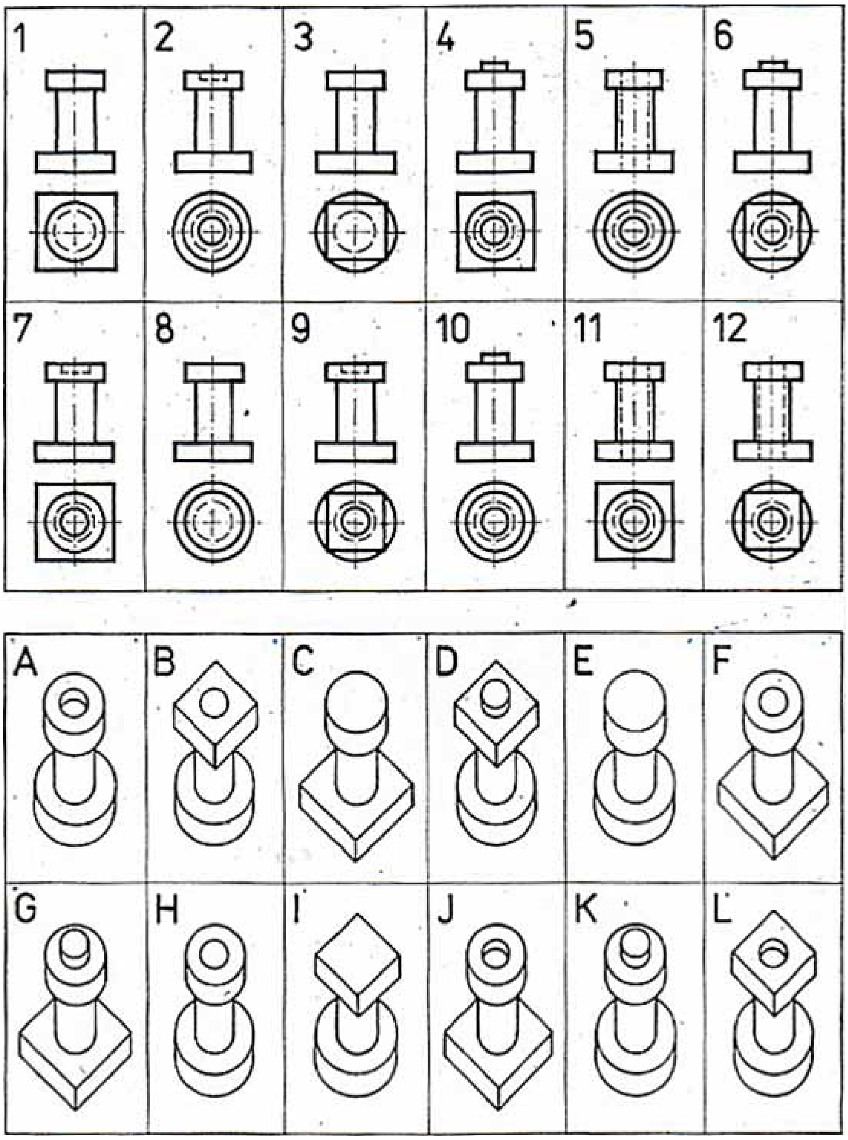
Technické zobrazování je nedílnou součástí běžného i profesního života, a proto by žáci opouštějící základní školu měli být seznámeni s jeho základy. Přesvědčit se o tom mohli žáci při exkurzi v Motoru Jikov, kde viděli, že CNC stroje, které jsou řízeny počítači, pracují podle programu, který vytvoří programátoři podle technických výkresů daných výrobků.

| **Základní informace o materiálu** | |
|---|---|
| Autor | Květuše Mrázová |
| Věk žáků | 12 – 15 let |
| Časová dotace | 3 – 4 hodiny |
| Potřebné pomůcky a požadavky na techniku | Stavebnice pro pravoúhlé promítání, modely součástek, čtverečkovaný papír, interaktivní tabule |
| Požadované znalosti a dovednosti žáků | - čtení technického výkresu<br>- základy rýsování<br>- převody délkových jednotek<br>- měřítko plánu<br>- základy prostorové představivosti |
| Získané dovednosti a znalosti | - aplikace matematiky při technickém zobrazování<br>- orientace v technickém výkresu<br>- schopnost narýsovat jednoduchý technický náčrt, výkres<br>- rozvoj představivosti |
| Aplikace tématu | Orientace v technickém výkresu je nedílnou součástí běžného života např. montáž nábytku v domácnosti i v technických profesích |
| Spolupráce s podnikem | MOTOR JIKOV Group a.s. |
| Zdroje | [1] I. Škára: Pracovní vyučování – technické práce v 7. ročníku ZŠ, SPN, 1990.<br>[2] E. Kraemer a kol.: Matematika pro 8. ročník ZŠ, III. díl – rýsování, SPN, 1983. |

**Pracovní list pro žáky**

## Úloha č. 1

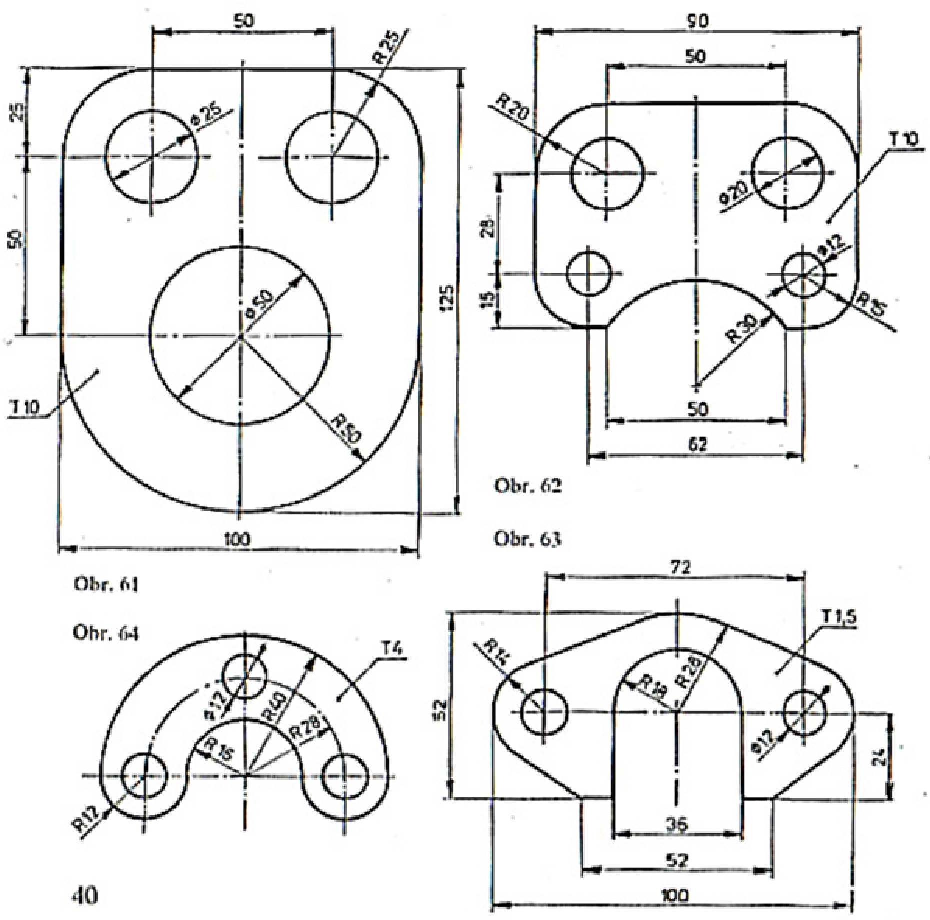
Přiřaď ke každému číslu písmeno tak, aby sdružené průměty odpovídaly součástce. (Obrázek 11.1)




*Obr. 11.1: Sdružené průměty, převzato z [1]*

### Úloha č. 2

Sestroj technický výkres zvolené součástky v měřítku 1 : 1, podle zadaných údajů na Obrázku 11.2.




*Obr. 11.2: Technický výkres součástky, převzato z [2]*

**Zkušenosti s použitím výukového materiálu**

Tyto materiály se mi v praxi dobře osvědčily. Rozvíjejí u žáků logické myšlení i představivost, které využijí jak v matematice (náčrty těles, rozbor konstrukčních úloh, převody jednotek) tak i v hodinách technických prací. Všechny výrobky, které žáci v těchto hodinách zhotovují, zhotovují podle technických výkresů a zde se bez znalosti technického zobrazování a orientace v technickém výkresu neobejdou.

Dříve než žáci začnou plnit zadané úkoly je nutné je seznámit s druhy technického zobrazování – je možné využít software GeoGebra.

1. Kosoúhlé
2. Perspektivní
3. Pravoúhlé

A poté nacvičit technické zobrazování pomocí stavebnice – promítací kout. Pokud ve škole tuto stavebnici nemáte, je možné ji vytvořit z krabice, tělesa zhotovit z polystyrenu a kartičky zhotovit z plastové fólie a ke stěnám krabice připevňovat pomocí kancelářských sponek – viz Obrázky 11.3 a 11.4.

*Obr. 11.3: Promítací kout – jednotlivé součásti*

*Obr. 11.4: Promítací kout – sestavená stavebnice*

## Vzorové řešení

### Řešení úlohy č. 1

1 – C; 2 – A; 3 – I; 4 – G; 5 – H; 6 – D; 7 – J; 8 – E; 9 – L; 10 – K; 11 – F; 12 – B. Problémy v řešení se nejčastěji objevují u součástek, které mají částečný nebo průchozí otvor.

### Řešení úlohy č. 2

Žáci výkres rýsují podle tištěné předlohy. Před zahájením samotného rýsování je vhodné se žáky zopakovat pravidla pro kótování a užívání druhů čar.

Jestliže ve škole máte modely strojních součástek (Obrázek 11.5), mohou si žáci vybrat skutečnou součástku, změřit ji a podle skutečnosti narýsovat.

*Obr. 11.5: Modely strojních součástek*

## Další podobné výukové materiály

Rozšířená varianta tohoto výukového materiálu je k dispozici na webu www.matematech.cz – Výukové materiály – Technické zobrazování. Zde jsou uvedeny i rady pro učitele.

Na webu www.matematech.cz se technickému zobrazování věnují také výukové materiály Měření rozměrů odlitku trnu a Výpočet hmotnosti obrobku pro výrobu převodovky v zahradní sekačce. Zkrácená verze druhého z nich je součástí této knihy (kapitola 14).

# 12. Plánování výroby hračky (Káča)

### Úvod

Pracovní list řeší různé požadavky při plánování výroby hračky Káča. Časovou náročnost, spotřebu materiálu, objem výrobku a množství odpadu. Vznikl ve spolupráci se ZVVZ Milevsko a je vhodné ho spojit s exkurzí do této firmy. Rozšířená varianta tohoto výukového materiálu a další podobné materiály na téma výroby káči jsou k dispozici na webu www.matematech.cz

| **Základní informace o materiálu** | |
|---|---|
| Autor | Jitka Nováková |
| Věk žáků | 14 – 16 let |
| Časová dotace | 1 hodina |
| Potřebné pomůcky a požadavky na techniku | - matematicko-fyzikální tabulky<br>- kalkulačka |
| Požadované znalosti a dovednosti žáků | - objem válce<br>- řešení rovnice<br>- procenta<br>- lineární funkce<br>- převody jednotek |
| Získané dovednosti a znalosti | - souhrnné opakování učiva matematiky ZŠ při řešení úlohy z praxe |
| Aplikace tématu | Plánování výroby konkrétního výrobku |
| Spolupráce s podnikem | ZVVZ a.s. (provoz Milevsko) |
| Zdroje | Technické informace poskytnuté ZVVZ a.s. |

**Pracovní list pro žáky**

Káča se vyrábí na CNC stroji z kulatiny o průměru 50 mm. Délka potřebného polotovaru je 60 mm. Káča je vyrobena z oceli S235JR. Její hustota je přibližně 7850 kg/m$^3$. Hmotnost výrobku je 0,108 kg.

*Obr. 12.1: Kulatina a z ní vyrobená káča*

### Úloha č. 1

a) Určete objem polotovaru a jeho hmotnost.

b) Určete objem výrobku.

c) Určete procento odpadu při výrobě .

### Úloha č. 2

K výrobě káči se používá kulatina o průměru 50 mm a délce 1500 mm.

Určete počet kusů kulatin, potřebných pro 15 výrobků.

### Úloha č. 3

Káča je vyráběna na CNC stroji. Přípravné práce (programování CNC stroje) trvají 60 minut. Výroba jedné káči 9 minut.

a) Určete předpis funkce pro výpočet potřebného času na výrobu požadovaného počtu výrobků. Uveďte matematický název této funkce.

b) Určete čas potřebný pro zhotovení 15 výrobků.

**Zkušenosti s použitím výukového materiálu**

Pracovní list je možné použít na konci 9. ročníku na závěr exkurze do ZVVZ.

Je také vhodný pro ověření znalostí studentů 1. ročníku střední školy.

Výpočty úlohy č. 1 je možné ověřit experimentálně pomocí odměrného válce a váhy.

**Vzorové řešení**

### Úloha č. 1

a) Určete objem a hmotnost polotovaru:

$d$ = 50 mm, $v$ = 60 mm, $V$ = ? cm$^3$

$V = \pi r^2 v$

$V = \pi \cdot 25^2 \cdot 60$

$V = 37500\pi = 117809{,}7245$ mm$^3$

$V = 117809{,}7245$ mm$^3$ = 117,8097245 cm$^3$

Závěr: Objem polotovaru je přibližně 117,8097245 cm$^3$.

Určete hmotnost polotovaru:

$V$ = 117809,7245 mm$^3$ = 0,0001178097245 m$^3$, $\rho$ = 7850 kg/m$^3$, m= ? kg

$m = \rho \cdot V$

$m = 7850 \cdot 0{,}0001178097245$

$m = 0{,}924806337$ kg.

Závěr: Hmotnost polotovaru je přibližně 0,924806337 kg.

b) Vypočtěte objem výrobku:

$\rho$ = 7850 kg/m$^3$, $m$ = 0,108 kg, $V$ = ? cm$^3$

$V = m/\rho$

$V = 0{,}108/7850$

$V$ = 0,00001375796178 m$^3$ = 13,757962 cm$^3$.

Závěr: Objem káči je přibližně 13,757962 cm$^3$.

c) Procento odpadu

Pomocí objemu

100 % ..................117,8097245 cm$^3$

$x$ % ..................... 13,757962 cm$^3$

$$\frac{x}{100} = \frac{13{,}757962}{117{,}8097245}$$

$x$ = 11,678 %

Pomocí hmotnosti

100 % ............ 0,924806337 kg

$x$ % .............................. 0,108 kg

$$\frac{x}{100} = \frac{0{,}108}{0.924806337}$$

$x$ = 11,678 %

Odpad: 100 % – 11,678 % = 88,32 %.

Závěr: Odpad tvoří přibližně 88,32 %.

**Úloha č. 2**

Určete počet kusů kulatin, potřebných pro 15 výrobků:

Délka potřebného polotovaru pro výrobu káči je 60 mm.

$x$ = 1500 mm : 60 mm = 25 ks.

Závěr: Z jedné kulatiny se vyrobí 25 kusů výrobku, tady jedna kulatina stačí.

**Úloha č. 3**

a) Určete předpis funkce pro výpočet potřebného času na výrobu požadovaného počtu výrobků.  Uveďte matematický název této funkce:

$y = 60 + x \cdot 9$

$y = 9x + 60$   jedná se o lineární funkci.

b) Určete čas potřebný pro zhotovení 15 výrobků.

$y = 15 \cdot 9 + 60 = 195$ minut.

Závěr: Potřebný počet výrobků bude vyroben za 195 minut od chvíle, kdy se začne stroj programovat.

# 13. Středověký jeřáb

**Úvod**

Učivo o úměrnosti je procvičeno na příkladu použití středověkých metod při opravě věže Jakobínka v Rožmberku nad Vltavou v letech 2018-19. Rozšířená varianta tohoto výukového materiálu je k dispozici na webu www.matematech.cz

| **Základní informace o materiálu** | |
|---|---|
| Autor | Marek Tyle |
| Věk žáků | 12 – 15 let |
| Časová dotace | 1 vyučovací hodina |
| Potřebné pomůcky a požadavky na techniku | okopírované zadání nebo projekce |
| Požadované znalosti a dovednosti žáků | přímá úměrnost, trojčlenka, zlomky, úpravy výrazů |
| Získané dovednosti a znalosti | rozbor technického problému, matematizace reálné situace, procvičení výpočtů |
| Aplikace tématu | příklad historického řešení |
| Zdroje | článek ČTK, fotografie z webu Národního památkového úřadu; podrobně na konci kapitoly |

## 13.1. Pracovní list pro žáky

zpráva ČTK 30. 5. 2018 [1]:

**Středověký jeřáb**

Na opravě věže Jakobínka bude pracovat středověký jeřáb. Pohání ho lidská síla.

Šestou sezonu odborníci z česko-budějovického památkového ústavu pokračují v ojedinělém stavebním experimentu při obnově věže Jakobínka v Rožmberku nad Vltavou. Pomocí repliky středověkého jeřábu poháněného lidskou silou se v letošním roce pustí do opravy střechy.

Replika středověkého jeřábu dlouhá 14 a vysoká 7 metrů s kolem na lidský pohon byla koncem minulého měsíce vyzdvižena na vrchol věže.

S jeho pomocí se do třicetimetrové výšky vytáhnou kamenné krakorce, tesařské prvky pro konstrukci krovu a ochozu, střešní krytina, kámen a malta potřebná pro opravu věže. Dolů pak bude jeřáb snášet suť.

*Obr. 13.1: Věž Jakobínka s rozestavěným středověkým lešením, převzato z [2] (vlevo); poháněcí šlapací kolo jeřábu před jeho instalací na věž, převzato z [3] (vpravo)*

*Obr. 13.2: Detail kola s navijákem na vrcholu věže Jakobínka při prohlídce, autor fotografie Hana Mahnelová*

**Vstupní údaje k úlohám:**

Předpokládejme poloměr velkého kola 240 cm, poloměr navijáku lana 30 cm. Člověk roztáčí kolo svojí chůzí uvnitř. Předpokládejme, že každý krok měří 50 cm a že při tom člověk klade chodidla vždy 5 cm vysoko.

### Úloha č. 1

Kolik kroků je zapotřebí, než se otočí velké kolo jeřábu jednou dokola?

### Úloha č. 2

Kolik kroků je zapotřebí, než dojde k vyzdvižení nákladu do výšky 30 m?

### Úloha č. 3

Jaké převýšení přitom člověk musí překonat?

**Vzorové řešení**

### Úloha č. 1

Obvod kola je $2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 240 = 1507{,}2$ cm, což je přibližně 15 metrů.
Člověk tedy musí urazit 15 metrů, což odpovídá 30 krokům o délce 50 cm.

### Úloha č. 2

Při jedné otáčce kola dojde i k jedné otáčce navijáku, lano se tedy navine o délku obvodu navijáku, což je $2 \cdot 3{,}14 \cdot 30 = 188$ cm, tedy 1,88 metrů.
Pomocí trojčlenky lze určit vzdálenost x, kterou je třeba urazit v kole, aby došlo ke zdvižení břemene o 30 m:

1,88 m................ 15 m

30 m...................... x m

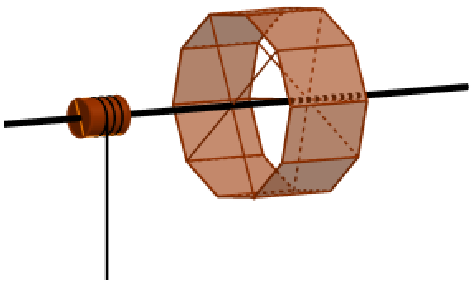
z čehož vychází $x = (30 : 1{,}88) \cdot 15 = 239$ m, tedy asi 479 kroků.

### Úloha č. 3

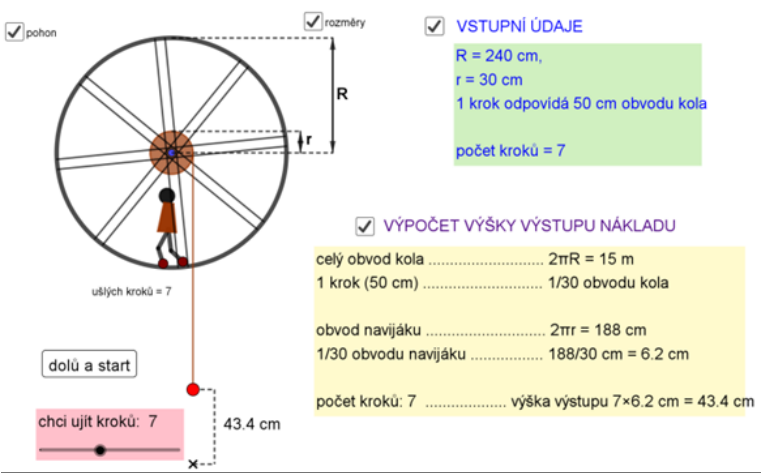
Jestliže každý krok odpovídá převýšení 5 cm, pak 479 kroků odpovídá celkovému převýšení asi 24 metrů.

### Zkušenosti s použitím výukového materiálu

Úlohy je možné zadat také otevřeně bez konkrétních číselných údajů. Žáci sami si nejprve určí, které údaje jsou k výpočtu potřebné, potom je mohou obdržet od učitele, anebo je mohou číselně zkusit odhadnout podle fotografií nebo i jiných jim dostupných materiálů.
Úlohu je možno rozšířit i o fyzikální úvahy na téma jednoduchých strojů a fungování podobných mechanismů. Přemýšlet mohou žáci o práci a výkonu člověka v kole, o třecích silách, o momentu síly, o rovnováze sil atd.
K úloze jsou vytvořeny dva doplňkové aplety v programu Geogebra, které mohou, ale nemusí být při výuce použity. První představuje princip kola s navijákem ve 3D zobrazení s animací pohybu kola (obrázek 13.3). Druhý zobrazuje kolo ve 2D a je doplněním úlohy o výpočet výšky, do které vystoupá náklad, ujde-li člověk v kole daný počet kroků. Počet kroků lze nastavit posuvníkem. Aplet je obohacen o animaci pohybu a o zobrazení okamžité výšky nákladu (obrázek 13.4).



*Obr. 13.3: Náhled Geogebra apletu – princip kola s navijákem, převzato z [4]*




*Obr. 13.4: Náhled Geogebra apletu – animace pohybu, převzato z [5]*

**Další podobné výukové materiály**

Podobné výukové materiály zaměřené na rozbory principu fungování technických problémů jsou k dispozici na webu www.matematech.cz – Výukové materiály – Diferenciální kladkostroj, Cyklistický převod, Pohon válečkové dráhy.

**Použité zdroje**

[1] ct24.ceskatelevize.cz/regiony/2494756-na-oprave-veze-jakobinka-bude-pracovat-stredoveky-jerab-pohani-ho-lidska-sila

[2] www.npu.cz/cs/npu-a-pamatkova-pece/npu-jako-instituce/akce/22874-mimoradna-komentovana-prohlidka-veze-jakobinka

[3] www.npu.cz/cs/npu-a-pamatkova-pece/npu-jako-instituce/zpravy/30532-stante-se-stredovekym-jerabnikem-npu-hleda-dobrovolniky-pro-rekonstrukci-veze-jakobinky

[4] https://ggbm.at/g7vjwgpw

[5] https://ggbm.at/guvtxkpc

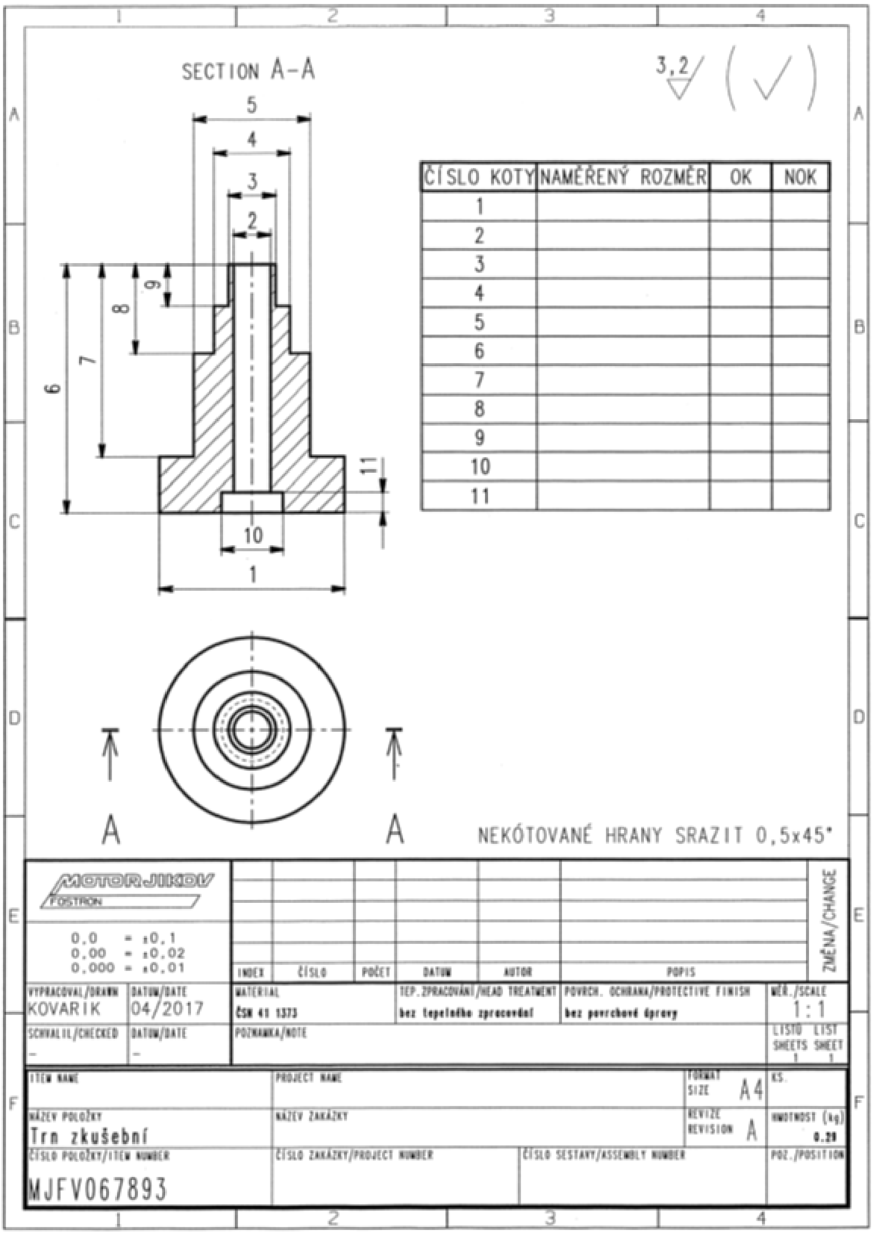
# 14. Výpočet hmotnosti obrobku

**Úvod**

Výukový materiál je zaměřen na užití výpočtu objemu válce v praktickém případě určení objemu obrobku. V případě, že bude vypracování úloh spojeno s návštěvou závodu Motor Jikov, může si žák vyzkoušet i měření délek pomocí posuvného měřítka. Varianta výukového materiálu bez návštěvy závodu je k dispozici na webu www.matematech.cz

| **Základní informace o materiálu** | |
|---|---|
| Autor | Marek Vejsada |
| Věk žáků | 14 – 19 let |
| Časová dotace | 2 vyučovací hodiny |
| Potřebné pomůcky a požadavky na techniku | - dataprojektor pro učitele<br>- posuvná měřítka a kalkulačky pro žáky<br>- obrobky – dostupné v Motoru Jikov Group a.s. – exkurzi možno domluvit u Ing. Hroudy, rhrouda@mjs.cz |
| Požadované znalosti a dovednosti žáků | - základní prostorová představivost<br>- výpočet objemu tělesa složeného z více válců<br>- základní čtení jednoduchého technického nákresu (znalost kót)<br>- měření posuvným měřítkem<br>- práce s tabulkou |
| Získané dovednosti a znalosti | - zručnost při měření posuvným měřítkem<br>- procvičení práce s tabulkou a s technickým dokumentem<br>- aplikace znalosti výpočtu objemu pro použití v technice<br>- pochopení užitečnosti matematiky při řešení reálného problému |
| Aplikace tématu | Technické nákresy a tabulky jsou nedílnou součástí technické praxe. |
| Spolupráce s podnikem | MOTOR JIKOV Group a.s. |
| Zdroje | Technický nákres obrobku pro výrobu převodovky v zahradní sekačce – Ing. R. Hrouda, Motor Jikov Group. |

**Pracovní list pro žáky**




*Obr. 14.1: Technický nákres trnu*

### Úloha č. 1

Vyplňte tabulku rozměrů v tabulce vpravo nahoře na Obrázku 14.1. K měření použijte posuvné měřítko (šupleru). Naměřené rozměry uveďte v milimetrech s přesností na dvě desetiny milimetru.
Pozn.: Po určení údajů porovnejte své měření s odborně naměřenými hodnotami, které má k dispozici váš učitel nebo váš průvodce na exkurzi. Označte nějakým symbolem ve sloupci „OK“, pokud se vámi naměřený rozměr neliší od odborně naměřené hodnoty o více než 0,5 mm. V opačném případě označte hodnotu ve sloupci „NOK“ a převezměte v tomto případě hodnotu od vašeho učitele (průvodce).

### Úloha č. 2

Vypočítejte objem trnu podle naměřených rozměrů. K výpočtu použijte vztah pro objem válce. Průběh výpočtů pečlivě zaznamenávejte do poznámek. Své výpočty doprovázejte jednoduchými obrázky, aby bylo zřejmé, jakou část výpočtu provádíte.
Doporučení: Rozepište si nejprve postup, ve kterém uveďte pořadí výpočtů objemů válců. Teprve potom začněte počítat jednotlivé objemy.

### Úloha č. 3

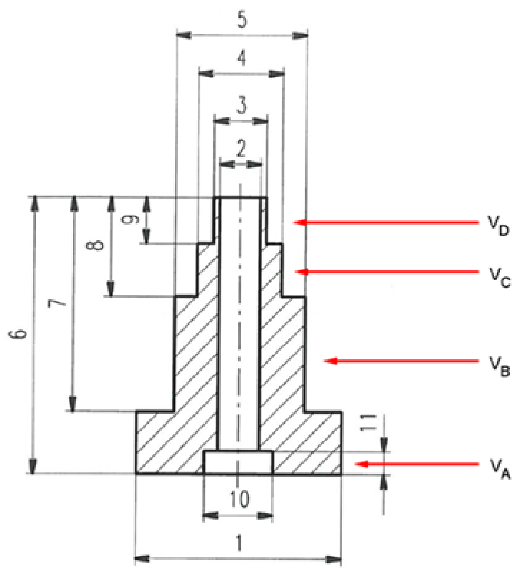
Převeďte objem trnu z úlohy 2 na centimetry krychlové. Vypočítejte hmotnost odlitku, víte-li, že hustota materiálu, ze kterého je vyroben, je 7,850 g/cm$^3$. Výsledek zaokrouhlete na desetiny gramu.

### Zkušenosti s použitím výukového materiálu

Při řešení úlohy týkající se výpočtu objemu odlitku jsem narazil na problém, který spočíval v tom, že žáci, pracující ve skupinách, volili postupy sice originální, ale lišící se od sebe. Bylo obtížné kontrolovat správnost. V případě, že se konečný výpočet výrazně odlišoval od správného řešení, bylo hledání chyby složité. Proto doporučuji navrhnout žákům společný postup, např. ten, co je uveden v části vzorového řešení.

### Vzorové řešení

Možné řešení – výpočet objemu trnu – součástku si rozdělíme na čtyři díly. Pořadí výpočtů označeno na následujícím obrázku 1. Pomocné obrázky pro výpočty jsou pouze ilustrativní, bez kót.




*Obr. 14.2: Označení částí trnu pro výpočty*

| Číslo koty: | Naměřený rozměr (v mm): |
|---|---|
| 1 ($k_1$) | 45,02 |
| 2 ($k_2$) | 9,02 |
| 3 ($k_3$) | 11,53 |
| 4 ($k_4$) | 18,54 |
| 5 ($k_5$) | 28,51 |
| 6 ($k_6$) | 60,06 |
| 7 ($k_7$) | 46,62 |
| 8 ($k_8$) | 21,90 |
| 9 ($k_9$) | 10,15 |
| 10 ($k_{10}$) | 15,42 |
| 11 ($k_{11}$) | 5,10 |

*Obr. 14.3: Tabulka s odborně naměřenými hodnotami*

**1. krok:** Výpočet objemu $V_A$:

$V_A = ?$

$V_1 = \pi \left(\frac{k_1}{2}\right)^2 v_1 = 21394{,}4\ mm^3$

$v_1 = k_6 - k_7 = 13{,}44\ mm$

$k_1 = 45{,}02\ mm$

$V_2 = \pi \left(\frac{k_{10}}{2}\right)^2 v_2 = 952{,}4\ mm^3$

$v_2 = k_{11} = 5{,}10\ mm$

$k_{10} = 15{,}42\ mm$

$V_3 = \pi \left(\frac{k_2}{2}\right)^2 v_3 = 532{,}9\ mm^3$

$v_3 = k_6 - k_7 - k_{11} = 8{,}34\ mm$

$k_2 = 9{,}02\ mm$

$V_A \doteq 19909{,}1\ mm^3$

**2. krok:** Výpočet objemu $V_B$:

$V_B = \pi \left(\frac{k_5}{2}\right)^2 v_4 - \pi \left(\frac{k_2}{2}\right)^2 v_4$

$v_4 = k_7 - k_8 = 24{,}72\ mm$

$k_2 = 9{,}02\ mm$, $k_5 = 28{,}51\ mm$

$V_B \doteq 14201{,}3\ mm^3$

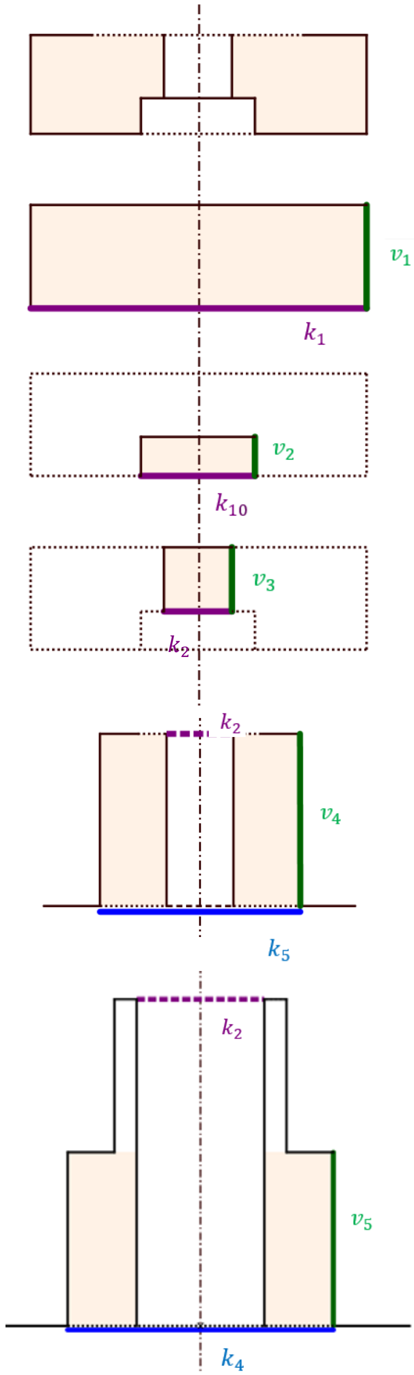
**3. krok:** Výpočet objemu $V_C$:

$V_C = \pi \left(\frac{k_4}{2}\right)^2 v_5 - \pi \left(\frac{k_2}{2}\right)^2 v_5$

$v_5 = k_8 - k_9 = 11{,}75\ mm$

$k_2 = 9{,}02\ mm$, $k_4 = 18{,}54\ mm$

$V_C \doteq 2421{,}3\ mm^3$

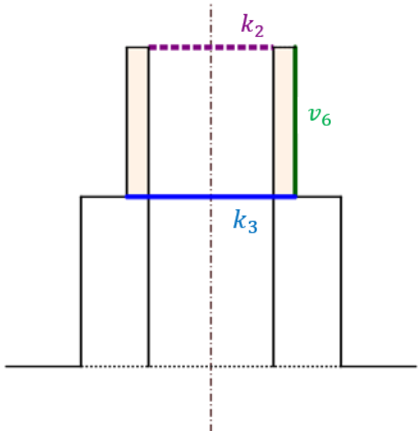


**4. krok:** Výpočet objemu $V_D$:

$V_D = \pi\left(\frac{k_3}{2}\right)^2 v_6 - \pi\left(\frac{k_2}{2}\right)^2 v_6$

$v_6 = 10{,}15$ mm

$k_2 = 9{,}02$ mm, $k_3 = 11{,}53$ mm




$V_D \doteq 411{,}2$ mm$^3$

**Celkový objem:**

$V = V_A + V_B + V_C + V_D \doteq 36942{,}9$ mm$^3$

**Výpočet hmotnosti trnu:**

$V \doteq 36942{,}9$ mm$^3 = 36{,}9429$ cm$^3$

$m = \rho \cdot V = 7{,}850$ g/cm$^3 \cdot 36{,}9429$ cm$^3$

$m \doteq 290{,}0$ g

Hmotnost trnu je 290,0 g. Správnost výsledku je možné ověřit rovněž vážením, je-li k dispozici obrobek (Obrázek 14.4).

*Obr. 14.4: Fotografie obrobku*

# 15. Technická síta

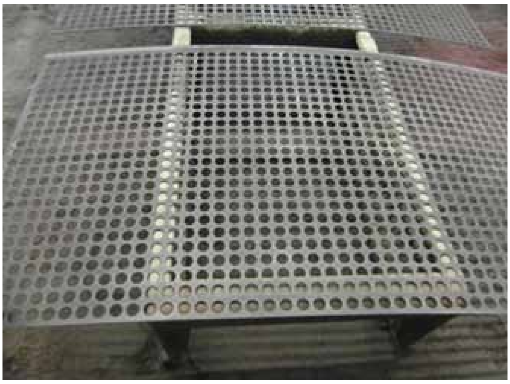
### Úvod

Výukový materiál zaměřený na praktický výpočet objemu a hmotnosti technického síta s použitím znalostí výpočtů objemu a hmotnosti kvádru a válce. Materiál vznikl na základě návštěvy podniku ZVVZ Milevsko. Rozšířená varianta tohoto výukového materiálu je k dispozici na webu www.matematech.cz. Na tomto webu se návštěvě podniku ZVVZ Milevsko věnují také výukové materiály s názvem Povrch roury a Užití matematiky ZŠ při výrobě káči. Zkrácená verze druhého z nich je součástí této knihy (kapitola 12).

| **Základní informace o materiálu** | |
|---|---|
| Autor | Yvona Zuntová |
| Věk žáků | 13 – 15 let |
| Časová dotace | 1 vyučovací hodina |
| Potřebné pomůcky a požadavky na techniku | - pracovní list se záznamem rozměrů<br>- matematické tabulky nebo internet<br>- mobilní telefon |
| Požadované znalosti a dovednosti žáků | - obsah obdélníka a kruhu<br>- objem a hmotnost kvádru a válce<br>- procenta |
| Získané dovednosti a znalosti | - řešení geometrické úlohy motivované praxí<br>- upevnění znalostí (obsah kruhu, obsah obdélníka, objem kvádru a válce, hmotnost tělesa) |
| Aplikace tématu | Výpočet objemu a hmotnosti těles patří k základním praktickým dovednostem pro technickou praxi a vzdělání. |
| Spolupráce s podnikem | ZVVZ a.s. (provoz Milevsko) |
| Zdroje | Vlastní práce, měření a foto z exkurze do ZVVZ Milevsko |

**Pracovní list pro žáky**

Vysvětlení pojmu technická síta – zařízení na zachytávání prachových částic a nečistot ve vzduchotechnických zařízeních. Mají podobu tenké kovové obdélníkové desky s pravidelně uspořádanými kruhovými otvory (obrázek 15.1).



*Obr. 15.1: Technické síto na zachycení nečistot*

## Úloha č. 1

a) Opakování – doplňte vzorce:

- pro obsah obdélníka $S =$
- pro obsah kruhu $S =$
- pro objem kvádru $V =$
- pro objem válce $V =$
- pro výpočet hmotnosti těles $m =$

b) Vypočítej obsah obdélníka, který má strany dlouhé 2 m a 80 cm.

c) Vypočítej obsah kruhu, který má průměr 4 cm.

## Úloha č. 2

Vypočítejte objem a hmotnost technického síta pro zachycení nežádoucích částic (skupinová práce ve čtveřicích).

1) Kolik kruhových otvorů s průměrem 4 cm lze vyříznout z obdélníkové desky o rozměrech 2 m a 80 cm, jestliže musí mít navzájem minimální vzdálenost 1 cm a na okrajích desky musí zbýt alespoň 3 cm?
2) Vypočítejte, kolik % tvoří odpad po vyříznutí.
3) Jaká je hmotnost desky před a po úpravě, jestliže tloušťka je 5 mm a hustota materiálu je 7,87 g/cm$^3$?

**Vytvořte náčrtek podle obrázku 15.1.**

Počet všech kruhových otvorů:

Obsah podstavy desky bez otvorů:

Obsah jednoho kruhového otvoru:

Obsah podstavy desky se všemi kruhovými otvory:

Objem desky se všemi válcovými otvory:

Procento odpadu po vyříznutí válcových otvorů:

Druh materiálu a jeho hustota:

Výpočet hmotnosti:

Hmotnost desky před vyříznutím otvorů byla .................... kg, po vyříznutí .................... kg. Touto úpravou vzniklo ................ % odpadu materiálu.

## Zkušenosti s použitím výukového materiálu

Pracovní list je vhodným doplňkem závěru tematického celku Válec. Předpokládáme, že žáci samostatně počítají úlohy na objem a hmotnost válce. Pokud bude PL součástí exkurze do ZVVZ Milevsko, je možné na místě přeměřit skutečná síta a porovnat údaje z PL se skutečností. Opakovací úlohu 1 doporučujeme nechat jako práci jednotlivců. Druhou část PL (úloha 2) je vhodné počítat ve skupinách a porovnat navzájem výsledky.

Pokyny pro použití pomůcek: Ideální pomůckou je mobilní telefon vybavený souborem vzorců, aplikací kalkulačky a fotoaparátem, nebo učebnice matematiky pro 8. ročník, matematické tabulky, počítač s přístupem na internet. Vzhledem k obrázku na PL se však žáci bez tohoto vybavení obejdou a vzorec si mohou jednoduše odvodit. Pokud máme slabší skupinu žáků a chceme zvýšit názornost popisovaného technického síta, je možno využít kartonovou krabici od jogurtů, která bývá podobnou deskou s kruhovými otvory vybavena.

## Vzorové řešení

### Úloha č. 1

Obsah obdélníka: $S = a \cdot b$

Obsah kruhu: $S = \pi \cdot r^2$

Objem kvádru: $V = a \cdot b \cdot c$

Objem válce: $V = \pi \cdot r^2 \cdot v$

Hmotnost tělesa: $m = V \cdot \rho$

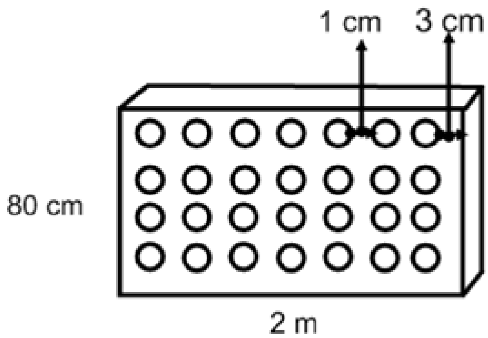
Vypočítej obsah obdélníka, který má strany 2 m a 80 cm dlouhé:

$S$ = 200 · 80 = 16 000 cm$^2$

Vypočítej obsah kruhu, který má průměr 4 cm:

$S$ = 3,14 · 22 = 12,56 cm$^2$

### Úloha č. 2




*Obr. 15.2: Náčrtek technického síta*

| | |
|---|---|
| Počet všech kruhových otvorů: | [(20 – 3 – 2) : 5] · [(80 – 3 – 2) : 5 ] = 585 |
| Obsah podstavy desky bez otvorů: | $S$ = 200 · 80 = 16 000 cm$^2$ |
| Obsah jednoho kruhového otvoru: | $S$ = 3,14 · 22 = 12,56 cm$^2$ |

Obsah podstavy desky se všemi kruhovými otvory:
16 000 – 585 · 12,56 = 16 000 – 7 347,6 = 8 652,4 cm$^2$

Objem desky se všemi válcovými otvory: 8 652,4 · 0,5 = 4 326,2 cm$^3$

Procento odpadu po vyříznutí válcových otvorů: 46 %
(100 % je 16 000 cm$^2$; 54 % je 8 652,4 cm$^2$; 46 % je 7 347,6 cm$^2$)

Druh materiálu a jeho hustota: ocel $\rho$ = 7,87 g/ cm$^3$
Výpočet hmotnosti: $m = V \cdot \rho$ = 4 326,2 · 7,87 = 34 047,2 g = 34 kg

Hmotnost desky před vyříznutím otvorů byla 63 kg, po odříznutí 34 kg. Touto úpravou vzniklo 46 % odpadu materiálu.

# 16. Kaskáda vodních elektráren Gosau

**Úvod**

V tomto učebním bloku pracují žáci v malých skupinkách na různých úlohách s tématem kaskáda vodních elektráren Gosau. Při řešení úloh využijí své matematické a fyzikální znalosti.

| **Základní informace o materiálu** | |
|---|---|
| Autor | Andreas Trappmair, Johanna Zöchbauer |
| Věk žáků | 9./10. ročník, matematika/fyzika |
| Časová dotace | 2 vyučovací hodiny |
| Materiály pro žáky | https://www.geogebra.org/m/qkzwbj2n |
| Spolupráce s podnikem | Energie AG |
| Zdroje | Výukový plán: https://www.geogebra.org/m/zp98ppkj<br>Řešení: https://www.geogebra.org/m/e9vuvyc9 |

*Zdroj: Energie AG*

### Požadované znalosti a dovednosti žáků

- Žáci vědí, jak jsou definovány fyzikální veličiny „energie, práce a výkon“, příp. v jakých jednotkách se tyto veličiny udávají.
- Žáci vědí, jak je fyzikálně definován pojem „účinnost“ a znají jeho význam jako relativně využitelné množství energie soustavy.
- Žáci umějí zacházet s různými veličinami (a jejich zkratkami) a umějí je správně převádět.
- Žáci umějí zjistit průměrné hodnoty.
- Žáci vědí, jak se určují hodnoty funkcí na základě grafu.
- Žáci vědí, jak lze pracovat se zadanými vzorci (dosazení, výpočet ve správných jednotkách).

### Získané dovednosti a znalosti

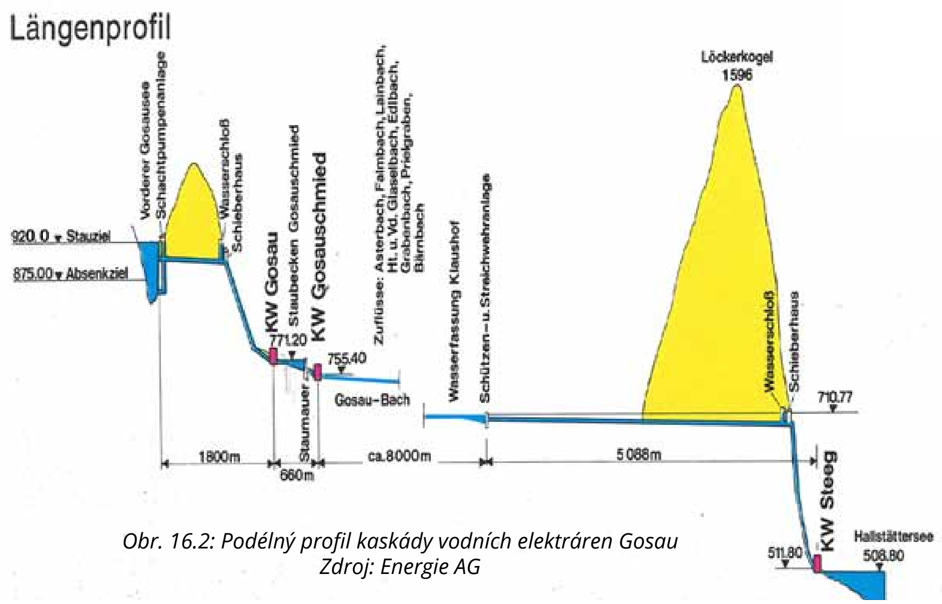
- Žáci umějí zkontrolovat své znalosti o fyzikálních veličinách „energie, práce, výkon a účinnost“.
- Žáci umějí odvodit alternativní vzorec pro potenciální energii a účinnost soustavy vodních děl.
- Žáci umějí z grafického vyjádření odečíst hodnoty funkcí a přiřadit jim správné jednotky.
- Žáci umějí dosazovat do vzorců a převádět jednotky.
- Žáci umějí interpretovat získané výsledky s ohledem na praktické souvislosti.
- Žáci umějí zjistit z grafu rozdíly v hodnotách funkcí.

### Průběh výuky

Nejprve jsou žáci seznámeni s obsahem výukové sekvence, rozdělí se do skupinek a je jim rozdáno zadání úloh.

*Obr. 16.1: Přední Gosausee, Zdroj: Energie AG*

Je možné také pohovořit o geografii kaskády v Gosau nebo o konstrukci vodní elektrárny (včetně turbíny).




*Obr. 16.2: Podélný profil kaskády vodních elektráren Gosau*
*Zdroj: Energie AG*

Dále je možno diskutovat o způsobu získávání energie vody ve vodní elektrárně a o její akumulaci.

## Aktivita 1

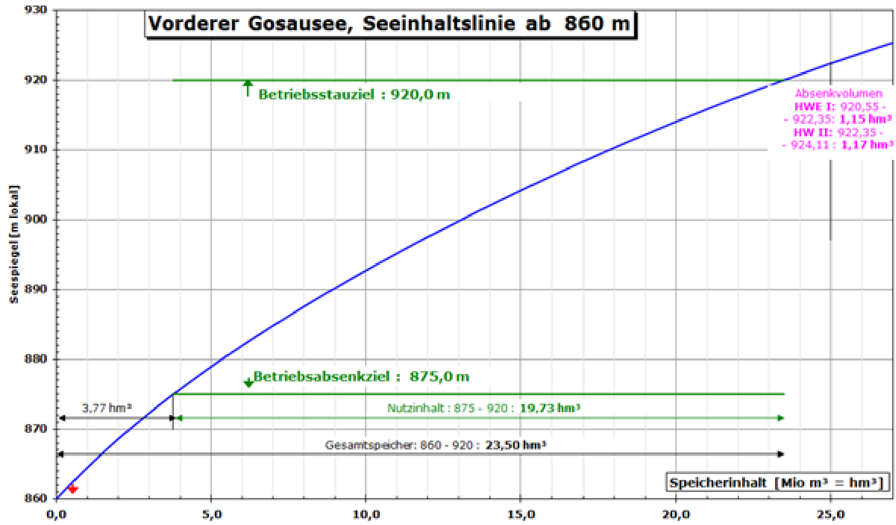
V úvodní části žáci odpovídají na obecné otázky k fyzikálním veličinám, které se budou používat později. Vyučující by měl v této fázi prověřit, zda žáci záležitostem rozumí.

## Aktivita 2

Ve druhém kole úloh mají skupiny za úkol najít přibližný vzorec pro energii přehrady v závislosti na čisté výšce spádu a na celkovém objemu využitelné vody. Vyučující může v tomto kroku žákům pomoci, například nápovědou jednotlivých kroků při odvozování vzorce.

## Aktivita 3

Žáci mají vypočítat potenciální energii Předního Gosausee vzhledem k jezeru Hallstättersee. Potřebné informace lze zjistit z grafu (viz Obr. 16.3).




*Obr. 16.3: Přední Gosausee, linie obsahu jezera od 860 m*

*Zdroj: Energie AG*

## Aktivita 4

V této úloze se má spočítat technický koeficient využití kaskády vodních elektráren. Referenční bod pro výšku a koeficient využití je dán, příp. se musí odečíst z grafu.

**V podstatě je třeba zpracovat dvě dílčí úlohy:**

1. Výpočet nevyužité výšky spádu a celkové výšky podél kaskády elektráren.

   Nevyužitou a rovněž celkovou výšku je možné snadno odečíst na základě označení výšek v grafu.

2. Výpočet technického koeficientu využití

   Pro výpočet technického koeficientu využití se musí zobrazit podíl vypočtený z nevyužité výšky spádu a celkové výšky spádu.

**Aktivita 5**

V úloze 5 se počítají výkony elektrárny při různých vodních proudech.

Hlavním úkolem je opět odečtení čisté výšky spádu z výše uvedeného grafu a dosazení správných jednotek do uvedeného vzorce.

Vyučující může v této fázi zasáhnout s podporou, např. jestliže nastanou problémy při zjišťování čisté výšky spádu.

Poznámka: Jestliže se při výuce nevyužije žádný kalkulátor, může se hodnota tíhového zrychlení *g* pro zjednodušení uvažovat jako 10 m/s$^2$.

*Obr. 16.4: Elektrárna Steeg, Zdroj: Energie AG*

**Aktivita 6**

V poslední úloze se vypočte střední vtok přiváděné vody, tedy celkové množství vody, které lze využít za jeden rok ve vodní elektrárně pro výrobu energie.

**Hlavní úkol se skládá ze dvou dílčích kroků:**

1. Přečtení čistých výšek spádu z uvedeného grafu a dosazení do uvedeného vzorce v správných jednotkách

   Vyučující může v této fázi zasahovat s podporou, např. když nastanou problémy při zjišťování čisté výšky.

2. Při převádění daného vzorce na správnou veličinu

   I zde může vyučující zasahovat jako podpora a kontrolovat správné převádění, takže následující příklady lze procvičovat s dosazováním jiných čísel.

### Pokyny pro učitele

Tento výukový plán je vhodný pro mezioborovou výuku pro předměty matematika a fyzika. Pokud se materiál používá pouze při matematice, je třeba dbát na to, aby žáci již byli seznámeni s používanými fyzikálními pojmy a s jejich definicemi a souvislostmi a aby uměli provádět příslušné výpočty.

Jednotlivé aktivity jsou nezávislé a nemusí se zpracovávat společně.

### Podrobné učební plány

Jednotlivé aktivity jsou k dispozici v GeoGebra knize Kraftwerksgruppe Gosau: https://ggbm.at/fahaavzv.

Plány ke všem aktivitám, včetně vzorového řešení, jsou uvedeny v knize: https://ggbm.at/h4zzszn8.

# 17. Přehrada Rannastausee

**Úvod**

V této učební jednotce se žáci zabývají úlohami kolem napouštění a vypouštění přehradní nádrže. Žáci vycházejí z apletu, který simuluje postup při natékání přehrady, a musí přitom sestavit diagramy toků, vypočítat dobu poklesu a sledovat vztah mezi změnou funkční hodnoty v závislosti na x a podobou argumentu funkce.

| **Základní informace o materiálu** | |
|---|---|
| Autor | Johanna Zöchbauer |
| Téma | Funkce (práce a množinou definic a hodnot), diagramy toků |
| Ročník, předmět | 8. ročník, matematika |
| Časová dotace | 1 vyučovací hodina |
| Materiály pro žáky | https://www.geogebra.org/m/mtkjxgjv |
| Spolupráce s podnikem | ENERGIE AG |
| Zdroje | Výukový plán: https://www.geogebra.org/m/kshwmmtp<br>Řešení: https://www.geogebra.org/m/abzdg34k |

*Zdroj: media.tourdata.at/file/responsiveDetailImg/e3350525dd1288a32e5b47fb01364987.JPG*

### Požadované znalosti a dovednosti žáků

- Žáci znají diagramy toků jako možnost znázornění dynamických soustav.
- Žáci vědí, jak přečíst hodnoty funkcí z daného grafu funkce.
- Žáci vědí, jak se počítají změny funkčních hodnot a jak se určují příslušné argumenty.
- Žáci umějí správně vzájemně přepočítávat časové jednotky.

### Získané dovednosti a znalosti

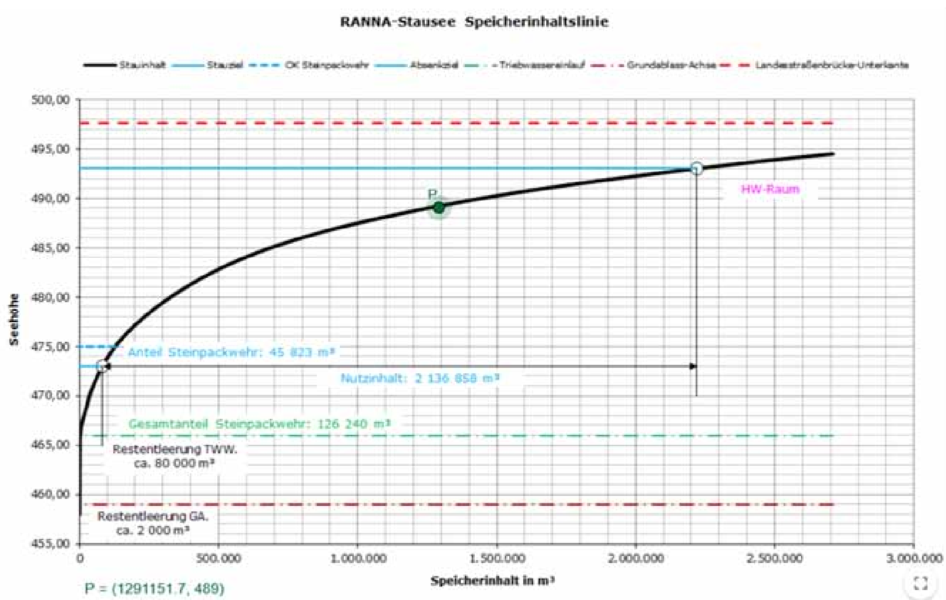
- Žáci umějí vypracovat k dynamickému procesu diagram toků (nebo jinou podobnou grafiku).
- Žáci umějí vypočítat změny funkčních hodnot na základě dat zadaného grafu.
- Žáci umějí interpretovat změny hodnot funkcí a příslušné argumenty ve věcném kontextu.

### Průběh výuky

Nejprve se společně probere průběh výukové sekvence a žáci obdrží odkaz k aktivitě. Na doplnění se může zmínit role společnosti ENERGIE AG jako dodavatele elektřiny v Rakousku.

Proberou se podklady, které vedly k vytvoření apletu (Obr. 17.1).

V následujících aktivitách vypracovávají žáci celkem čtyři zadání, která lze z větší části vyřešit s pomocí apletu z Obrázku 17.1.




*Obr. 17.1: Aplet*

### Aktivita 1

V první úloze se znázorní přítoky a odtoky přehrady vhodným grafem (např. diagram toků, viz Obr. 17.2). Zde nebude zapotřebí žádný další rozšiřující materiál.


*Obr. 17.2: Možný diagram toků*

### Aktivita 2

Ve druhé úloze se má vypočítat co možná nejkratší pokles v přehradě. Ten nastává tehdy, jestliže se kromě vypouštění vody navíc provádí v elektrárně turbínou ještě tak zvaná „spodní výpust“. Žáci musí ze zadání zjistit skutečná odtoková množství. Dále musí žáci nejprve určit množství přítokové vody pomocí apletu a tak zjistit čistý odtok vody.

Následně určí na základě grafiky celkové množství vypuštěné vody z rozdílu argumentů a vypočítají dobu, která se musí vynaložit pro tento proces poklesu. Je třeba dát na správné použití časových jednotek.

### Aktivita 3

Ve třetí úloze se má změnit užitný obsah přehrady úpravou normální hladiny příp. hladiny při poklesu. Užitný obsah přitom představuje obsah vody využitelný k technické výrobě elektřiny. Další odborné pojmy budou žákům vysvětleny během zadávání úlohy.

Žáci mají nejprve v apletu posouváním bodu zjistit nové výšky vody (kóty) k požadovanému užitnému obsahu. Následně na základě toho usoudí na příslušné funkční hodnoty a stanoví novou normální hladinu.

Ve druhé části úlohy, při určení nové hladiny poklesu, se kromě toho budou žáci učit interpretaci, protože požadovaných změn nelze dosáhnout pouze variací jedné veličiny (snížením hladiny poklesu).

### Aktivita 4

Dosavadní postupy jsou spojeny badatelsky orientovanou úlohou: Nejprve musí žáci usoudit ze změny funkčních hodnot v apletu na změnu argumentů (celkem vypuštěné množství vody) a následně argumentovat, zda lze toto množství vody zvládnout v daném čase. Zde je nutné dbát především na používání správných jednotek. Následně mají ještě žáci zjistit, jaký relativní podíl z celkového vypuštěného množství vody lze využít k realizaci energie.

Tento úkol se zpracuje pro dvě různé oblasti poklesu s tím, že druhou oblast poklesu nelze zvládnout v zadaném čase. Žáci si zde mají také zlepšit schopnost argumentace.

### Pokyny pro vyučujícího

V každém případě se doporučuje probrat používané pojmy se žáky hned na začátku vyučovací hodiny („normální hladina, hladina poklesu“, „kóta“, ...).

Aplet (Obr. 17.1) by měl být pro žáky snadný na ovládání. Přesto se doporučuje nacvičit podobné úkoly, které se týkají změny funkčních hodnot nebo argumentů, na jednoduchém kontextu.

V aktivitách, které používají aplet (Obr. 17.1), může dojít k nepatrným odchylkám v odečtu a tím i výsledků.

Zadané úlohy je možné zpracovat i bez použití apletu. Potom se doporučuje vytisknout diagram použitý v apletu pro všechny žáky ve stejné velikosti a přiložit jej k zadání.

# 18. Schodišťový výtah

**Úvod**

V této učební jednotce se žáci budou zabývat úlohami okolo pohybu osobního schodišťového výtahu. Pomocí apletu se simuluje pohyb výtahu kolem rohu. Následně mají žáci zodpovědět samostatně s pomocí apletu otázky na dráhu pohybu, rychlost ve vrcholových bodech platformy výtahu a dobu trvání pohybu.

| **Základní informace o materiálu** | |
|---|---|
| Autoři | Hubert Pöchtrager, Andreas Trappmair |
| Téma | Rychlost dráhy, úhlová rychlost, délka oblouku |
| Ročník, předmět | 8. ročník, matematika / fyzika |
| Časová dotace | 1 vyučovací hodina |
| Materiály pro žáky | https://www.geogebra.org/m/k9cr2xfc |
| Spolupráce s podnikem | Ganser Liftsysteme |
| Zdroje | Výukový plán: https://www.geogebra.org/m/uk6wkf9c<br>Řešení: https://www.geogebra.org/m/u4jjhamm |

*Zdroj: www.facebook.com/Ganser-Liftsysteme-1110747465634845/*

### Požadované znalosti a dovednosti žáků

- Žáci vědí, jak se spočítá délka kruhového oblouku.
- Žáci vědí, jak se spočítá průměrná rychlost.
- Žáci vědí, jak se pracuje s měřítky.
- Žáci umějí převádět vzorce a počítat s nimi.

### Získané dovednosti a znalosti

- Žáci umějí sledovat trajektorie různých bodů rotujícího obdélníku a zobrazit poloměry a délky těchto oblouků.
- Žáci umějí vypočítat a porovnat trajektorie.
- Žáci umějí interpretovat získané výsledky ohledně zadané maximální rychlosti.

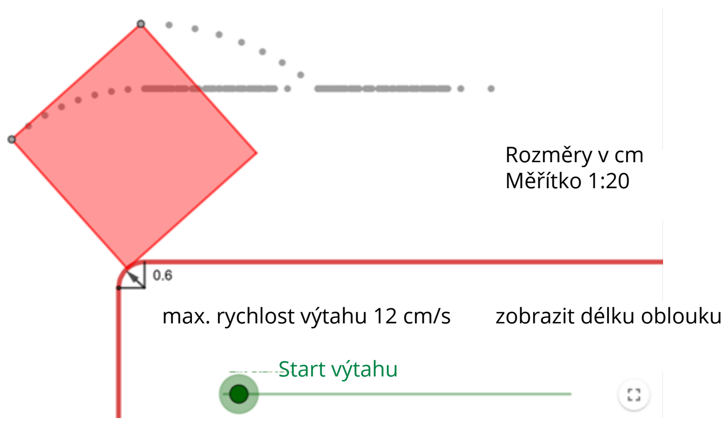
### Průběh výuky

Po krátkém rozhovoru o průběhu práce dostanou žáci odkaz k aktivitě. Před zadáním úlohy je možno stručně pohovořit o firmě GANSER. Než začnou žáci pracovat samostatně, hromadně se zopakuje nebo se nově probere, jak vznikají různé rychlosti a dráhy bodů tuhých těles při rotaci. Jestliže by žákům ještě chyběly základní znalosti o rotaci (např. z fyziky), doporučujeme naplánovat dodatečnou vyučovací hodinu za účelem probrání základů této látky.

### Aktivita 1

V první úloze mají žáci pozorovat a popsat pohyby různých vrcholů schodišťového výtahu pomocí apletu (viz obr. 18.1).

Žáci by přitom měli především dávat pozor na střed otáčení a poloměry při rotaci. Popis může být slovní a bez zvláštního ohledu na exaktní číselné hodnoty a rozměry.




*Obr. 18.1: Aplet k určení různých křivek drah*

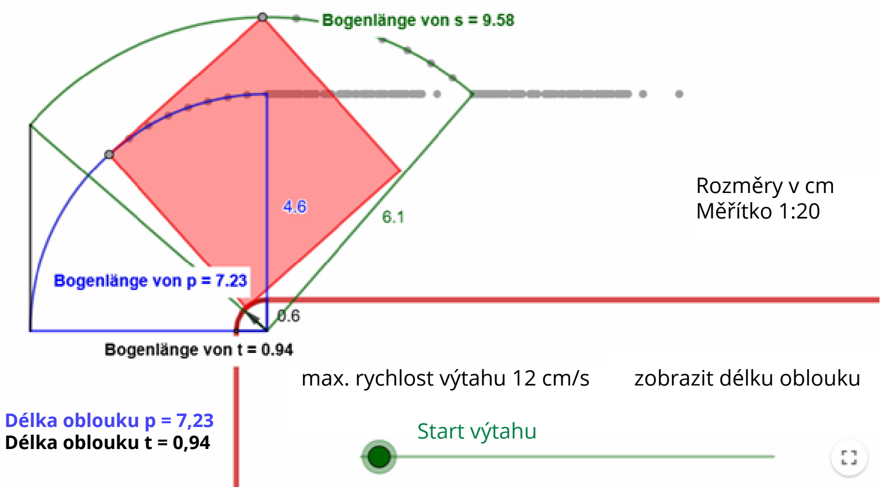
## Aktivita 2

Ve druhé úloze si mají žáci rozkliknutím kontrolního políčka zobrazit délky oblouků a poloměrů jednotlivých vrcholů a případně sami vypočítat délky oblouků (viz obr. 18.2).

Pomocí zadaného měřítka se následně vypočítají rychlosti jednotlivých vrcholů schodišťového výtahu při pohybu kolem rohu. Zde musí žáci vědět, v jakém vzájemném vztahu jsou spolu trasa, čas a rychlost.

Vyučující zde může žáky podporovat a hovořit s nimi o tom, na jaké vrcholy se musí konkrétně dát pozor, příp. jaké poloměry a délky oblouků se musí změřit příp. vypočítat.

Pomocí měřidla je kromě jiného možné – pokud to bude třeba – určit ještě další délky v apletu.




*Obr. 18.2: Zobrazení poloměrů a různých křivek drah*

## Aktivita 3

Ve třetí úloze mají žáci za pomoci jejich dosavadních výpočtů určit maximálně přípustnou rychlost pohybu schodišťového výtahu pohybujícího se kolem rohu.

Protože se vnější body pohybují výrazně rychleji než nejvnitřnější bod, musí se rychlost výtahu přizpůsobit tak, aby vyhověla požadavkům zadání.

Pro tuto úlohu již nebude aplet zapotřebí, je ale možno jej i nadále používat pro vizualizaci.

**Pokyny pro vyučujícího**

Jako možný úvod do tématu se nabízí také pozorovat případné schodišťové výtahy v budově školy a vyzkoušet je. Jako doplnění je možno pohovořit o významu a použití schodišťových výtahů v domovech pro seniory a zařízeních pro osoby se zdravotním postižením.

Jestliže žáci nenajdou žádný vhodný popis v aktivitě 1, může jim vyučující položit dodatečné orientační otázky:

- Jaký vrchol se pohybuje nejrychleji?
- Jakou dráhu body opisují?
- Jaký vrchol urazí kolem rohu nejdelší/nejkratší dráhu?
- ...

V aktivitě 2 může vést uvedené měřítko u některých žáků ke zmatení. Vyučující může podat vysvětlení, že uvedené délky odpovídají centimetrům v plánu a nežádoucím obtížím se lze případně vyhnout společným provedením vzorového výpočtu.

V tomto případě je rovněž možné provést mezioborové propojení s fyzikou. Tak lze například před nebo po vyučovací hodině matematiky hovořit při hodině fyziky o dostředivých silách nebo síle G při rotaci. Na téma může také navazovat diskuse o maximálních rychlostech rotace ohledně nastalého zrychlení nebo o možné únavě materiálu.

# 19. Simulace kurzů akcií

## Úvod

Tento učební blok je zaměřen na simulaci budoucích kurzů akcií. Nejprve mají žáci prozkoumat vývoj kurzu během jednoho dne a jednoho měsíce a z toho mohou vytvářet pravděpodobnostní předpovědi vývoje kurzu po 30 dnech. Dále se zkoumá vliv důležitých parametrů jedné akcie (trend a volatilita) na možný vývoj kurzu akcií.

| Základní informace o materiálu | |
|---|---|
| Autoři | Lucia Del Chicca, Edith Lindenbauer |
| Téma | simulace, finanční matematika |
| Ročník, předmět | 12. ročník, matematika |
| Časová dotace | 2-3 vyučovací hodiny |
| Materiály pro žáky | https://www.geogebra.org/m/g96yh9bb |
| Spolupráce s podnikem | Invest-Design |
| Zdroje | Výukový plán: https://www.geogebra.org/m/tjwgjv6t<br>Řešení: https://www.geogebra.org/m/p5aswv7m |

### Požadované znalosti a dovednosti žáků

- Žáci znají pojem náhodné veličiny diskrétního typu a diskrétní rozdělení.
- Žáci znají pojmy „očekávaná hodnota“ a „standardní odchylka“.
- Žáci znají pojem „normálně rozdělená náhodná veličina“.
- Žáci znají exponenciální funkci.
- Žáci mají zkušenost se zacházením s programem GeoGebra, především s nahlížením do tabulek.
- Žáci umějí odhadnout pravděpodobnosti založené na relativních četnostech.

### Získané dovednosti a znalosti

- Žáci umějí provádět simulace s GeoGebrou pomocí normálně rozdělených náhodných veličin.
- Žáci umějí simulovat možné budoucí kurzy akcií pomocí trendu a volatility.
- Žáci umějí popsat vliv trendu a volatility na vývoj kurzu akcií.
- Žáci umějí formulovat pravděpodobnostní výroky o vývoji kurzu akcií.

### Průběh výuky

Nejprve se společně probere průběh vyučovací sekvence a žáci dostanou odkaz ke knize GeoGebra. Vyjasní se problematika – simulace kurzů akcií. Přitom je možno zmínit se o firmě Invest-Design (viz „Úvod“ a „Problematika“).

## Aktivita 1

V pracovním listu „Finanční matematika (pojmy)“ proberou žáci společně s vyučujícím Vídeňský model kurzu akcií. Bude sdělen vzorec (viz Obr. 19.1) a následně se rozeberou a proberou jeho jednotlivé části.

$$S_1 = S_0 \cdot e^{\left(\mu \cdot \Delta t + W_1 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\Delta t}\right)}$$

*Obr. 19.1: Vzorec „Vídeňského modelu kurzu akcií“ pro výpočet možné hodnoty kurzu akcií v okamžiku t = 1*

$S_0$ ... kurz akcií v okamžiku $t = 0$
$S_1$ ... kurz akcií v okamžiku $t = 1$
$\mu$ ... výnosnost / trend
$\sigma$ ... volatilita výnosnosti akcií
$W_1$ ... normálně rozdělená náhodná veličina
$\Delta t$ ... sledovaný časový interval mezi 0 a 1

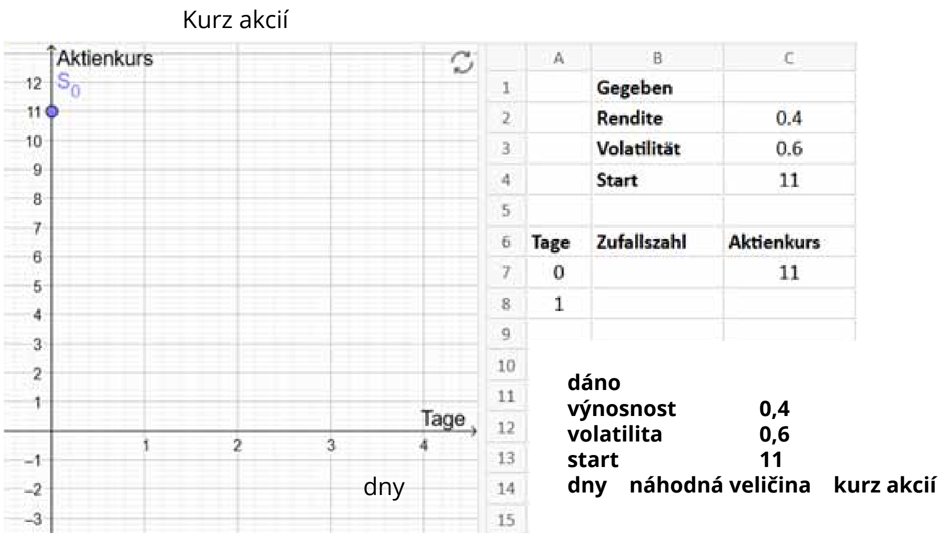
Podrobné vysvětlení pojmů a jejich souvislostí a rovněž Vídeňského modelu kurzu akcií je uvedeno v pracovním listu.

V závislosti na znalostech žáků lze tento model konfrontovat se stálým exponenciálním úročením nebo s exponenciálními procesy růstu.

### Aktivita 2

V úloze 1 mají žáci simulovat vývoj kurzu fiktivní akcie „Airport“ za jeden den. Přitom je dán trend a volatilita. Žáci mají vyřešit tento úkol pomocí GeoGebry. Pro tento účel jsou zde dvě varianty. Pracovní list „1 den – varianta A“ je o něco větší výzva: způsob řešení je zcela otevřený a není dána žádná pomoc. V pracovním listu „1 den - varianta B“ jsou již provedeny první kroky směřující k řešení (viz Obr. 19.2).

Obě hodnoty $S_0$ a $S_1$ se znázorní v okénku grafu. Žáci na závěr diskutují o různých výsledcích pro $S_1$.

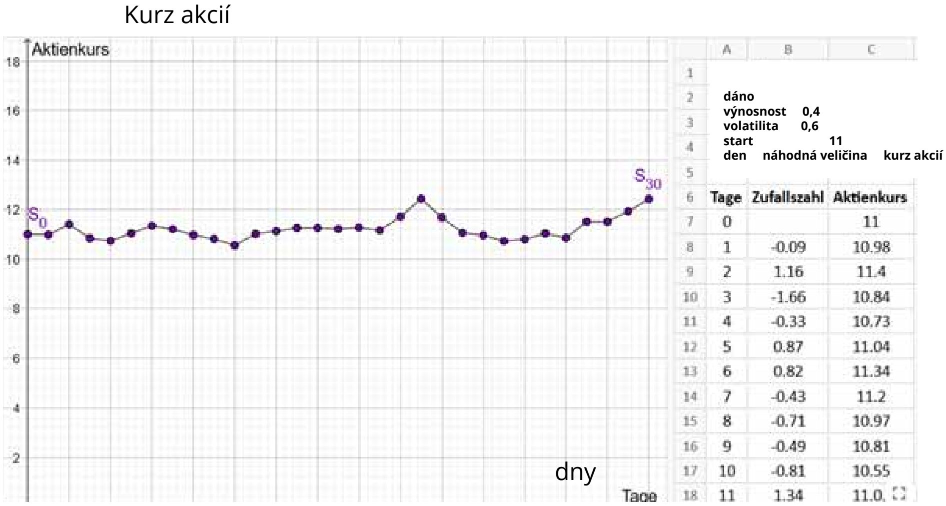



*Obr. 19.2: „1 den – varianta B“ s několika přednastavenými hodnotami prvků v tabulce a pokyny*

### Aktivita 3

Žáci vycházejí z úlohy 1 a jako úlohu 2 mají simulovat pomocí pracovního listu „1 měsíc“ vývoj kurzu fiktivní akcie „Airport“ na jeden měsíc, tzn. 30 dní. Takto se zjistit možný vývoj hodnot v průběhu těchto 30 dní. Trend a volatilita zůstávají přitom stejné jako v úloze 1.

Žáci mají vyřešit tuto úlohu pomocí programu GeoGebra (buď online v knize GeoGebra – zde byl připraven prázdný aplet – nebo offline). Všechny hodnoty ($S_0$, $S_1$, $S_2$ , ...) se mají zobrazit v okénku grafu a výsledky potom žáci porovnají a prodiskutují se svými kolegy. Možné řešení je znázorněno na Obr. 19.3.

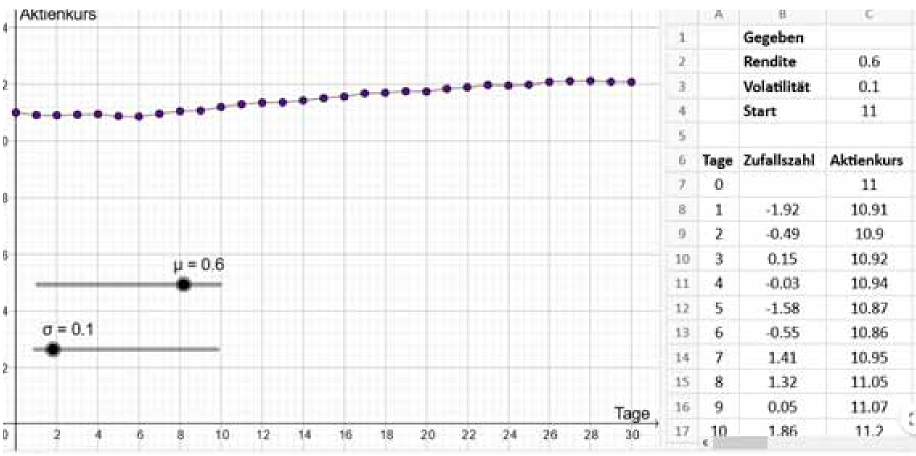



*Obr. 19.3: Vzorové řešení k aktivitě 3*

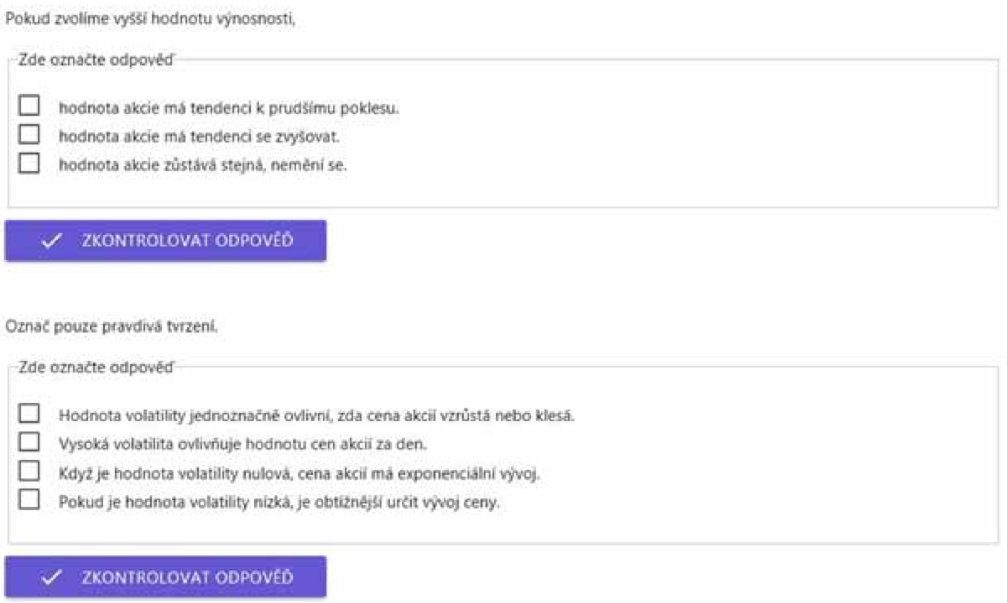
## Aktivita 4

V úloze 3 se nyní pomocí pracovního listu „Trend a volatilita“ zkoumá, jaký dopad má změna trendu a volatility na možný vývoj kurzu akcií. Zde je možno v návaznosti na úlohu 2 změnit zadání hodnot pro trend a volatilitu v okénku tabulky. V úloze 3 knihy GeoGebra lze zase měnit hodnoty trendu a volatility dynamicky posuvným regulátorem (viz Obr. 19.4). Tak mohou žáci snadno rozeznat, jaké dopady mají změny trendu a volatility na možný kurz akcií.

Na závěr žáci odpovídají na otázky multiple choice a porovnají a prodiskutují výsledky se svými spolužáky (viz Obr. 19.5). Pro správné odpovědi stiskněte odkaz na řešení.



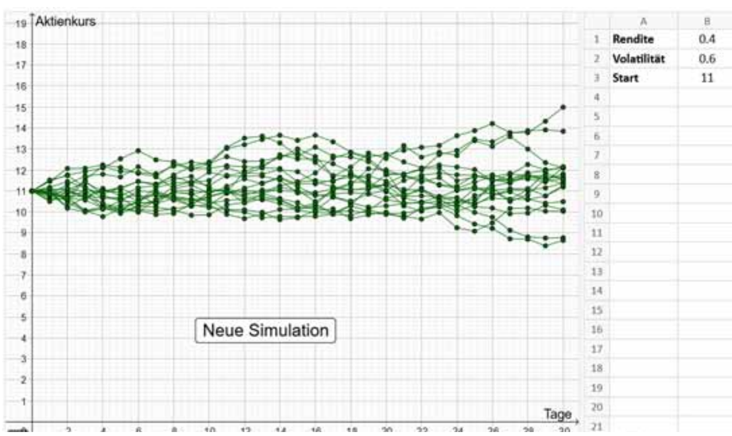

*Obr. 19.4: Pracovní list „Trend a volatilita“*




*Obr. 19.5: Úkoly multiple choice ohledně trendu a volatility*

### Aktivita 5

Úloha 4 vychází z úlohy 2: vytvořte nyní 20 možných vývojů kurzu akcií a znázorněte je v okénku grafu. Za tímto účelem jsou opět připraveny dvě různě odstupňované varianty, které je možno porovnat v pracovních listech „Porovnání několika simulací – varianta A“ a „Porovnání několika simulací – varianta B“. Ve variantě A mají žáci sami programovat pomocí programu GeoGebra, ve variantě B (viz Obr. 19.6) je již předpřipraven hotový pracovní list.




*Obr. 19.6: Varianta B s již připravenou simulací*

Využijte tyto simulace a odhadněte pravděpodobnost, se kterou bude kurz akcií po uplynutí jednoho měsíce mezi 11 a 13 body.

**Pokyny pro učitele**

Pokud žáci dostanou pouze odkaz k materiálům, výsledky se neuloží automaticky. Aby se údaje uložily, musí se materiály sdílet prostřednictvím skupiny GeoGebra.

Aby se u aktivity 5 mohl udělat přesnější odhad, je možno nashromáždit výsledky 20 simulací od všech žáků ze třídy. Potom se zjistí, kolik možných vývojů kurzu leží po uplynutí 1 měsíce mezi body 11 a 13 (např. jestliže mezi body 11 a 13 je 68 ze 400 simulací, byla by relativné častost 68/400 odhad pro hledanou pravděpodobnost).

# 20. Plnění zásobního sila

### Úvod

V tomto učebním bloku se žáci zabývají matematickým popisem plnění zásobního sila. Přitom mají nejprve ve dvojicích nebo jako samostatnou práci vytvořit funkci plnicí křivky. Na základě těchto výsledků se budou klást otázky ohledně momentální změny výšky plnění a bude se zjišťovat odebrané množství. Proběhne zkouška na téma funkční souvislosti v podobě zadání úlohy, podobně jako u každé standardizované maturitní zkoušky. Výukovou sekvenci doplní různé otázky na porozumění.

| **Základní informace o materiálu** | |
|---|---|
| Autoři | Tanja Wassermair |
| Téma | Funkce, momentální změna - nárůst |
| Ročník, předmět | 11. ročník, matematika |
| Časová dotace | 1-2 vyučovací hodiny |
| Materiály pro žáky | https://www.geogebra.org/m/peh5p5vf |
| Spolupráce s podnikem | Schaumann |
| Zdroje | Výukový plán: https://www.geogebra.org/m/mwu3rtdn |

*Zdroj: www.schaumann.at*

### Požadované znalosti a dovednosti žáků

- Žáci vědí, jak je definována funkce.
- Žáci umějí určit definiční obor funkce.
- Žáci znají odmocniny a lineární funkce.
- Žáci vědí, jak se vytvoří lineární funkce a funkce odmocniny pro popsanou modelovou situaci.
- Žáci vědí, jak se aplikuje stejnolehlost.
- Žáci vědí, jak se funkce odvodí početně a graficky.

### Získané dovednosti a znalosti

- Žáci umějí pomocí technologie (GeoGebra) vytvořit krabicový diagram – boxplot (použitím funkce ObdelnikovyDiagram).
- Žáci umějí interpretovat a zjistit statistické ukazatele v příslušném kontextu.
- Žáci umějí užívat vlastnosti aritmetického průměru a mediánu a umějí je správně aplikovat.

### Průběh výuky

V krátkém úvodu se probere průběh výukové sekvence. Žáci dostanou odkaz do knihy GeoGebra, který obsahuje zadání. Krátce se pohovoří o společnosti SCHAUMANN a objasní se téma úlohy – plnění sila a nalezení funkce plnění (viz „Úvod“).

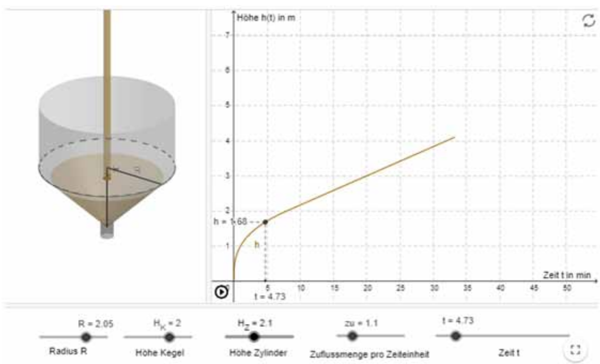
Alternativa je, že žáci byli v jedné z předchozích hodin vyzváni, aby se ve svém bezprostředním okolí porozhlédli po takovém silu a případně přinesli do školy jeho fotky.

Především ve venkovských oblastech jsou taková sila součástí panoramatu obce.

## Aktivita 1

V aktivitě „Křivka plnění sila“ pracují žáci s apletem (viz Obr. 20.1), kde je zobrazen model sila ve 3D. Na posuvné liště lze měnit rozměry sila a regulovat rychlost přísunu do tohoto sila. Na této animaci je možno schematicky sledovat proces plnění.

Ve druhém grafickém okénku se zobrazí graf funkce plnění. Je možno vzájemně porovnat animaci plnění a graf.




*Obr. 20.1: Aplet ke křivce plnění sila*

Následně se zodpoví otázky k funkčním závislostem. Otázky se přitom částečně vztahují na výše sledovanou křivku plnění. Kromě toho se pokusíme v jedné z těchto otázek žáky již nasměrovat na různé druhy složených funkcí.

### Aktivita 2

V aktivitě „funkce plnění sila" mají žáci nalézt a určit rovnici pro plnění. Za tímto účelem jim budou dány některé pokyny, jako například použití stejnolehlosti.

Žáci již při Aktivitě 1 přišli na to, že funkce plnění *h(t*) se skládá ze dvou funkcí: funkce odmocniny a lineární funkce. Proto by měli dostat i dvě funkce plnění – jednu pro kuželovitou část a jednu pro válcovou část sila. Podle toho se musí použít definiční obory dílčích funkcí.

Tyto úvahy se zkontrolují v apletu v otázkách s možností výběru odpovědi z více možností (multiple-choice).

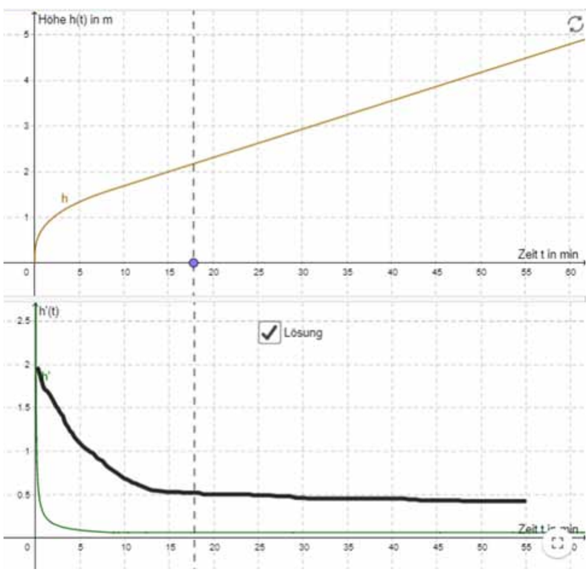
Nakonec se na základě zadaných rozměrů zobrazí funkce určitého sila.

### Aktivita 3

V této aktivitě se žáci zabývají momentální změnou funkcí plnění. Nejprve se graficky odvodí funkce plnění v apletu GeoGebra (viz Obr. 20.2).

Žáci přitom mají jednoduše použít psací potřeby v apletu a mají zakreslit do druhého grafického okénka možné grafické odvození dané funkce plnění.

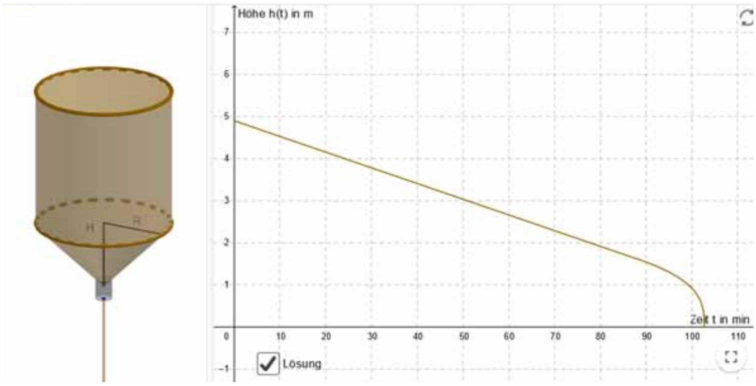
Následně se pomocí nástroje CAS z programu GeoGebra zkontroluje toto grafické odvození ve vlastním okénku. Je třeba interpretovat případné rozdíly (definovaných oblastí). Poté se položí interpretační a argumentační otázky k prvnímu odvozenému obrázku.




*Obr. 20.2: Aplet ke grafickému odvození se zobrazeným řešením*

### Aktivita 4

Sila se nejen plní, ale také se z nich odebírá určité množství suroviny pro výrobu. Žáci vyjdou ze znalostí získaných z předchozích úloh a v aktivitě „Křivka odtokového množství ze sila“ načrtnou graf možné funkce odtokového množství pro výše uvedené zásobní silo. Náčrt lze zkontrolovat pomocí postupně zobrazovaného řešení (viz Obr. 20.3).




*Obr. 20.3: Aplet pro načrtnutí možné funkce odtokového množství včetně řešení*

Poté se sleduje průběh křivky odtokového množství a zkontrolují se výpovědi ohledně této funkce, jsou-li správné.

### Dodatečná úloha – hranice modelu

Jako dodatek lze sledovat „hranice tohoto ideálního modelu“. Hlavní myšlenkovou osu představují tyto otázky:

- Jak se mění funkce plnění, je-li v silu ještě určité množství suroviny?
- Jaké dopady má skupenství suroviny na výšku plnění?

Po uvedení odpovědi mohou žáci stisknout políčko „Zkontrolovat odpověď“. Přitom se zobrazí správná odpověď, kterou žáci mohou porovnat se svou odpovědí.

### Pokyny pro učitele

Aby se mohla vytvořit funkce plnění *h(t)* v Aktivitě 2, potřebují žáci vzorce pro objem kužele a válce. V případě kužele se musí ještě navíc použít stejnolehlost.

Pomocí vzorce pro objem se zjistí funkce *V(t)*. Ta se pomocí vztahu *V(t)=Z*t* převede na *h(t)*.

Nejprve se sestaví funkce obecně s proměnnými *(R, HK, HZ, Z)*. Ve druhém kroku se sleduje konkrétní silo.

Řešení všech úloh se zobrazí v aktivitách, jakmile žáci kliknou na „Kontrola odpovědí“.

Pokyn pro použití programu GeoGebra:

Aby se do GeoGebry zadala 3. odmocnina, můžete použít tento příkaz: *ntaOdmocnina(x, n)*, přičemž *x* odpovídá diskriminantu.

# 21. Boxplot

## Úvod

V této vyučovací hodině mají žáci vytvořit krabicový diagram (boxplot) v apletu GeoGebra pomocí zadaných údajů ohledně výrobního množství různých krmiv pro prasata společnosti Schaumann a mají přečíst nejdůležitější statistické ukazatele. Žáci přitom mají interpretovat daný boxplot a najít správné příp. chybné výrazy. Formát úloh je zvolen podle standardizované maturitní zkoušky v Rakousku.

| **Základní informace o materiálu** | |
|---|---|
| Autoři | Carolin Kern |
| Téma | Popisná statistika, boxplot |
| Ročník, předmět | 8.-13. ročník, matematika |
| Časová dotace | 1 vyučovací hodina |
| Materiály pro žáky | https://www.geogebra.org/m/xts3zdgz |
| Spolupráce s podnikem | Schaumann |
| Zdroje | Výukový plán: https://www.geogebra.org/m/taefajuk<br>Řešení: https://www.geogebra.org/m/k35wfbb7 |


*Zdroj: www.schaumann.at*

**Požadované znalosti a dovednosti žáků**

- Žáci vědí, co je boxplot (krabicový diagram).
- Žáci vědí, jak z boxplotu odečíst minimum, maximum, medián a kvartily.

**Získané dovednosti a znalosti**

- Žáci umějí pomocí technologie (GeoGebra) vytvořit boxplot.
- Žáci umějí v aktuálním kontextu interpretovat ukazatele (medián, kvartily, rozpětí) a umějí je zjistit.
- Žáci umějí využít vlastnosti aritmetického průměru a mediánu a umějí je správně použít.

**Průběh výuky**

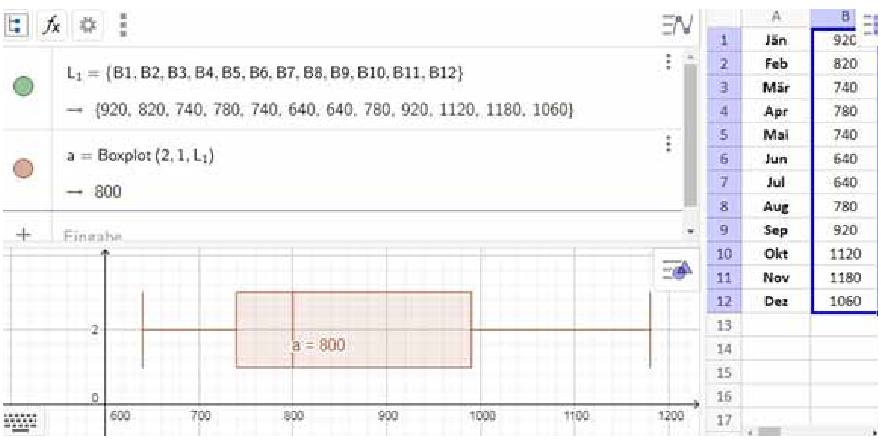
Na úvod se probere průběh vyučovací sekvence a žáci dostanou odkaz ke knize GeoGebra. Přitom je možno zmínit se krátce o zadání úkolů a o firmě SCHAUMANN (viz „Úvod: Setkání společnosti Schaumann“).

Společně se nejprve zopakuje nebo se v případě potřeby vyloží, jak se vytvoří boxplot pomocí technologie (GeoGebra). Přitom je možno jako podporu použít pracovní list „Jak sestavím boxplot?“.

Každý žák by měl mít k dispozici počítač, laptop nebo tablet.

## Aktivita 1

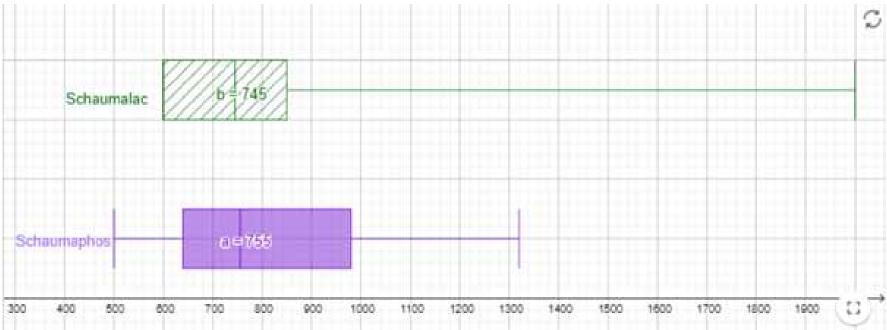
Žáci samostatně zpracují pracovní list „Tvorba diagramu: Setkání společnosti Schaumann“. Boxplot by měli vytvořit pomocí apletu z programu GeoGebra. Nejprve musí z daných údajů vytvořit seznam a následně krabicový diagram (viz Obr. 21.1). Potom žáci určí pomocí sestaveného boxplotu statistické ukazatele (medián, kvartily, rozpětí) a doplní výrok v rámci otázky na pochopení.




*Obr. 21.1: Řešení aktivity 1*

### Aktivita 2

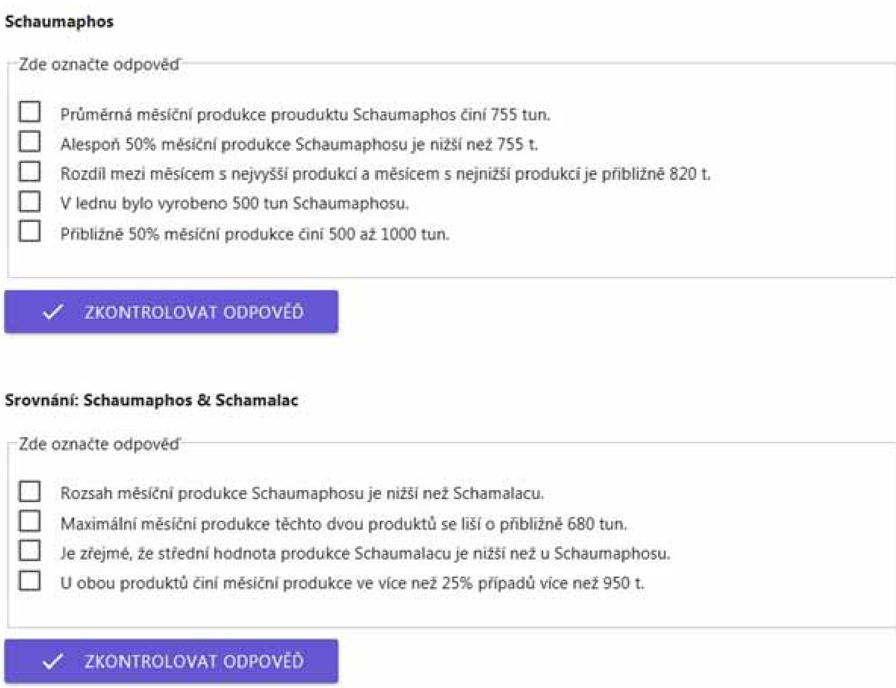
V pracovním listu „Interpretace diagramu: Produkce“ mají žáci porovnat krabicové diagramy výrobních čísel dvou různých produktů (viz Obr. 21.2).




*Obr. 21.2: Interpretace boxplotu*

Přitom se nejprve zkontroluje, jsou-li výroky ke znázorněným údajům správně.

Následně se oba boxploty vzájemně porovnají. Zde jsou rovněž výroky, které jsou buď pravdivé nebo nepravdivé, a podle toho se musí zakřížkovat (viz Obr. 21.3).



**Schaumaphos**

Zde označte odpověď

- [ ] Průměrná měsíční produkce prouduktu Schaumaphos činí 755 tun.
- [ ] Alespoň 50% měsíční produkce Schaumaphosu je nižší než 755 t.
- [ ] Rozdíl mezi měsícem s nejvyšší produkcí a měsícem s nejnižší produkcí je přibližně 820 t.
- [ ] V lednu bylo vyrobeno 500 tun Schaumaphosu.
- [ ] Přibližně 50% měsíční produkce činí 500 až 1000 tun.

ZKONTROLOVAT ODPOVĚĎ

**Srovnání: Schaumaphos & Schamalac**

Zde označte odpověď

- [ ] Rozsah měsíční produkce Schaumaphosu je nižší než Schamalacu.
- [ ] Maximální měsíční produkce těchto dvou produktů se liší o přibližně 680 tun.
- [ ] Je zřejmé, že střední hodnota produkce Schaumalacu je nižší než u Schaumaphosu.
- [ ] U obou produktů činí měsíční produkce ve více než 25% případů více než 950 t.

ZKONTROLOVAT ODPOVĚĎ

*Obr. 21.3: Otázky multiple choice - interpretace boxplotů*

V dodatečné otázce mají žáci zodpovědět, jak lze vysvětlit velký rozdíl mezi mediánem a průměrem produktu Schaumalac. Ve své odpovědi by měli objasnit, že aritmetický průměr citlivě reaguje na odlehlé hodnoty (extrémně odchylné hodnoty). Medián je naproti tomu vůči odlehlým hodnotám robustní.

**Pokyny pro učitele**

Poté, co se žáci v této vyučovací sekvenci naučí, jak se pomocí GeoGebry vytvářejí boxploty, mohli by (za domácí úkol) dostat podobné příklady. Přitom mohou pracovat buď opět se zadanými údaji nebo budou mít za úkol sami sehnat údaje k určitému zadání a odpověď formulovat v podobě boxplotu.

Příklady:

- Znázorni veličinu deseti osob z okruhu tvých známých pomocí boxplotu.
- Vytvoř boxplot, který zobrazuje počet chlapců nebo dívek ve všech třídách naší školy.
- Vymysli matematickou úlohu a dej ji vyřešit alespoň deseti osobám. Zapiš si dobu, kterou k tomu budou potřebovat, a vytvoř boxplot na základě shromážděných údajů.

Jako variantu mohou žáci také shromáždit údaje k různým tématům a prezentovat je v malých skupinách.

# 22. Inventura

## Úvod

V tomto učebním bloku se žáci zabývají vyhodnocením diagramů. Za tímto účelem musíte určit určité statistické veličiny (průměr, minimum, maximum). K tomu lze použít tabulkovou kalkulaci. Dodatečně je třeba nalézt odpovědi na otázky, s nimiž jsou v realitě konfrontovány i průmyslové podniky.

| **Základní informace o materiálu** | |
|---|---|
| Autoři | Tanja Wassermair |
| Téma | statistika, průměr |
| Ročník, předmět | od 6. ročníku, matematika |
| Časová dotace | 1-2 vyučovací hodiny |
| Materiály pro žáky | https://www.geogebra.org/m/ru9eqvrg |
| Spolupráce s podnikem | Schaumann |
| Zdroje | Výukový plán: https://www.geogebra.org/m/jkm5emu2<br>Lösungen: https://www.geogebra.org/m/apaquqr6 |

*Zdroj: www.schaumann.at*

### Požadované znalosti a dovednosti žáků

- Žáci vědí, jak získat data z diagramu.
- Žáci vědí, jak se počítá aritmetický průměr.
- Žáci vědí, jak se určí minimum a maximum seznamu dat.
- Žáci vědí, jak se počítá procentuální podíl.
- Žáci vědí, jak se převádějí měrné jednotky.

### Získané dovednosti a znalosti

- Žáci umějí odečíst a vyhodnotit data z diagramů.
- Žáci umějí vyřešit aplikované úlohy na téma statistika.
- Žáci umějí vyřešit úlohy podle tabulkové kalkulace.

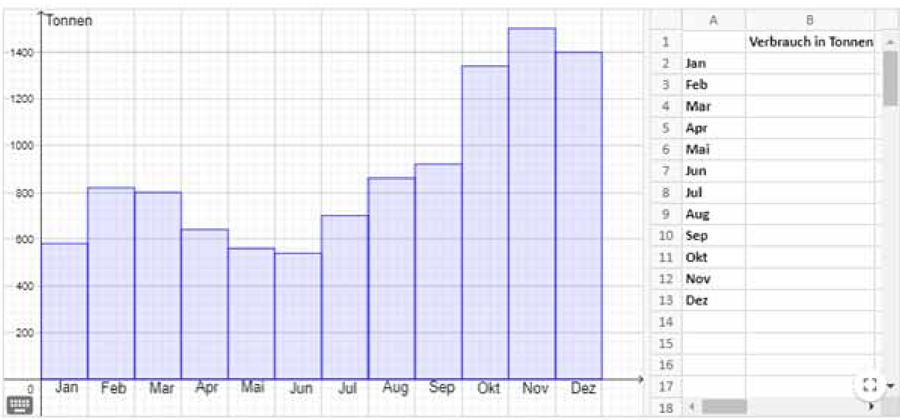
### Průběh výuky

Na začátku se společně probere postup výukové sekvence a žákům se rozdají materiály. Objasní se téma. Během toho je možno zmínit se o společnosti SCHAUMANN (viz „Úvod: Inventura“). Přitom lze pohovořit i o inventuře, jejímu průběhu a důležitosti.

## Aktivita 1

Žáci pracují samostatně na pracovním listu „Inventura: množství nákup“. Přitom mají přečíst z diagramu důležitá statistická data (jako maximum a minimum) příp. vypočítat aritmetický průměr a celkové nakoupené množství (viz Obr. 22.1). Výpočet může proběhnout i podle tabulkové kalkulace, jež je součástí apletu GeoGebra.

Dále mají žáci uvažovat nad tím, zda na základě nakoupených množství lze vytvořit i domněnku příp. určit výrobní množství.

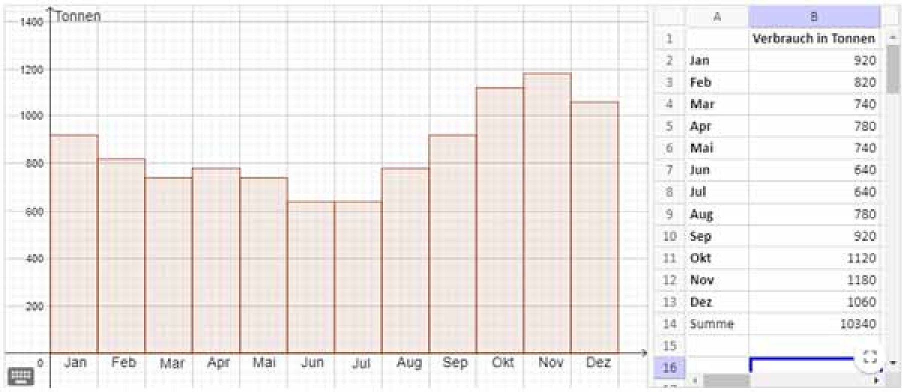



*Obr. 22.1: Diagram nákup*

Následně se ještě přímo v aktivitě pokládají otázky k diagramu a jeho interpretaci.

### Aktivita 2

Žáci musí zodpovědět podobné otázky v pracovním listě „Inventura: Množství suroviny“ jako v předchozí aktivitě. Tentokrát se ale budou sledovat výrobní množství suroviny. V diagramu lze odečíst měsíční výrobní množství a ta se zapíší do vedlejší tabulky. Pomocí tabulkové kalkulace lze potom rychle vypočítat celkové množství. Obrázek 22.2 ukazuje aplet včetně řešení.




*Obr. 22.2: Diagram Výroba včetně řešení*

Stejně jako v Aktivitě 1 se následně budou pokládat otázky ohledně tabulkové kalkulace, při kterých žáci budou muset interpretovat jejich získané výsledky.

### Aktivita 3

Poté co žáci vypočítali, kolik suroviny se nakoupilo příp. spotřebovalo, se nyní budou zabývat „plánovaný stavem“ a „skutečným stavem“. Dodatečné informace k tomu obdrží v pracovním listu „Inventura: Plán a skutečný stav“, aby bylo možno vypočítat PLÁNOVANÝ STAV. SKUTEČNÝ STAV bude zadán.

Žáci dále budou počítat rozdíl mezi PLÁNEM a SKUTEČNÝM STAVEM a určí s tím spojené náklady vzniklé firmě.

Na závěr je zapotřebí přemýšlet o otázce, v čem by mohly spočívat důvody pro rozdíl mezi PLÁNEM a SKUTEČNÝM STAVEM.

**Přitom je možné pojmenovat a prodiskutovat například tyto důvody:**

- Chybná dokumentace nakoupeného/vyrobeného množství
- Chybné provedení inventurního měření
- Zbytky/ztráty suroviny ve výrobních strojích
- Chybná dodávka zaviněná přepravcem
- Ztráta suroviny při výrobě (např. roztržení pytlů hotových produktů apod.)
- „Nadváha" některých pytlů, (podle údajů má být v pytli např. 50 kg, ve skutečnosti je to ale 50,1 kg).
- apod.

**Pokyny pro učitele**

Doporučuje se sdílet tuto úlohu přes skupinu GeoGebra, protože pouze tímto způsobem lze uložit výsledky a zadání. Pokud se nebude pracovat se skupinou GeoGebra, je důležité upozornit žáky na to, že výsledky musí zapsat písemně, protože úlohy na sebe navazují a při práci se musí vycházet z výsledků předchozích pracovních listů.

**V následné diskusi se můžete dotknout různých otázek:**

- Jak důležité je pro firmu, aby věděla, kdy nastává výrobní maximum či minimum? Je možno z toho vyvodit závěry pro další objednávky /výrobu / roky ...?
- Lze z diagramu vyčíst, kdy je nejvíce „stresové" období v roce?
- V listopadu nebo v prosinci v příštím roce si chce vícero zaměstnanců vybrat týden dovolené. Je pro firmu dobré, jestliže si vícero zaměstnanců vezme dovolenou v této době? Jak to vypadá s klasickou dobou pro dovolenou v létě?
- V čem mohou spočívat možné důvody pro rozdíly mezi PLÁNOVANÝM a SKUTEČNÝM STAVEM? Byla inventura provedena špatně? Byly chybně zadokumentovány nákupní a výrobní množství? Nebo lze vysvětlit ztráty suroviny i jinak (např. zbytky ve strojích, chybná výroba, která se musela provést znovu...)?

# 23. Zásobní silo

## Úvod

V tomto učebním bloku pracují žáci ve dvou fázích na zadání, týkajícím se množství materiálu a měření stavu plnění zásobního sila. V první fázi staví žáci model sila ve stylu „FLEX“ úlohy a přemýšlí ve skupinách o různých možnostech ohledně měření stavu plnění. Ve druhé fázi zpracovávají žáci různé pracovní listy GeoGebra a úkoly na téma modelových a reálných zásobních sil firmy SCHAUMANN.

| **Základní informace o materiálu** | |
|---|---|
| Autoři | Tanja Wassermair, Johanna Zöchbauer |
| Téma | střední hodnota |
| Ročník, předmět | od 6. ročníku, matematika |
| Časová dotace | 2 vyučovací hodiny |
| Materiály pro žáky | https://www.geogebra.org/m/g7n5p4vv<br>FLEX materiály (viz aktivita 1) |
| Spolupráce s podnikem | Schaumann |
| Zdroje | Výukový plán: https://www.geogebra.org/m/xj2n6gkw<br>Řešení: https://www.geogebra.org/m/hpbcenxw |

*Zdroj: www.schaumann.at*

**Požadované znalosti a dovednosti žáků**

- Žáci vědí, jak se počítá střední hodnota.
- Žáci vědí, jak se počítá objem válce a kužele.
- Žáci vědí, jak lze převádět prostorové a duté míry.
- Žáci umějí vyřešit úlohy na téma hustota, hmotnost a objem.
- Žáci vědí, jak se pomocí Pythagorovy věty vypočte délka odvěsny.

**Získané dovednosti a znalosti**

- Žáci budou umět vyřešit aplikované úlohy na výpočet objemu.
- Žáci budou umět vyvinout model o zadaných parametrech a vyřešit s tím spojené úlohy.
- Žáci budou umět přečíst relevantní údaje z grafu.

**Průběh výuky**

Na začátku se společně probere průběh vyučovací sekvence a žákům se rozdají materiály. V případě potřeby je možno přesněji vysvětlit téma jednotlivých aktivit. Přitom je možno krátce zmínit tuto problematiku ve firmě SCHAUMANN (viz „Úvod: Zásobní silo“). Kromě toho se žáci rozdělí do skupin pro fázi FLEX a pro pozdější pracovní fáze.

## Aktivita 1

V první fázi mají žáci za úkol ve stylu úloh FLEX vytvořit model zásobního sila se zadanými materiály. Zadané materiály se ale nemusí využít všechny, jenom se nesmějí použít žádné další.

Učitel dá k dispozici tyto materiály (viz „Řešení FLEX“): krabice / kartony, stuhy, pravítko nebo měřicí pásmo, plnidlo (např. polystyren – balicí materiál), nůžky, lepicí pásku.

Navíc je možno nabídnout i jiné materiály, jako korek, kovový drát, mince, motouz, gumové kroužky, ....

Žáci poté ve svých skupinách absolvují všechny fáze metody řešení problému FLEX.

### Úlohy FLEX jsou rozděleny do čtyř jasně vymezených fází:

**1. Kreativní přemýšlivá fáze**

Žáci sbírají ve skupině všechny možné nápady, jak použít poskytnuté materiály, aby splnili zadání úkolu.

**2. Rozhodovací fáze**

Žáci načrtnou svůj nápad s nejlepší perspektivou a shodnou se ve skupině na jeho realizaci.

**3. Experimentální fáze**

Žáci realizují co možná nejvíce ze svých naplánovaných nápadů a zapíšou si jejich výsledky pro budoucí diskusi ve třídě.

**4. Prezentace a diskuse**

Jednotlivé skupiny prezentují své nápady v plénu a vstupují do diskuse.

Následně po ukončení těchto čtyř fází se žáci ještě zamyslí nad tím, jak mohou pomocí svého modelu určit stav naplnění materiálem. Jednu z možných metod najdou v „Řešení FLEX“, která je znázorněná na Obrázku 23.1.

*Obr. 23.1: Možný model sila včetně možné metody měření*

Přitom je důležité, aby žáci nebyli ve své práci ovlivňováni. Učitel jim zde tedy ještě nevysvětluje metody měření, používané pracovníky společnosti SCHAUMANN. To učitel provede až v dalším pracovním kroku, kdy to s žáky probere a prodiskutuje.

Následně žáci pracují opět ve skupinách nebo samostatně a provádějí aktivity s využitím GeoGebry ohledně měření stavu plnění.

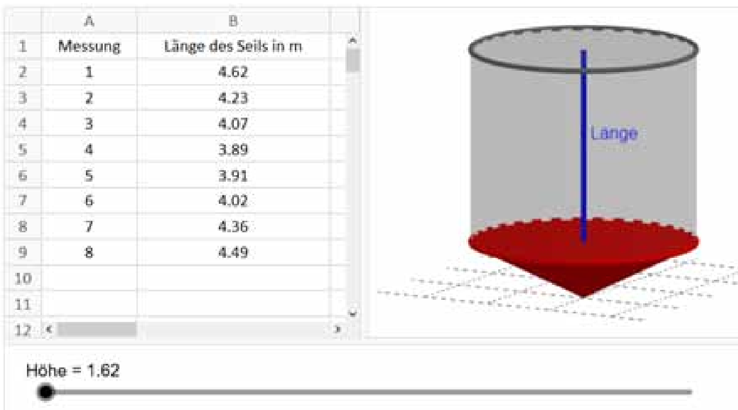
### Aktivita 2

V této aktivitě mají žáci vypočítat průměrné výšky stavu naplnění modelového zásobního sila.

Na úvod této aktivity se doporučuje, aby se žákům ve třídě vysvětlila metoda měření stavů plnění sila používaná pracovníky společnosti SCHAUMANN:

pracovníci měří výšku hladiny pomocí olovnice, několikrát změří délku lana od horního konce sila do hladiny materiálu a následně se vypočte střední hodnota tohoto změřeného stavu.

V této aktivitě „Určit výšku" je v tabulce uvedeno několik výšek stavu plnění. Pro lepší vizualizaci je kromě toho uveden trojrozměrný model zásobního sila, u něhož lze měnit pomocí posuvníku výšku hladiny materiálu (viz Obr. 23.2). Tento model slouží pouze pro lepší prostorovou představu, hodnoty údajů v tabulce zůstávají i při změněných stavech plnění stejné.



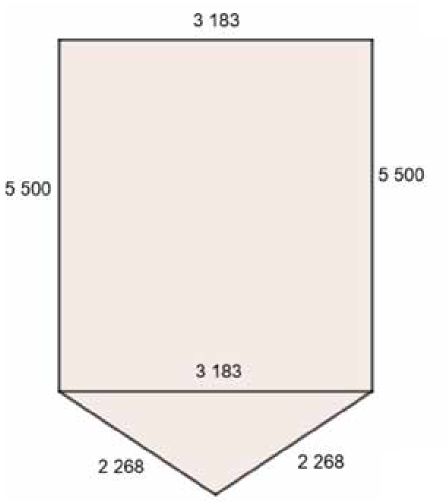

*Obr. 23.2: Aplet pro výpočet průměrných výšek plnění*

Následně se budou pokládat otázky vyplývající z tohoto apletu ohledně průměrné výšky lana a stavu plnění. Navíc se položí doplňující otázky na téma (ne)rovnoměrného rozdělení suroviny v silu v závislosti na jeho skupenství.

### Aktivita 3

Následující aktivita umožní vnitřní diferenciaci ve třídě. Cílem je provést výpočet objemu reálného zásobního sila. V obou případech se objem sila vypočte pomocí vzorce na objem válce a kužele.

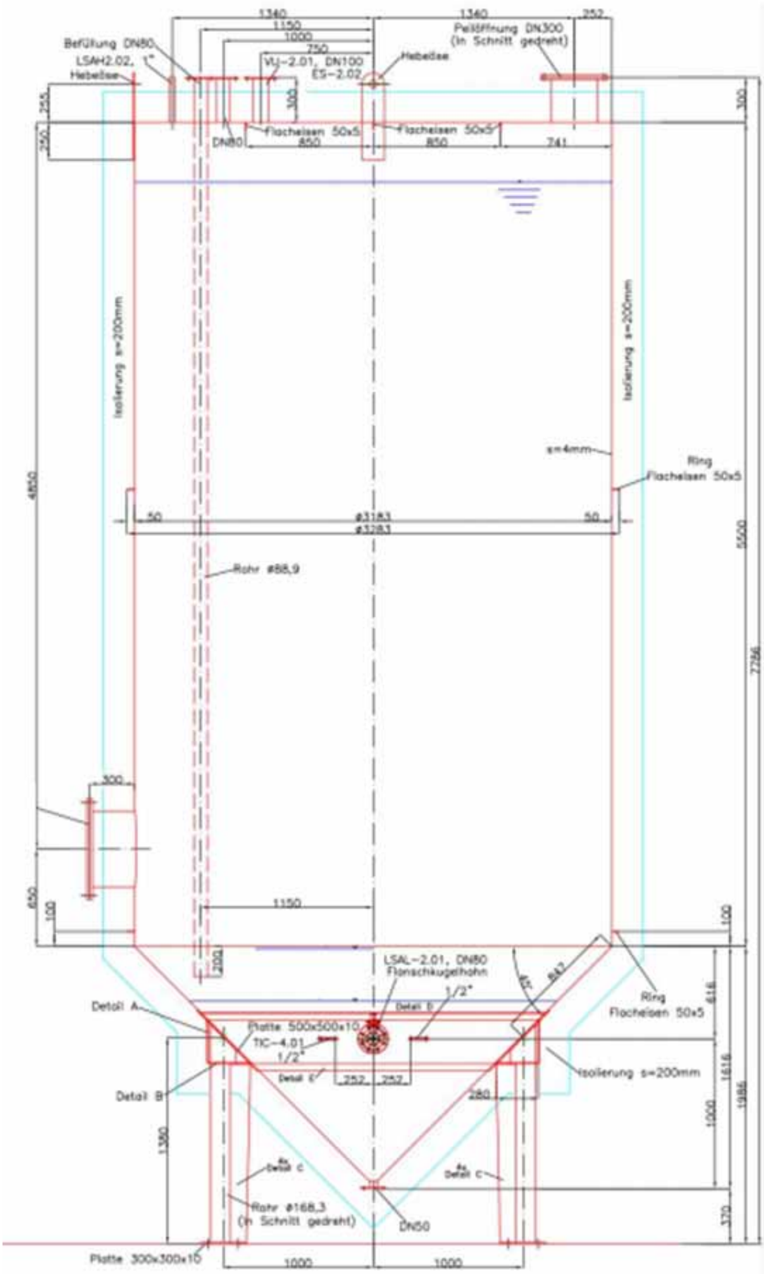
V případě „Objem sila 1" uvidí žáci popsaný příčný řez modelového sila (viz Obr. 23.3). Jeho rozměry lze snadno zjistit. Dále jsou znázorněny rozdílné obrazce příčného řezu, což usnadňuje výpočet objemu.




*Obr. 23.3: Výkres modelu sila v „Objem sila 1“*

Na základě tohoto příčného řezu se budou klást otázky na objem a množství materiálu v silu.

V případě „Objem sila 2“ uvidí žáci stavební plán reálného zásobního sila včetně všech popisů (viz Obr. 23.4).




*Obr. 23.4: Originální výkres zásobního sila*

Množství různých rozměrů a odborných pojmů na plánu působí na první pohled nepřehledně a zmateně.

Toto zadání je proto zamýšleno pro žáky, kteří již jsou schopni své úvahy dostatečně zaměřit na určité řešení a umějí již samostatně vyfiltrovat z kontextu důležité informace.

### Aktivita 4

V následující aktivitě „Množství suroviny“ vyzvěte žáky, aby zpracovali další zadání ohledně množství surovin v silu.

Přitom se jako příklad vezme surovina „vápenná drť“. Pomocí výsledků z posledních pracovních kroků a uvedené hustoty suroviny se vypočtou různé úlohy ohledně množství suroviny. Výsledky se mohou – pokud se používají skupiny GeoGebra – přímo zadávat do apletu.

V každém případě se ale doporučuje pro pozdější porovnatelnost výsledků zaznamenat dosažené výsledky na papír.

**Pokyny pro učitele**

Podrobné informace ke konceptu fází flex naleznete zde:

www.expedition-flex.at

Pracovní fáze flex by se měla uzavřít nejpozději po první vyučovací jednotce. Není-li k dispozici tolik času, může se tato fáze zkrátit i tak, že učitel přinese s sebou do hodiny hotový model sila a diskutuje se pouze o možnostech měření stavu materiálu. Zde se ale opět doporučuje, podle konceptu flex, rozdělit žáky do malých skupin nechat je hledat možnosti řešení samostatně.

V modelu „FLEX: Model sila“ jsou jednotlivé pracovní kroky pro skupiny žáků ještě jednou vysvětleny krok za krokem a jsou doprovázeny příkladem časových údajů.

Chtějí-li žáci své nápady nashromáždit a uložit si své odpovědi, doporučuje se použít skupiny GeoGebra nebo upozornit žáky na to, aby paralelně k apletu ještě zapisovali své výsledky a nápady na papír.

Diskuse a sběr nápadů lze provádět ještě na závěr podle času.

Plán z aktivity „Objem sila 2“ je třeba vytisknout předem na velikost minimálně A4, aby se slabě označené rozměry daly dobře přečíst.

# 24. Vyhlídková plošina

**Úvod**

V této vyučovací jednotce provádějí žáci samostatně nebo ve dvojicích výpočty obsahu a obvodu mezikruží. Úlohy v příslušné GeoGebra knize (odkaz viz tabulka níže) se vztahují ke sklářské firmě WENNA GLAS.

| **Základní informace o materiálu** | |
|---|---|
| Autor | Andreas Lindner, Sandra Reichenberger |
| Téma | výpočty na mezikruží |
| Ročník, předmět | 8. ročník, matematika |
| Časová dotace | 1 vyučovací hodina |
| Materiály pro žáky | https://www.geogebra.org/m/dxzpnrrg |
| Spolupráce s podnikem | WENNA Glas |
| Zdroje | Plán výuky: https://www.geogebra.org/m/ztcfj2qn<br>Řešení: https://www.geogebra.org/m/uxtxzdgc |

*Zdroj: https://www.flickr.com/photos/wennaglas/*

**Požadované znalosti a dovednosti žáků**

- Žáci vědí, jak se počítá obvod kruhu a mezikruží.
- Žáci umějí vypočítat procentovou část.
- Žáci umějí vypočítat obsah pláště válce.
- Žáci vědí, jak se vypočítá obvod kruhové výseče.

**Získané dovednosti a znalosti**

- Žáci budou umět použít již známé vzorce pro obsah a obvod mezikruží v konkrétní každodenní situaci.
- Žáci budou umět popsat souvislosti mezi obsahem a poloměrem kruhu.

## 9.1. Průběh výuky

V této vyučovací jednotce mají všichni žáci k dispozici laptop nebo tablet. Není-li možné, aby všichni žáci měli svůj vlastní přístroj, mělo by být dodrženo alespoň to, že jeden přístroj sdílejí maximálně čtyři žáci. V takovém případě se doporučuje vytisknout pracovní listy.

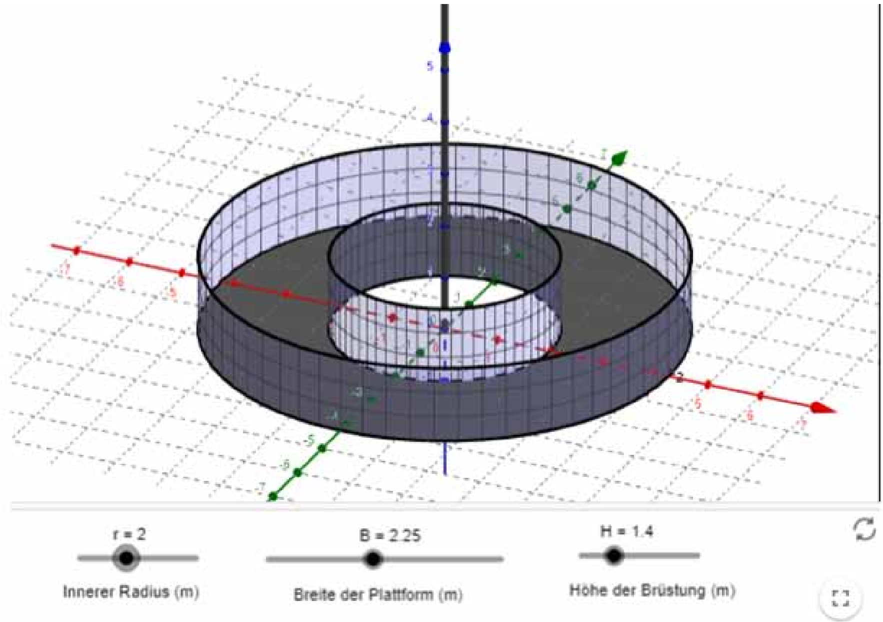
Na úvod se společně probere průběh hodiny a objasní se zadání úkolu – stavby vyhlídkové plošiny. Vyučující přitom také zmíní společnost WENNA GLAS a pohovoří o ohýbaném sklu, jehož výrobou se společnost zabývá (viz „Úvod“). V případě potřeby se ještě krátce zopakují potřebné vzorce.

### Aktivita 1

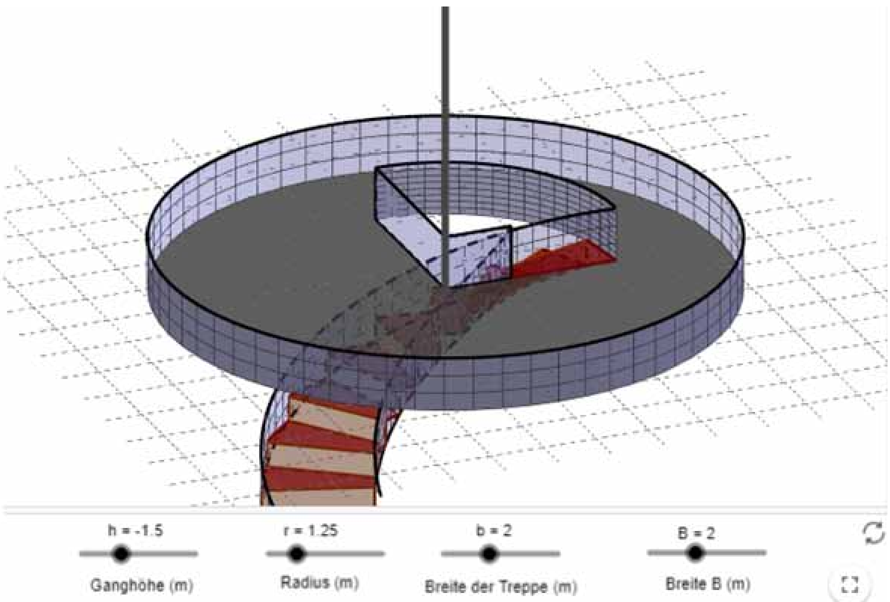
Žáci samostatně na počítači nebo tabletu zpracovávají první zadání. To je rozděleno na povinnou a rozšiřující úlohu. V povinné úloze „Ohýbané sklo“ mají žáci za úkol vypočítat spotřebu materiálu pro skleněné zábradlí vyhlídkové plošiny. Pro vizualizaci se použije aplet GeoGebra (viz Obr. 24.1). Dále žáci vypočítají procentuální změnu spotřeby skla při změně výšky zábradlí. Výsledky zapíší písemně.

V apletu mohou žáci měnit vnitřní poloměr plošiny, její šířku a výšku zábradlí. Přitom sledují, jak se vyhlídková plošina mění dle prováděných změn těchto rozměrů.

Rozšiřující úloha „Plošina s točitým schodištěm“ je prohloubením předchozího zadání. Žáci musí opět vypočítat obsah skleněného zábradlí, ale navíc musí zohlednit, že na plošinu vede i točité schodiště. Spotřeba skla pro výrobu samotného schodiště se nebude uvažovat. Úloha je ilustrována GeoGebra apletem (viz Obr. 24.2).




*Obr. 24.1: Vizualizace vyhlídkové plošiny*

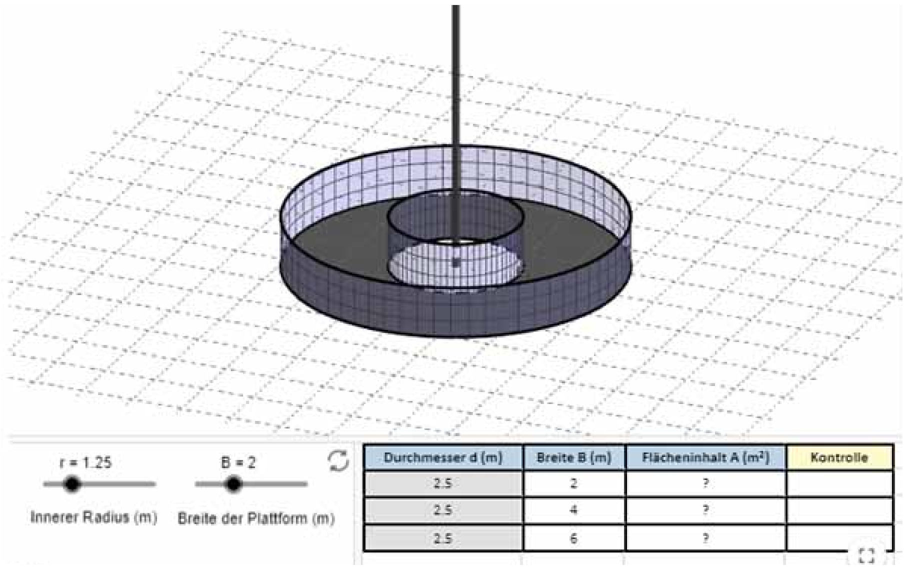



*Obr. 24.2: Plošina s točitým schodištěm*

### Aktivita 2

Žáci řeší úlohu „Velikost plošiny“ ve dvojicích. Nejprve vypočítají obsah podlahy plošiny. Potom použijí příslušný GeoGebra aplet (viz Obr. 24.3) a pokusí se zjistit, pro jaké rozměry plošiny se na ní vejde dvakrát tolik návštěvníků. Pro usnadnění postupu řešení tohoto problému je v apletu k dispozici tabulka, v níž je bezprostředně ověřována správnost řešení, která do ní žáci zapíšou. Žáci tak ihned dostávají zpětnou vazbu o správnosti řešení.

V závěrečném shrnutí úlohy je vhodné vrátit se k výpočtu obsahu kruhu a mezikruží a zopakovat příslušné postupy.




*Obr. 24.3: Velikost plošiny*

### Aktivita 3

Žáci řeší „výzkumný úkol“, jehož cílem je zjistit, při jaké šířce plošiny (tím se rozumí šířka odpovídajícího mezikruží) se přesně zdvojnásobí obsah plošiny. K řešení je možno využít příslušný aplet (podobný aplet jako při aktivitě 2).

V dalším kroku se takto získaný výsledek ověří výpočtem, následně se nalezne i obecné řešení tohoto problému. Pro tento účel žáci odvodí příslušnou rovnici.

## Pokyny pro učitele

Pro práci s aplety vytvořenými v programu GeoGebra, potřebují žáci jenom základní znalosti obsluhy tohoto programu, konkrétně práci s posuvníkem a zadávání číselných hodnot do tabulky. Tyto aplety se proto hodí i pro žáky, kteří mají s interaktivními materiály ještě málo zkušeností.

Řešení může učitel vytisknout z odkazu uvedeného v tabulce základních informací o materiálu a umístit ho v učebně na katedru, aby si žáci mohli samostatně provádět kontrolu své práce. Při řešení „výzkumného“ úkolu může učitel žákům dát i tento návod:

Protože se při řešení této úlohy hledá všeobecné řešení, označíme původní (jednoduchý) obsah mezikruží jako $A_1$. Dvojnásobný obsah označíme jako $A_2$.

Pro $A_1$ a $A_2$ dostaneme tyto rovnice:

$$A_1 = (R^2 - r^2) \cdot \pi$$

$$A_2 = 2 \cdot A_1 = ((k \cdot R)^2 - r^2) \cdot \pi$$

*Poznámka: k představuje číslo, kterým se musí násobit vnější poloměr, abychom dostali dvojnásobný obsah.*

V druhé rovnici dosadíme za $A_1$ výraz z pravé strany první rovnice. Získáme tak jednu rovnici o neznámé k.

## Podobné výukové materiály

Podobným výukovým materiálem je „Schodiště se skleněným zábradlím“, viz https://www.geogebra.org/m/fyuuyvgr, v němž se žáci zabývají výpočtem skleněné plochy zábradlí točitého schodiště.

Ve vyšších ročnících by se mohly uvedené postupy uplatnit také při výpočtu obsahu skleněné plochy točitého schodiště vedoucího k vyhlídkové plošině.

# 25. Panoramatická terasa

### Úvod

V této vyučovací jednotce provádějí žáci samostatně nebo ve dvojicích výpočty týkající se délky oblouku. Úlohy v příslušné GeoGebra knize se vztahují k produkci firmy WENNA GLAS, která se věnuje sklářské výrobě, konkrétně mimo jiné pracuje na projektu stavby panoramatické terasy se zábradlím z ohýbaných skleněných desek.

| **Základní informace o materiálu** | |
|---|---|
| Autor | Andreas Lindner, Johanna Zöchbauer |
| Téma | délka oblouku |
| Ročník, předmět | 8. ročník, matematika |
| Časová dotace | cca 1 vyučovací hodina |
| Materiály pro žáky | https://www.geogebra.org/m/rgxdqumf |
| Spolupráce s podnikem | WENNA GLAS |
| Zdroje | Plán výuky: https://www.geogebra.org/m/hxpqy2u6<br>Řešení: https://www.geogebra.org/m/uxtxzdgc |

*Zdroj: https://www.flickr.com/photos/wennaglas/*

### Požadované znalosti a dovednosti žáků

- Žáci umějí vypočítat obvod kruhu.
- Žáci umějí vypočítat délku oblouku kruhové výseče.
- Žáci umějí vypočítat obsah obdélníku.

### Získané dovednosti a znalosti

- Žáci umějí použít již známé vzorce pro délku oblouku v konkrétní každodenní situaci.

### Průběh výuky

V této vyučovací jednotce mají všichni žáci k dispozici laptop nebo tablet. Není-li možné, aby všichni žáci měli svůj vlastní přístroj, měli by se o jeden přístroj dělit maximálně 3 žáci. V takovém případě se doporučuje vytisknout pracovní listy.

Na úvod se společně probere průběh hodiny a objasní se zadání úkolu – stavby panoramatické terasy. Vyučující přitom zmíní také společnost WENNA GLAS a pohovoří o ohýbaném sklu (viz „Úvod“).

## Aktivita 1

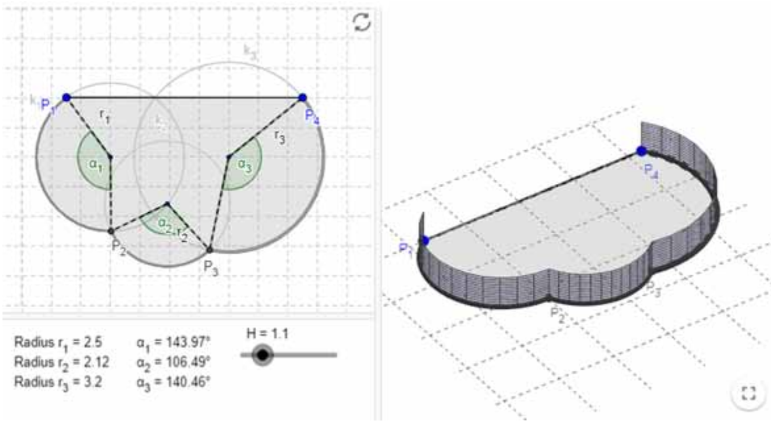
Žáci nyní samostatně (pokud je k dispozici dostatek přístrojů) na počítači nebo tabletu vypracují postupně úlohu 1 a úlohu 2. Ty lze najít v příslušné GeoGebra knize.

V první úloze mají žáci za úkol vypočítat rozměry a následně obsah skleněných desek, které tvoří ohýbané zábradlí.

Výška zábradlí je dána. Délky zábradlí různých oblouků točité terasy lze zjistit vzorcem pro výpočet délky oblouku. Potřebné hodnoty se dají odečíst v odpovídajícím apletu (viz Obr. 25.1). V tomto apletu je panoramatická terasa zobrazena z různé perspektivy. Výška zábradlí se může upravovat posuvníkem.

WENNA GLAS může skleněné desky ohýbat pouze válcovitě, to znamená, že pro zábradlí panoramatické terasy bude zapotřebí více různě velkých skleněných desek. Ty musí být přiříznuty již před ohýbáním do správné velikosti, protože později to již není možné.

Žáci zde mají rozeznat, že původní tvar zábradlí je obdélník. Tak je možno vypočítat celou potřebnou skleněnou plochu pro zábradlí terasy vzorcem pro výpočet obsahu obdélníku. Výpočty a jejich výsledky žáci zapíší.




*Obr. 25.1: Dynamické zobrazení panoramatické terasy*

## Aktivita 2

Na druhém pracovním listě provádějí žáci nejprve rešerše. Za tímto účelem je sem umístěna webová stránka firmy WENNA GLAS. Žáci mají zjistit maximální a minimální možné rozměry pro ohýbané skleněné desky.

Pro dané poloměry se mohou ohýbat skleněné desky o rozměrech od 500 mm x 500 mm až do 2440 mm x 3600 mm. Z výsledků úlohy 1 žáci vědí, že díly panoramatické terasy jsou delší, než mohou být maximálně možné délky. Musí proto skleněné desky ještě jednou rozdělit.

Poté žáci provedou výpočet opakovaně kvůli kontrole obsahu skleněných desek a porovnají tuto hodnotu s výsledkem z úlohy 1.

### Pokyny pro učitele

Panoramatická terasa se skládá před ohnutím skleněných desek ze tří obdélníků. Žákům by mohlo pomoci, kdyby si skleněné desky načrtli (do sešitu). V úloze 2 by tak mohlo být pro žáky snazší pochopit řešený problém. Také řešení se může v takovém náčrtu lépe vizualizovat (viz Obr. 25.2).


*Obr. 25.2: Možné rozdělení skleněných desek*

Při rozdělení skleněných desek v úloze 2 existuje několik různých řešení. Proto by se neměl opomíjet ani aspekt vzhledu.

# 26. Skleněné zábradlí

**Úvod**

V tomto učebním bloku budou žáci při práci ve dvojicích řešit aplikované úlohy užitím integrálního a diferenciálního počtu. Přitom budou provádět různé výpočty s prostorovou křivkou, která bude představovat zábradlí točitého schodiště. Během následného „výzkumného úkolu“ se pokusí modelovat vypočítané údaje pomocí různých pomůcek a poté odpovědět na otázky k danému tématu.

| **Základní informace o materiálu** | |
|---|---|
| Autor | Andreas Lindner, Tanja Wassermair |
| Téma | integrální a diferenciální počet, křivka daná parametricky |
| Ročník, předmět | 12. ročník, matematika |
| Časová dotace | 1 -2 vyučovací hodiny |
| Materiály pro žáky | https://www.geogebra.org/m/fyuuyvgr<br>rulička od toaletního papíru, lepicí páska, nůžky, papír |
| Spolupráce s podnikem | Wenna Glas |
| Zdroje | Výukový plán: https://www.geogebra.org/m/c93weyrh<br>Řešení: https://www.geogebra.org/m/nbppyxhj |

*Zdroj: Christoph Wenna*

**Požadované znalosti a dovednosti žáků**

- Žáci vědí, jak se derivuje funkce.
- Žáci vědí, jak se integruje funkce (pomocí počítačového programu).
- Žáci vědí, jak se řeší určitý integrál.
- Žáci vědí, jak je definována křivka daná parametricky.

**Získané dovednosti a znalosti**

- Žáci budou umět řešit vybrané úkoly aplikací integrálního a diferenciálního počtu.
- Žáci budou umět vypočítat délky křivek daných parametricky.
- Žáci prohloubí své schopnosti řešit problémy.

**Průběh výuky**

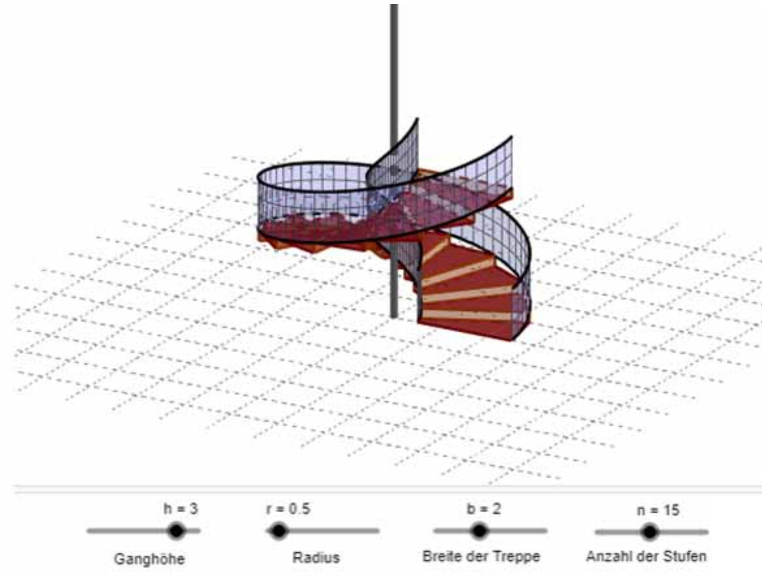
Nejprve se společně probere průběh vyučovací jednotky a žáci dostanou odkaz na příslušnou GeoGebra knihu (viz tabulka Základní informace). Objasní se téma úlohy – stavba točitého schodiště se skleněným zábradlím. Vyučující přitom zmíní také společnost WENNA GLAS a pohovoří o ohýbaném sklu (viz „Úvod“).

## Aktivita 1

Žáci pracují ve dvojicích s prvním pracovním listem „Točité schodiště“. Přitom se má vypočítat obsah plochy skleněného zábradlí. Za tímto účelem se musí pomocí GeoGebry vypočítat parametricky daná křivka, která ohraničuje skleněné zábradlí a má tvar šroubovice. Pro matematický popis trojrozměrné křivky jsou dány obecné rovnice pro *x(t)*, *y(t)* a *z(t)*. Pro výpočet její délky žáci použijí integrál a derivace. Jako pomůcka je dán vztah pro výpočet délky křivky dané parametricky:

Délka křivky dané parametricky = $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\, dt$

Pro vizualizaci obsahu plochy zábradlí se použije aplet GeoGebra (viz Obr. 26.1).




*Obr. 26.1: Aplet pro točité schodiště*

V apletu se mohou měnit a pozorovat parametry (výška stoupání, poloměr schodiště, šířka schodiště a počet schodů) podle toho, jak se v Grafickém náhledu 3D mění zadání.

V doplňkové úloze se má potom vypočítat, kolik stupňů o určité výšce bude zapotřebí při dané výšce stoupání schodiště.

### Aktivita 2

Žáci v této aktivitě vytvoří model vnějšího zábradlí. K tomu potřebují: prázdnou ruličku od toaletního papíru, lepicí pásku, papír, fix, trojúhelník a nůžky.

Při této úloze mají za úkol vyzkoumat, zda výška stoupání má vliv na obsah plochy zábradlí a mají pro to najít možné odůvodnění. V GeoGebra knize je k tomu uveden obrazový návod (viz Obr. 26.2). V online verzi tohoto výukového plánu je pak k dispozici následující PDF soubor, který lze vytisknout.

# Praktický úkol! Sestav a objevuj!

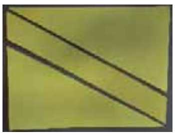
Timo a Claudia postavili doma model, který ilustruje zakřivené zábradlí. Objevili následující: Plocha zábradlí odpovídá obsahu pláště válce. Řekli si proto: „To nám ale velice usnadní práci, nemusíme složitě používat integrály, povrch zábradlí vypočítáme následujícím jednodušším způsobem:“

$A = U_{Kruh} \cdot h$ r... vnější poloměr zábradlí
$A = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$ h... výška zábradlí

**Otázka:**
Je jejich úsudek správný? Pokuste se sestavit model také a ověřte správnost výroku. Pokud se mýlili, vysvětlete proč. Při tvorbě modelu můžete využít následující postup.

**Budeme potřebovat:**

- Ruličku od toaletního papíru
- Lepicí pásku
- Kousek papíru, který pokryje celou ruličku
- Nůžky
- Pravítko a tužku



**Krok 1:** Nejdříve si vezmete kus papíru, který rozměrově odpovídá plášti ruličky toaletního papíru. Tužkou udělejte malou značku 2 cm pod levým horním rohem a 2 cm nad pravým dolním rohem. Poté pravítkem spojte levou horní značku s pravým dolním rohem a pravou dolní značku s levým horním rohem. Výsledkem jsou dvě rovnoběžné přímky. Papír následně rozstřihněte na tři části dle rovnoběžek (viz obrázek níže). Pás, který vznikl uprostřed, budeme potřebovat.

**Krok 2:** Nyní použijte lepicí pásku a oblepte vystřihnutý pás papíru kolem ruličky (od toaletního papíru). Tento pás představuje skleněné zábradlí. Na ruličku od toaletního papíru tužkou nakreslete úsečku, která spojí konce přilepeného papíru. Ta totiž značí, že se jedná o právě jedno otočení (schodišťové šroubovice). Na obrázku vpravo vidíte, jak by konstrukce měla nyní vypadat.

**Krok 3:** Nyní oba konce papíru od ruličky odlepte a slepte je dohromady tak, jak vidíte na obrázku vlevo.

**Co jste tedy zjistili...**

Vytvořili jsme model zábradlí přesně tak jako Timo a Claudia. Měli tedy pravdu, když tvrdili, že plochu zábradlí lze vypočítat dle následujícího vzorce?

$A = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$ r... vnější poloměr h... výška zábradlí

Odpovězte a svou odpověď s využitím Vámi vytvořeného modelu zdůvodněte!

*Obr. 26.2: Návod na manuální aktivitu*

### Aktivita 3

Žáci pracují na obou úkolech z kapitoly 2 GeoGebra knihy. Přitom se jedná o složitější úkoly zohledňující další faktory parametricky dané křivky. V obou případech se jedná o spirálu.

V úloze 1 se s rostoucí výškou stoupání zvětšuje poloměr křivky,

v úloze 2 se potom poloměr vnější křivky mění rychleji než poloměr vnitřní křivky.

Žáci mají vypočítat délku vnitřního příp. vnějšího zábradlí a potom porovnat, jak se mění vzhledem k těmto faktorům plocha skleněného zábradlí ve srovnání s příkladem v kapitole 1. Pro vizualizaci se opět použijí aplety GeoGebra, u kterých je zase možné pomocí posuvníků vytvářet varianty různých parametrů podobně jako u předchozího příkladu.

### Pokyny pro učitele

K provedení úkolů této vyučovací jednotky se doporučuje pro řešení integrálů použít program CAS (Computer Algebra System). Jestliže nebudete mít k dispozici dostatek počítačů, laptopů, tabletů, mobilů nebo kalkulaček schopných výpočtů v programu CAS, můžete řešit úlohy i bez užití digitálních technologií. To ale zvyšuje stupeň komplexnosti, takže je třeba počítat s jinou časovou dotací, než je uvedena.

Pokyn: Pokud budou žáci sdílet knihu prostřednictvím GeoGebra skupiny, změny a zápisy údajů, které žáci provedli, se budou ukládat.

# 27. Vyúčtování sklenářských prací

**Úvod**

Žáci se v rámci této vyučovací hodiny zabývají pracemi prováděnými stavební sklenářskou firmou. V malých skupinkách budou řešit různé způsoby kalkulace těchto prací. Pro zpracování úloh se používají GeoGebra aplety.

| **Základní informace o materiálu** | |
|---|---|
| Autor | Hubert Pöchtrager |
| Téma | výpočet plochy a ceny, měřítko, procenta |
| Ročník, předmět | 7. ročník, matematika |
| Časová dotace | 1 vyučovací hodina |
| Materiály pro žáky | https://www.geogebra.org/m/cfykqvkq |
| Spolupráce s podnikem | Wenna Glas |
| Zdroje | Výukový plán: https://www.geogebra.org/m/rqbe5tss<br>Řešení: https://www.geogebra.org/m/zmhnrxee |

*Zdroj: Hubert Pöchtrager*

**Požadované znalosti a dovednosti žáků**

- Žáci umějí vypočítat obsah čtyřúhelníku (obdélník, lichoběžník, rovnoběžník).
- Žáci umějí interpretovat a použít měřítko.
- Žáci mají základní znalosti při práci s geometrickými nástroji GeoGebra a umějí zacházet s těmito nástroji: Vzdálenost nebo délka, Mnohoúhelník a Plocha
- Žáci umějí identifikovat funkční závislosti (přímá úměrnost) a umějí podle nich vypočítat hledané veličiny.
- Žáci umějí provádět jednoduché výpočty pomocí tabulek.
- Žáci ovládají počítání procent.

**Získané dovednosti a znalosti**

- Žáci budou umět z obrázku (s měřítkem) zjistit délky ve skutečnosti.
- Žáci budou umět vypočítat obsahy různých skleněných ploch.
- Žáci budou umět plochy vypočítané pomocí GeoGebry převést s použitím měřítka do skutečných velikostí.
- Žáci budou umět z údajů o cenách a velikostech sestavit celkový výpočet.
- Žáci se dozvědí, že někdy lze i přibližné údaje uvádět jako výsledky.

**Průběh výuky**

V této vyučovací hodině žáci pracují střídavě v malých skupinkách příp. samostatně či ve dvojicích. Nutné je, aby každá skupina či žák měli svůj digitální přístroj (PC, notebook nebo tablet).

## Aktivita 1

Po krátkém úvodu do obsahu této aktivity se začne s prací na prvním úkolu. Z otevřeného zadání „Stavební sklenářská firma počítá své pracovní výkony“ (viz Obr. 27.1) se v rámci práce ve dvojicích nebo malých skupinách bude vytvářet první návrh řešení, který bude sloužit jako podklad pro další práci, samostatnou nebo ve dvojicích. Žáci přitom odpovídají na tyto otázky:

- Jaké práce by mohla stavební sklenářská firma provádět?
- Co znamená měřítko?
- Co musíme vypočítat?

*Poznámka: Otázka „Jak na to?“ se ještě nemusí zodpovědět.*

Jedna skupina představí svůj návrh řešení druhé skupině.

Poznámka: Učitel vytiskne pracovní list (viz odkaz: Materiály pro žáky) ideálně před začátkem vyučovací jednotky. Žáci na tento pracovní list budou zapisovat své úva-


*Obr. 27.1: Aplet k tématu Práce stavební sklářské firmy*

### Aktivita 2

Žáci vypočítají samostatně nebo ve dvojicích pomocí apletu „Sklenářské práce“ obsahy skleněných ploch, které by stavební sklenářská firma mohla dodávat a montovat. Pro výpočet relevantních délek z obrázku je možno použít měřítko obrázku a nástroj  Vzdálenost nebo délka.

Měření délek na obrázku se provádí nástroji GeoGebra. Zjišťování obsahu plochy výlohy (na obrázku) je možné provést i pomocí nástrojů   mnohoúhelník a plocha.

Pomocí těchto nástrojů lze jednoduše vypočítat i plochy, pro jejichž obsahy se žáci vzorce ještě neučili. Obsahu výseče kruhu, která výlohu uzavírá shora, se lze tedy zcela jednoduše přiblížit mnohoúhelníkem.

Poté, co žáci zjistí v apletu obsah zobrazené plochy, hledají odpověď na otázku: jaká souvislost existuje mezi tímto obsahem, měřítkem a skutečným obsahem skla ve výloze?

*Poznámka: Ne všichni žáci musejí počítat všechny skleněné plochy. S ohledem na různorodost žáků se umožní různá hloubka zpracování úlohy.*

### Aktivita 3

Žáci vypočtou v aktivitě GeoGebra „Vytvoř fakturu" náklady na potřebné sklo a náklady na práci s tím, že bude odhadem zadána potřebná pracovní doba. S ohledem na daň z přidané hodnoty (20 %, v ČR 21 %) se fakturovaná částka zjistí výpočtem z netto částky (viz Obr. 27.2).

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Instalované skleněné plochy | Cena € / m$^2$ | Skleněná plocha v m | Celková cena | |
| 2 | Sklo ve výloze | 89 | | | |
| 3 | Sklo na zábradlí | 150 | | | |
| 4 | Mezisoučet materiál | | | | |
| 5 | Pracovní doba | Cena € / h | Pracovní doba h | Celková cena | |
| 6 | Mistr sklárny | 54 | | | |
| 7 | Učeň | 29 | | | |
| 8 | Mezisoučet práce | | | | |
| 9 | Částka netto | | | | |
| 10 | 20% DPH (v ČR 20% DPH) | | | | |
| 11 | Fakturovaná částka | | | | |

*Obr. 27.2: Tabulka pro vytvoření faktury*

Dodatečně je možno v této aktivitě i jednoduše zkontrolovat, jaký dopad mají malé změny vypočítaných obsahů ploch (které nelze z obrázku zcela exaktně zjistit) ne celkovou cenu.

### Pokyny pro učitele

Aktivity lze doplnit otázkami, které pro žáky představují zvláštní výzvy:

*„Jak se může přibližně vypočítat obsah ploch nemajících tvar n-úhelníku?"*

Zde mají žáci sami najít řešení pomocí k tomu určených nástrojů programu GeoGebra. Poznámka, že je možný i přibližný výpočet, jim přitom může pomoci.

V této souvislosti se může diskutovat i o přesnosti měření. I ve vyšší matematice se často počítá s přibližnými čísly. Pro žáky je to nové. Ve světě matematiky pro ně existuje vždy jenom jedno řešení. Tyto materiály mohou tuto mylnou představu trochu nabourat a žákům otevřít nový pohled do světa matematiky.

*„Jak je možné z obsahu na obrázku vypočítat obsah plochy ve skutečnosti?“*

Aby se převedl obsah plochy z plánu do skutečnosti, musí se násobit druhou mocninou měřítka. Doporučujeme to probrat se žáky již předem.

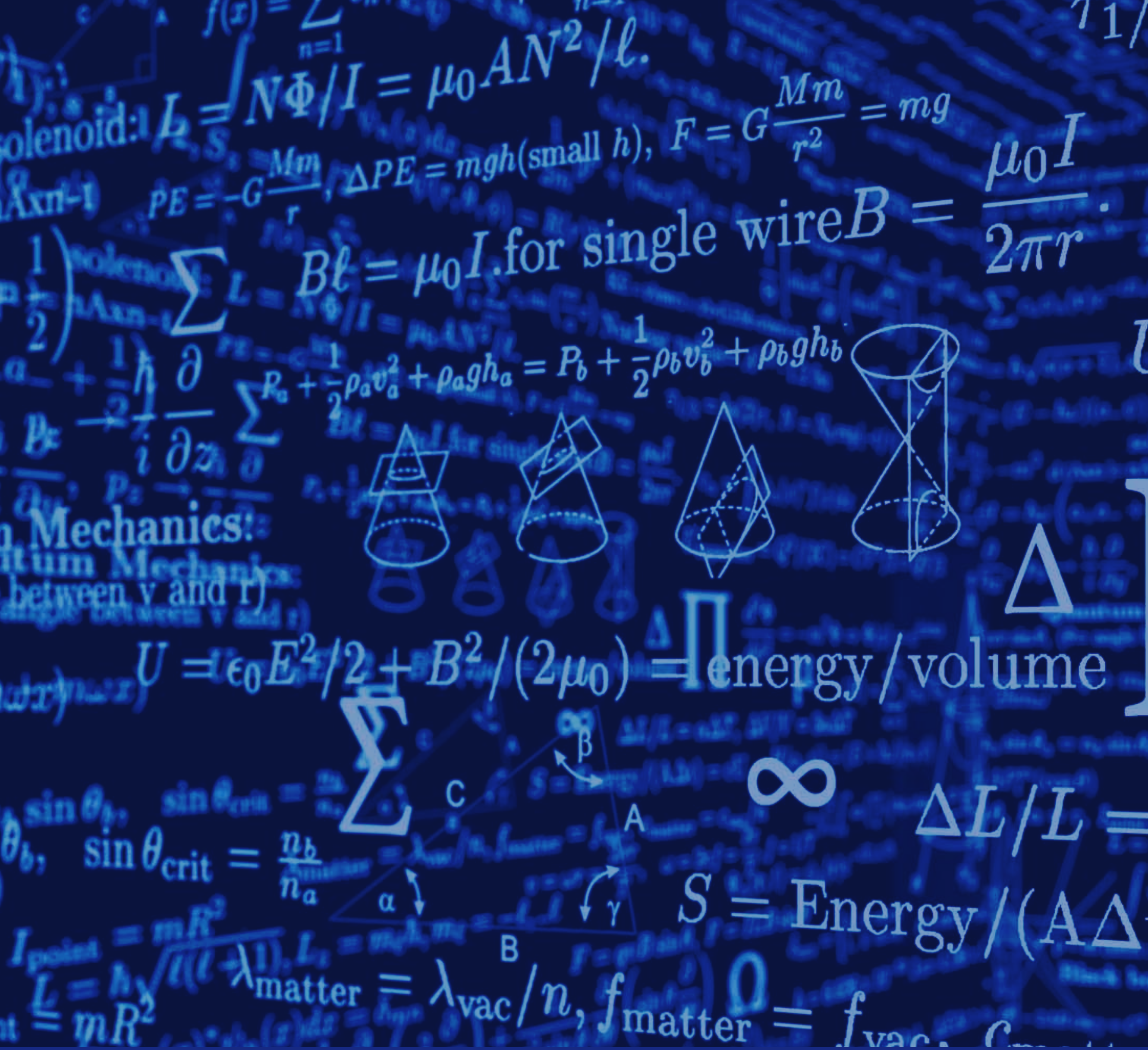
*„Jak to, že nemám stejný výsledek jako můj soused, ačkoliv jsme počítali stejně?“*

Při měření délek nebo ploch v GeoGebře dochází k nepatrným nepřesnostem, protože všichni žáci si málokdy vyberou přesně ty samé body (viz Obr. 27.3 a Obr. 27.4).

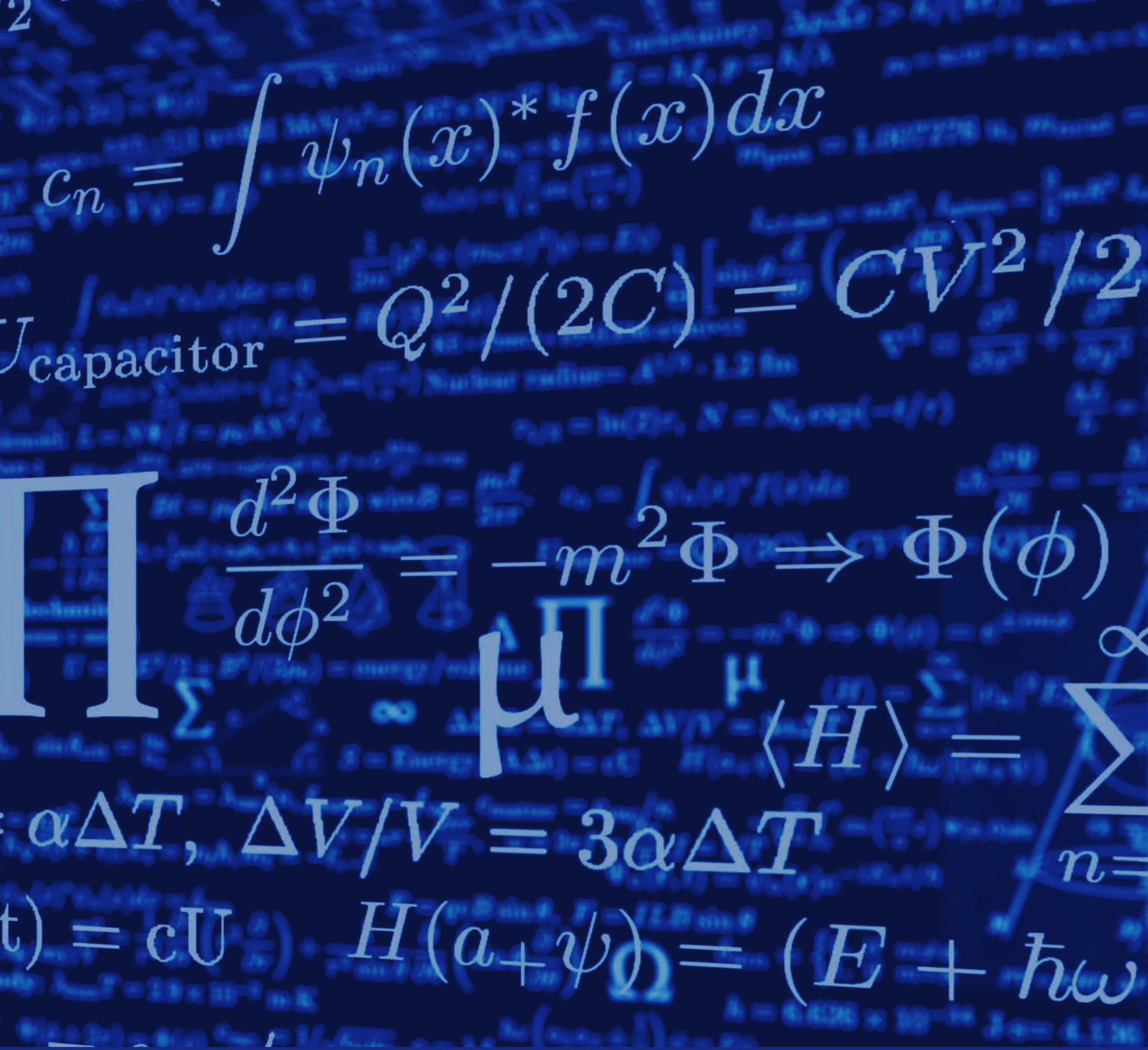
Jaký výsledek je tedy správně? Může se stát, že jsou možné různé výsledky? Tyto otázky je možno diskutovat v celé třídě.


*Obr. 27.3: Výsledek výpočtu plochy výlohy 1*


*Obr. 27.4: Výsledek výpočtu plochy výlohy 2*



solenoid: $L = N\Phi/I = \mu_0 AN^2/\ell$.
$PE = -G\frac{Mm}{r}$, $\Delta PE = mgh$(small $h$), $F = G\frac{Mm}{r^2} = mg$
$B\ell = \mu_0 I$ for single wire $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.
$P_a + \frac{1}{2}\rho_a v_a^2 + \rho_a g h_a = P_b + \frac{1}{2}\rho_b v_b^2 + \rho_b g h_b$
Mechanics:
$U = \epsilon_0 E^2/2 + B^2/(2\mu_0) =$ energy / volume
$\sin\theta_{crit} = \frac{n_b}{n_a}$
$\Delta L/L =$
$S =$ Energy $/(A\Delta$
$\lambda_{matter} = \lambda_{vac}/n$, $f_{matter} = f_{vac}$




# MatemaTech

Durch den mathematischen
Weg zur Technik

# 2. Statisches Testen des Kletterseils

**Einführung**

Das Arbeitsblatt ist auf die Untersuchung und die Überprüfung der statischen Eigenschaften eines Kletterseiles ausgerichtet und überprüft, ob das gegebene Seil die Norm EN 892 für Kletterseile erfüllt. Die erweiterte Variante dieses Lernmaterials (Thema dynamisches Testen des Seiles) und auch weitere Links stehen unter: www.matematech.cz zur Verfügung.

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autor | Vladislav Beňadik |
| Alter | 14 – 19 Jahre |
| Dauer | 1 Unterrichtsstunde |
| SchülerInnen-material | Computer, bzw. Tablet<br>Statisches und dynamisches Seil (je 1,5 m lang)<br>Längenmessgerät<br>Gewicht |
| Vorwissen und Voraussetzungen | Notwendige Informationen eigenständig beschaffen<br>Längenmessgeräte kompetent einsetzen können<br>In Gruppen Problemstellungen bearbeiten können<br>Mathematische Grundkenntnisse – Dreisatz, Arbeit mit Graphen, Ausrechnung des arithmetischen Mittels, direkte und indirekte Proportionalität |
| Lernergebnisse und Kompetenzen | Bearbeitung der gefundenen Informationen – wichtig für den richtigen Testvorgang des Seiles<br>Finden der Fehler und Abweichungen beim Messen und Berechnungen<br>Schlussfolgerungen aus gewonnenen Testwerten |
| Anwendung | Sport – Klettern an künstlichen Anlagen und an Felsen – Materialüberprüfung<br>Arbeit – Arbeit in Höhen, in Höhlen |
| Links/ Webseiten | www.theuiaa.org, www.ukclimbing.com, www.climbing.com, www.lezec.cz, www.horolezeckametodika.cz |

**Arbeitsblatt für SchülerInnen**

Theoretischer Teil:

1) Was ist der Unterschied zwischen einem statischen und einem dynamischen Seil?

   Warum verwendet man das dynamische Seil beim Klettern?

2) Wie verändert ein Knoten die Tragfähigkeit des Seils? Begründet die Antwort!
3) Warum besteht ein Seil aus so vielen kleineren Strängen und einer Umflechtung?
4) Was ist die Norm EN 892?
5) Erläutert die „statische Seilverlängerung"?

**Praktischer Teil:**

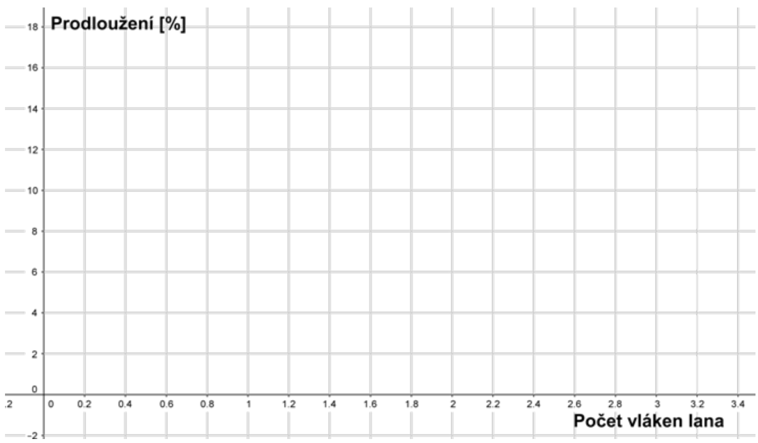



*Abb. 2.1: Vorlage des Diagramms zur Eintragung der Messergebnisse*

## Aufgabe Nr. 1

Arbeitet die theoretischen Fragen im Arbeitsblatt aus. Verwendet zur Lösung auch Tablets oder Computer. Antworten sind sorgfältig einzutragen.

## Aufgabe Nr. 2

Unter Schulbedingungen kann das Seil (zertifizierte 80kg) nicht getestet werden. Ermittelt daher, welche Masse pro innerem Seilstrang angelastet werden kann.

### Aufgabe Nr. 3

Mithilfe der Verlängerungsmessungen von 1, 2 und 3 Strängen ist zu ermitteln, welches Seil statisch und welches dynamisch ist. Vor der Durchführung der Messungen soll der Ausgang dieser und die Form des Diagramms abgeschätzt werden. Ergebnisse sowie deren Abschätzungen sind in die Diagrammvorlage im Arbeitsblatt einzutragen (Abbildung 2.1). Der Einfluss der Genauigkeit der Messung auf das Ergebnis soll insbesondere berücksichtigt werden. Wenn man Zeit genug hat, kann die Messung wiederholt werden, um das Ergebnis zu präzisieren.

## Erfahrungen mit Verwendung des Unterrichtsmaterials

Es wird empfohlen, zwei Seilarten für die SchülerInnen vorzubereiten – statisch und dynamisch. Somit müssen zwei verschiedene Ergebnisse verglichen werden. Einfache mathematischen Berechnungen in Verbindung mit simpler Theorie und auch die manuellen Fertigkeiten förderte die Freude der SchülerInnen an dieser Aufgabe.

## Musterlösung

### Aufgabe Nr. 1 (Antworten auf theoretische Fragen)

1) Das dynamische Seil ist elastisch, das statische nicht. Beim Bergklettern werden dynamische Seile aus folgendem Grunde verwendet: Wenn man stürzt, wirkt auf den Kletterer eine geringere Bremsbeschleunigung (https://ggbm.at/wF8Nzf8P) und die Verletzungsfolgen werden kleiner.
2) Die Knoten mindern die Tragfähigkeit des Seiles, einige bis zu 50%. Das größte Problem ist Reibung und Erwärmung der Materialien, wodurch das Seil beschädigt werden kann.
3) Aus Sicherheitsgründen: Bei Beschädigung der Umflechtung und des Kernes (einiger Seilstränge) können die restlichen Stränge den Bergsteiger noch halten und das Seil zerreißt nicht.
4) Die Sicherheitsnorm bestimmt, welche Eigenschaften die Kletterseile erfüllen müssen.
5) Der genaue Wortlaut der Norm EN 892: Die statische Nutzverlängerung wird durch Seilbelastung mit dem Gewicht 80 kg geprüft. Diese darf 10% bei einfachen Seilen (einem Seilstrang) nicht überschreiten.

### Aufgabe Nr. 2

Wie in der Vorgabe steht, ist es nicht möglich, die zertifizierten Tests mit 80 kg Gewicht unter Schulbedingungen durchzuführen. Es wird angeraten, diese Tests auf einem (bzw. zwei, drei Seilsträngen) mit kleinerem Gewicht durchzuführen. Wie schwer die Gewichte sein sollen, kann man einfach mit Dreisatz ausrechnen. Die Seilumflechtung selbst trägt 20% des Gewichtes und das restliche Gewicht wird unter den bestehenden Seilsträngen verteilt (https://ggbm.at/b2GzSyj3). Es ist darauf zu achten, dass jedes Seil eine andere Strangzahl beinhalten kann.

### Aufgabe Nr. 3

Zuerst ist die Verlängerung von 1, 2 oder auch von 3 Seilsträngen wie folgt abzuschätzen: Man wird voraussetzen, dass bei Belastung eines Seilstrangs keine maximale Verlängerung (12 %), sondern nur eine Teilverlängerung (8 %) eintritt. Für die verbleibende Zahl von Seilen wird das Ergebnis mithilfe der indirekten Proportionalität berechnet. Der Graph ist also eine Hyperbel.

Es ist ferner beim Messen zu berücksichtigen, dass bei Strangbelastung durch das Gewicht die Knoten festgezogen werden. Die Ergebnisse können also beim Messen der ganzen Länge verzerrt werden. Es wird daher empfohlen, Markierungen an den Seilen zu machen und nur die Verlängerung zwischen diesen Markierungen zu messen. Beim dynamischen Seil werden die Ergebnisse unserer Abschätzung entsprechen (inkl. Diagramm) und beim statischen Seil wird die Verlängerung nur rund 2 % betragen.

Folgende selbst durchgeführte Messung kann als Anleitung oder zur Kontrolle dienen: https://ggbm.at/kFtJatUS.

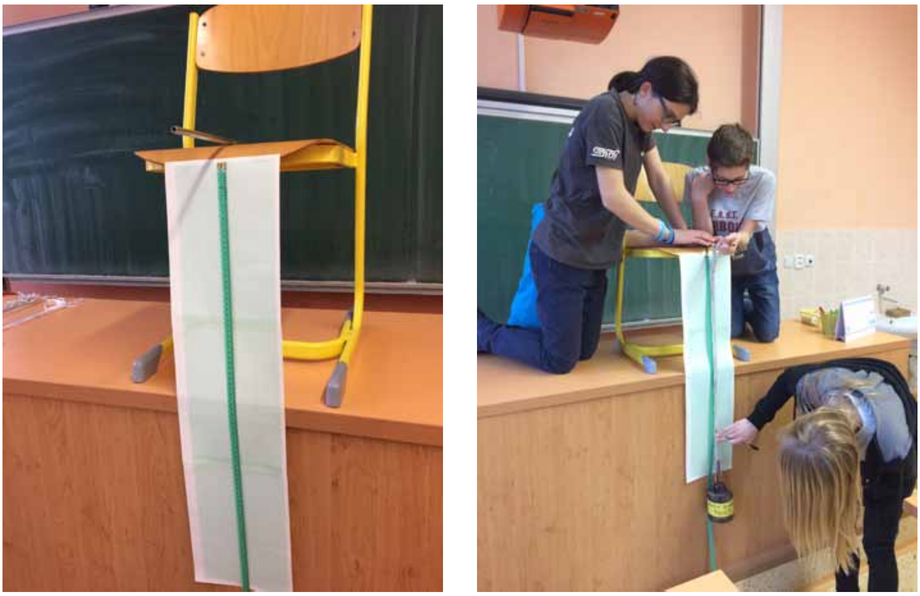


*Abb. 2.2: Aufnahmen aus dem Schulversuch – statische Verlängerung eines Seilstrangs*

### Weitere Unterrichtsunterlagen

Unter der Webseite www.matematech.cz sind weitere Unterrichtsunterlagen bezüglich Messen und Ergebnisschätzung zu finden – Kugelvolumen, Messung von Abmessungen des Dorngusses.

# 3. Bestimmung der Höhe einer Kirche

**Einführung**

Das nachfolgende Arbeitsblatt entstand im Rahmen einer architektonischen Exkursion eines grenzüberschreitenden Workshops in Vodnany, in welcher die Marien-Kirche und das Stadtmuseum besichtigt wurden. Es ist als Inspiration für Lehrer entworfen, wie man den SchülerInnen das Verhältnis und den Maßstab in Praxis zeigen kann. Die SchülerInnen können selbst gestalten, wie sie das gegebene Thema bearbeiten.

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autor | Vladislav Beňadik |
| Alter | 14 – 19 Jahre |
| Dauer | 1 Unterrichtsstunde |
| SchülerInnen-material | Längenmessgerät<br>Taschenrechner, bzw. Handy<br>Tablets, Computer |
| Vorwissen / Voraussetzungen | Mit Längenmessgeräten arbeiten können<br>In Gruppen Problemstellungen bearbeiten können<br>Mathematische Grundkenntnisse – Maßstab, Verhältnis, Proportionalität |
| Lernergebnisse und Kompetenzen | Finden von Fehlern und Abweichungen beim Messen und Berechnen<br>Aus gewonnenen Testwerten schlussfolgern<br>Abschätzung des richtigen Ergebnisses |
| Anwendung | Architektur<br>Maßstab der Landkarten |
| Links/ Webseiten | Architektonischer Plan der Maria-Kirche, Archiv des Stadtmuseums und Galerie Vodňany.<br>Einführungstext über die Kirche: Autor Mgr. Jitka Velková, Redaktion PhDr. Pavla Stuchlá, Ph.D. |

### Marienkirche in Vodňany

Die Dechant- Kirche in Vodňany entstand vermutlich gleichzeitig mit der Stadt in der 2. Hälfte des 13. Jahrhunderts im Zusammenhang mit der Besiedelung Südböhmens unter Herrschaft des Königs Přemysl Otakars II. In der 1. Hälfte des 15. Jahrhunderts wurde durch Meister Jaklík und seinen Sohn Václav das Presbyterium im Stil der Hochgotik aufgebaut. In den 80er Jahren des 16. Jahrhunderts wurde das nördliche Schiff mit Musikerchor und Vorsaal geändert. Die Kirche wurde durch Brand in der Stadt 1722 beschädigt, danach wurde sie restauriert. Wahrscheinlich zu dieser Zeit wurden Wappen der Stadt Vodňany, des Königreiches Böhmen und des ehemaligen Dechants A. Vokoun auf dem Kirchenturm eingebaut. 1894 - 1897 wurde der Bau erneut im gotischen Stil durch den Bauherrn Rudolf Stech nach Entwurf des Architekten Josef Mocker umgebaut. Der Dom wurde damals innen durch Wandfresken, außen mit Sgraffiti in Giebeln und in Fenster des Presbyteriums mit Glasmalereien nach Entwürfen des Malers Mikoláš Aleš verziert. Gleichzeitig wurde die neugotische Einrichtung beschafft. Die Aleš´ Entwürfe zusammen mit einem Teil des ehemaligen barocken Mobiliars befinden sich in den Sammlungen des Stadtmuseums und der Galerie in Vodňany. Die heutige Orgel wurde von der Eduard-Hubený-Firma aus Protivín 1926 aufgebaut. Am 64 Meter hohen Turm hängen sechs Glocken, die größte davon mit dem Namen Marek wurde 1725 gegossen. An der südlichen Seite der Kirche steht das Missionskreuz aus dem Jahre 1853. In Pflastern am Kreuzfuß gibt es eine Erinnerung an die Glocke namens Jan, die beim Herunternehmen zu Kriegszwecken 1917 zerschlagen wurde.

### Arbeitsblatt für SchülerInnen

#### Aufgabe Nr. 1

Auf der Abbildung 3.1 sind die Innenräume der Marienkirche in Vodňany dargestellt. Bestimmt die Höhe der Kirchendecke möglichst präzise nur mithilfe eurer Messung und Berechnungen.

#### Aufgabe Nr. 2

Auf der Abbildung 3.2 ist der architektonische Plan – Seitenriss der Marienkirche in Vodňany. Verwendet den angegebenen Maßstab und prüft, ob das Ergebnis der Aufgabe 1 diesem Plan entspricht. Der Maßstab ist auf der Abbildung Nr. 3.3 angeführt.

### Erfahrungen mit Verwendung des Lernmaterials

Dieses Material dient nur als Inspiration für Lehrerinnen. Nicht jeder kann Vodňany mit den SchülerInnen besuchen, um die Kirche vermessen zu können. Deshalb kann dieses Arbeitsblatt angepasst werden und für eine andere Kirche oder ein Gebäude in der jeweiligen Stadt verwendet werden.

*Abb. 3.1: Marienkirche in Vodňany*

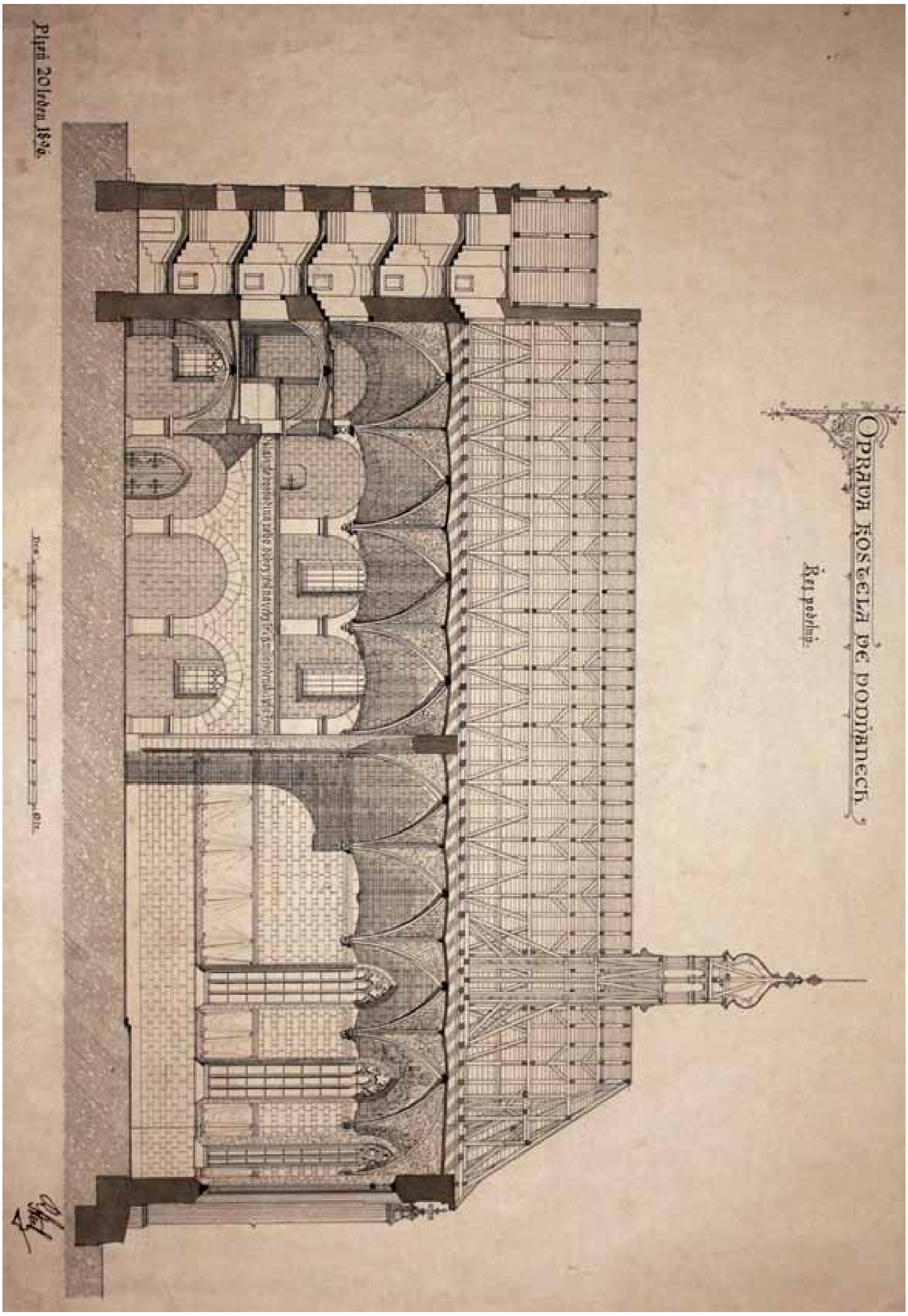


*Abb. 3.2: Marienkirche in Vodňany – Seitenriss*

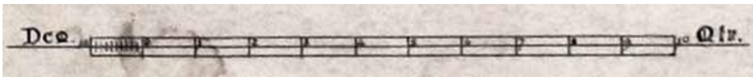


*Abb. 3.3: Detail des Maßstabes aus dem Plan der Abb. 3.2*

**Musterlösung**

## Aufgabe 1

Für die Bestimmung der Deckenhöhe der Kirche ist es optimal, einen Gegenstand in der Kirche zu wählen, bei dem wir seine Höhe bestimmen oder abschätzen können. Dann ist abzuschätzen, wie oft dieser in die Kirchenhöhe reinpasst. Als Gegenstand können z. B. ein Kerzenständer, ein Säule oder auch ein Mensch dienen. Die Vorgehensweise kann individuell von den SchülerInnen vor Ort festgelegt werden.

Die Höhe des Menschen auf der Abbildung 3.1 ist 1,85 m. Wir haben seinen Umriss in die Abbildung insgesamt 7mal übereinander platziert, und noch ungefähr ein Drittel des Umrisses könnte unter die Decke passen (der Position des Menschen auf dem Boden entspricht die schwarze Linie auf der Decke; siehe Abb. 3.4).

Berechnung: $7{,}33 \cdot 1{,}85 = 13{,}5605$ – es wird festgestellt, dass die ungefähre Deckenhöhe der Kirche 13,6 Meter ist.

## Aufgabe 2

In Abb. 3.2 wird die Gebäudehöhe vom Boden bis zum unteren Dachrand mit dem Lineal und die Länge des bezeichneten „zehn Meter langen" Abschnittes (am Maßstab geht es um den Teil, der nicht schraffiert ist – zehn Teilstriche) gemessen. Ihr Verhältnis beträgt ungefähr 1,44. Die Deckenhöhe der Kirche ist also ca. $10 \cdot 1{,}44 = 14{,}4$ Meter.

Die Abschätzungen aus der Aufgabe 1 und der Aufgabe 2 unterscheiden sich unwesentlich. Das resultiert aus vielen Ungenauigkeiten: Verzerrung beim Fotografieren der Bilder 3.1 und 3.2, nur das ungefähre „Aufeinanderstapeln" der Figur auf der Abb. 3.3, nicht präzises Messen mit Lineal auf der ausgedruckten Abb. 3.3. Falls ein Laser-Messgerät zur Verfügung steht, kann man beim persönlichen Besuch der Kirche die genaue Deckenhöhe feststellen und die Abschätzungen mit dem genauen Wert vergleichen.

*Abb. 3.4: Abschätzung der Kirchenhöhe in Praxis; Ausschnitt aus der Abb. 3.1 bearbeitet in GeoGebra*

# 4. Löten – Aufgabe aus der Praxis

**Einführung**

Das Arbeitsblatt bearbeitet ein Problem aus der Praxis der Firma Rohde & Schwarz in Vimperk, durch Anwenden von mathematischen Grundaufgaben. Das Beispiel entstand aufgrund einer Exkursion in dieses Werk und aufgrund der eigenen Erfahrung der SchülerInnen mit Löten. Dem Besuch des Betriebes Rohde & Schwarz wird auch das Kapitel 5 dieses Buches gewidmet.

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autor | Jana Doležalová |
| Alter | 11 – 15 Jahre |
| Dauer | 4 Unterrichtsstunden |
| SchülerInnen-material | Leiterplatten, Löt-werkstoffe, Widerstand-Bauelemente, Internet (Handy, Tablet) |
| Vorwissen / Voraussetzungen | Kenntnisse der mathematischen Grundaufgaben<br>manuelle Geschicklichkeit entsprechend dem Alter 11 - 15 Jahre |
| Lernergebnisse und Kompetenzen | Verstehen der Zweckmäßigkeit der Mathematik bei der Lösung eines realen Beispiels<br>Geschicklichkeit beim Löten<br>Üben der mathematischen Grundausgaben |
| Anwendung | Es basiert direkt auf dem realen Umfeld der Rohde & Schwarz Betrieb Vimperk |
| Links/ Webseiten | Rohde & Schwarz Betrieb Vimperk |

**Erfahrungen mit der Verwendung des Unterrichtsmaterials**

Die Aufgabe basiert auf der Berechnung der durchschnittlichen Lötzeiten für eine bestimmte Zahl von Bauelementen. Wenn für die SchülerInnen kein selbstständiges Löten möglich ist, wird die Aufgabe für sie wenig interessant. Es geht um eine komplexe Aufgabe, in der Mathematik und Praxis verbunden werden. Die SchülerInnen können bei der Gruppenarbeit einander helfen. Hier sind jedoch viele Berechnungen, bei denen die SchülerInnen viele numerische Fehler machen. Vor dem Löten selbst sind die SchülerInnen über die Arbeitssicherheit und Gesundheitsschutz zu belehren. Die Exkursion in den Betrieb Rohde-Schwarz ist eine geeignete Ergänzung, bei welcher die SchülerInnen die Aufgabe im realen Umfeld des Betriebes sehen.

**Musterlösung**

**Erste Stunde**

Die erste Unterrichtseinheit findet in der Klasse statt.

**Definition einzelner notwendiger Begriffe:**

Leiterplatte – dient zur Bestückung einzelner Bauelemente.

Widerstand-Bauelemente – ein passives elektrotechnisches Bauelement. Der Grund für die Verwendung ist besonders die Stromreduzierung oder eine bestimmte Spannungssenkung.

Lötmetall – Metall, das zum Festverbinden der Stoffe aus anderen Metallen bestimmt ist. Das Verbinden mittels Lötmetallen heißt Löten. In der Elektrotechnik wird dadurch die feste leitfähige Verbindung der Elemente bewirkt.

Zinn – ein Bestandteil des Lötmetalls.

Längenmaße Zoll und Fuß – Zoll ist ein Längenmaß der angelsächsischen Herkunft. Die Zollgröße wird als 1/12 des Fußes oder auch als 2,54 cm definiert. Zoll ist keine SI-Einheit. Die Abkürzung stammt aus dem englischen Wort inch (Zoll). Wird als Bezeichnungen der Bauelemente verwendet: In unserem Falle stellen die Bezeichnungen 1206 und 0603 die Abmessungen der Widerstand-Bauelemente dar (bei 1206: 12 bedeutet 12 Hundertstel von einem Zoll und 06 bedeutet 6 Hundertstel von einem Zoll).

**Aufgabe 1** – Motivationsaufgabe. Es empfiehlt sich, den SchülerInnen die tatsächliche Leiterplatte mit Bauelementen zu zeigen (Abbildung 4.1).

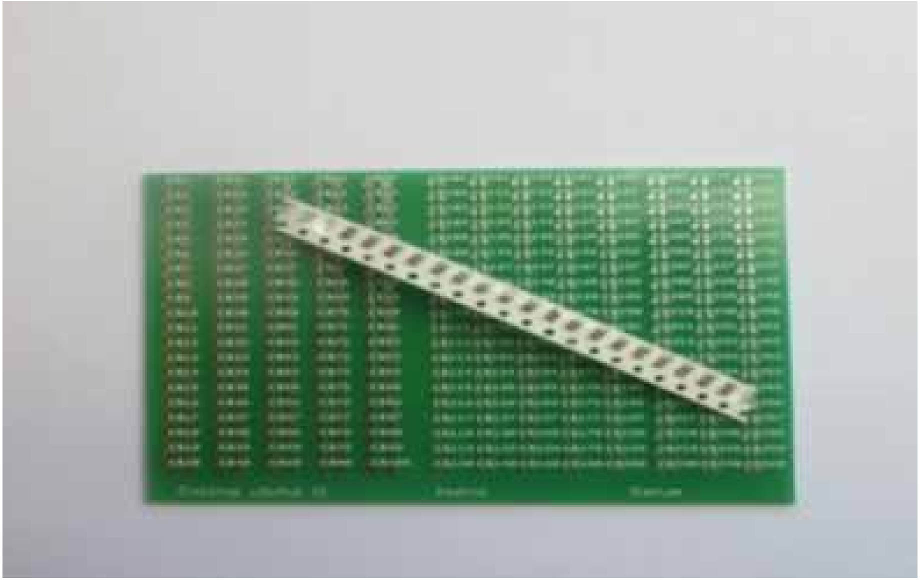


*Abb. 4.1: Bestückte Leiterplatte mit Bauelementen*

**Lösung der Aufgabe 1**

3/5 + 3/10 = 9/10;  Es verbleiben 1/10 , welche 10 Bauelemente darstellen. Die gegebene Leiterplatte hat also 100 Bauelemente.

**Bezeichnung der Bauelemente und Berechnung der Dimensionen**

Die Bezeichnung 1206 bedeutet, dass die Länge des Bauelementes in 12/100 Zoll beträgt und die Breite des Bauelementes in 6/100 Zoll ist. Das bedeutet, die Länge des Bauelements beträgt in Millimetern 0,12·25,4 = 3,048 mm und die Breite des Bauelementes in Millimetern

0,06 · 25,4 = 1,524 mm beträgt.

Die Bezeichnung 0603 bedeutet, dass die Länge des Bauelements 6/100 Zoll und die Breite des Bauelements 3/100 Zoll ist. Das bedeutet, dass die Länge des Bauelementes in Millimetern 0,06 · 25,4 = 1,524 mm ist und die Breite des Bauelementes in Millimetern 0,03 · 25,4 = 0,762 mm beträgt.

**Zweite und Dritte Stunde**

Finden im Unternehmen statt.

SchülerInnen üben zuerst Löten von zwei Typen der Bauelemente auf der Übungsleiterplatte. Dann suchen sie sich anhand der Vorgaben der mathematischen Aufgabe nach Lösungsideen. Sie vereinbaren untereinander, wie viele Bauelemente sie löten werden, wobei die Zeit gemessen wird.

Die Zeit wird eingetragen, welche jeder Einzelne zum Einlöten der vorgegebenen Zahl der Bauelemente gebraucht hat (wenn möglich, wird das Einlöten von fünf Widerstand-Bauelementen jeder Art vereinbart).

**Vierte Stunde**

Das arithmetische Mittel der Lötzeiten der Vorstunde wird ermittelt.

In Gruppen wird der Weg zur Lösung der mathematischen Aufgabe gesucht.

Präsentation einzelner Lösungsmöglichkeiten. Zum Beispiel: die gewählte Zahl von 10 Bauelementen haben die SchülerInnen in der durchschnittlichen Zeit von 8 Minuten gelötet. Pro Leiterplatte braucht man 180 + 180 = 360 Bauelemente. Hat man fünf Leiterplatten, sind es 1 800 Bauelemente. Die gesamte benötigte Zeit beträgt daher 1 440 Minuten, also 24 Stunden. Das bedeutet, dass 3 Mitarbeiter an der gegebenen Arbeit arbeiten müssen.

# 5. Gemeinsame Arbeit – Schraubenvorgang

**Einführung**

Das Arbeitsblatt nutzt Mathematikwissen der SchülerInnen der achten Klasse. Es wird ein reales Beispiel aus dem Alltag der Firma Rohde & Schwarz in Vimperk bearbeitet. Dem Besuch der Firma Rohde & Schwarz widmet sich auch das Kapitel 4 dieses Buches.

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autor | Jana Doležalová |
| Alter | 14 – 15 Jahre |
| Dauer | 2 Unterrichtsstunden |
| SchülerInnen-material | Schrauben-Übungsplatte<br>Schrauben, Schraubenzieher<br>Stoppuhr<br>Taschenrechner |
| Vorwissen und Voraussetzungen | Lösung der mathematischen Aufgaben bezüglich linearer Gleichung mit einer Variablen – gemeinsame Arbeit<br>Wissen über statistische Begriffe: arithmetisches Mittel, Modus, Median<br>manuelle Geschicklichkeit entsprechend dem Alter 14 -15 Jahre |
| Lernergebnisse und Kompetenzen | manuelle Geschicklichkeit bei Arbeit mit Schraubenzieher<br>Verstehen der Zweckmäßigkeit der Mathematik bei der Lösung eines realen Beispiels<br>Übung der mathematischen Grundaufgaben |
| Anwendung | Basierend auf dem realen Umfeld der Rohde & Schwarz Betrieb Vimperk |
| Unternehmen | Rohde & Schwarz Betrieb Vimperk |

**Arbeitsblatt für SchülerInnen**

## Aufgabe Nr. 1

Das Unternehmen Rohde & Schwarz bekam einen neuen Auftrag für den Bau von Fernsehverstärkern. Elektronische Module sind an den Kühlern mit 200 Schrauben zu befestigen. Im Hinblick darauf, dass der Schraubenautomat noch nicht programmiert worden ist, muss dieser Prozess manuell bewältigt werden. Stelle praktisch mithilfe der Übungs-Schraubenplatte fest, in welchem Zeitraum du die Aufgabe erfüllen könntest.

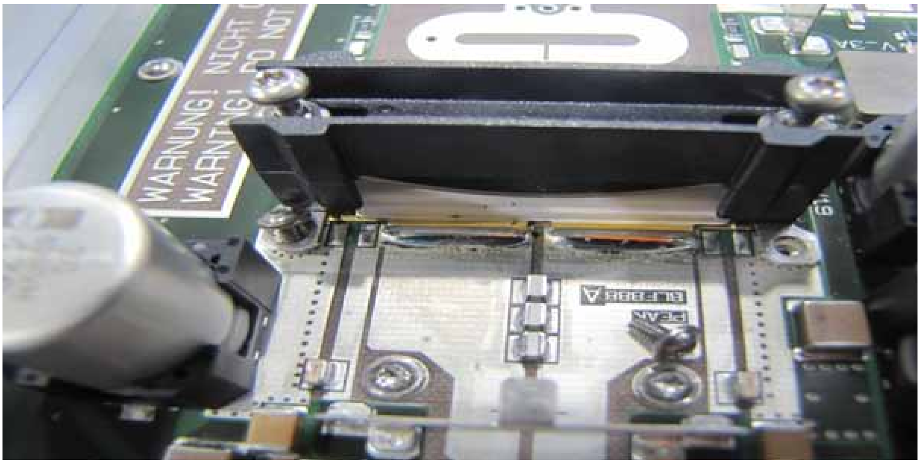



*Abb. 5.1: Fernsehverstärker - Detail*

## Aufgabe Nr. 2

Es werden Gruppen von jeweils fünf SchülerInnen gebildet und berechnete, in welcher Zeit der Auftrag gemeinsam bearbeitet werden kann.

## Aufgabe Nr. 3

Statistik. Bestimmt das arithmetische Mittel, den Modus und den Median der Zeit, in welcher 200 Schrauben von euch eingeschraubt werden können.

a) Als statistische Einheit verwenden Sie die Zeit, die ein Schüler zum Einschrauben braucht. Die Ergebnisse sind mit der eigenen Messung zu vergleichen.

b) Als statistische Einheit verwenden Sie die Zeit, die eine Gruppe von SchülerInnen zum Einschrauben braucht. Die Ergebnisse sind mit der eigener Messung zu vergleichen.

### Erfahrungen mit der Verwendung des Unterrichtsmaterials

Die Aufgabe nutzt fachübergreifende Beziehungen. Das Messen der zum Einschrauben von 200 Schrauben notwendigen Zeit ermitteln die SchülerInnen eigenständig. Sie kommen in die Mathematikstunde schon mit Ergebnissen ihrer Messung und lösen die Aufgabe schon in der Gruppe.

Nützlich ist, das Unternehmen Rohde & Schwarz Vimperk, Abteilung „Endfertigung“, zu besuchen. Hier können die SchülerInnen die Tätigkeit des Schraubenautomaten direkt im Betrieb sehen.

### Musterlösung

### Erste Stunde

Die SchülerInnen „trainieren“ zuerst das Einschrauben (Abbildung 5.2). Wichtig hierbei ist genaues Arbeiten. Dann führt man das Einschrauben einer bestimmten Schraubenzahl – idealerweise zehn – durch. Die notwendige Zeit zum Einschrauben dieser Schraubenzahl bewegt sich beispielsweise zwischen 3 bis 10 Minuten. Die Ergebnisse werden in eine einfache Tabelle eingetragen (Name des Schülers/der Schülerin, die zum Einschrauben von 10 Schrauben benötigte Zeit).

*Abb. 5.2: Schraubübungen in der Schule*

### Zweite Stunde

Die SchülerInnen bringen in die Mathematikstunde Angaben über die Zeit, die man zum Einschrauben der gegebenen Schraubenzahl braucht (in unserem Falle sind es 10 Schrauben). Ferner arbeiten die SchülerInnen in Gruppen. Es wurden Gruppen je fünf SchülerInnen gebildet. In einer Beispielgruppe wurden folgende Werte ermittelt: 6,5 Minuten, 3 Minuten, 4 Minuten, 3,5 Minuten und 7,5 Minuten. Mit diesen Zeitangaben berechneten die SchülerInnen jeweils die eigene benötigte Zeit zum Einschrauben von 200 Schrauben.

Weiters wurde eine Gleichung für die gesamte Arbeitsleistung der Gruppe aufgestellt:

$$\frac{x}{130} + \frac{x}{60} + \frac{x}{80} + \frac{x}{70} + \frac{x}{150} = 1.$$

Die Lösung ist: x = 17 Minuten. In dieser Gruppe würde der Kühler also in 17min angebracht werden, falls alle zusammenarbeiten würden.

Die zum Einschrauben von 200 Schrauben notwendige Zeit unterscheidet sich bei einigen SchülerInnen sehr vom arithmetischen Mittel (verursacht durch die schlechtere manuelle Geschicklichkeit und durch die unrichtige – schräge – Schraubweise). Im Gruppenvergleich unterscheiden sich die Werte nicht mehr so viel. Durch diese Ergebnisse kann die Wichtigkeit der Arbeit im Team diskutiert werden.

# 6. Vermessungen mit dem Sinus-Magnet

**Einführung**

Das Unterrichtsmaterial widmet sich thematisch der Ausnutzung der goniometrischen Funktionen bei Lösung der praktischen Aufgaben in der technischen Praxis. Die Vorgaben für die SchülerInnen gehen von der Arbeit am Messgerät aus, dessen Aufgabe es ist, genaue Produktvermessungen durchzuführen (wir interessieren uns besonders um die Innenabmessungen), und dadurch sowohl die Genauigkeit als auch die Qualität der Fertigung zu überprüfen. Die Vorgangsweise und die Richtigkeit der Lösung der vorgegebenen Aufgaben sind im Material – in Notizen für Lehrer angegeben.

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autor | Jan Fiala |
| Alter | 15 – 16 Jahre |
| Dauer | 1 Unterrichtsstunde |
| SchülerInnen-material | Taschenrechner |
| Vorwissen und Voraussetzungen | Goniometrische Funktionen im rechtwinkeligem Dreieck<br>„Lesen“ von technischen Zeichnungen<br>Umformen von Formeln, Einsetzen in die Formel und Berechnungen mittels Taschenrechner |
| Lernergebinsse und Kompetenzen | Vertiefung und Festigung der Rechenfertigkeiten der SchülerInnen und ihrer Kenntnisse über Anwendung der goniometrischen Funktionen bei Lösung von praxisrelevanten Problemen<br>Vertiefung der Lesefertigkeit von technischen Plänen<br>mathematisches Modellieren in der Praxis |
| Anwendung | Die einschlägigen Berechnungen werden täglich von Mitarbeitern der Husky – KTW bei der Prüfung und Abmessungen der Produkte an der Messeinrichtung verwendet. |
| Unternehmen | Husky – KTW, s.r.o., Jindřichův Hradec |
| Quellen | Der Ausschnitt der technischen Zeichnung die Fotos wurden von Herrn Lukáš Rotta, Meister der Lehrlinge der Firma Husky – KTW, s.r.o., J. Hradec, zur Verfügung gestellt. |

**Arbeitsblatt für SchülerInnen**

In der Praxis erfolgt die Prüfung der Vermessung von neuen Erzeugnissen. Die Vermessung wird mit einem speziellen Messgerät durchgeführt, auf der sog. Koordinateneinrichtung (Abbildung 6.1). Es geht um eine mit beweglichen Sensoren versehene Apparatur, die mit einer berührungssensiblen Kugel versehen ist (Abbildung 6.2).


*Abb. 6.1: Messgerät – Koordinateneinrichtung*


*Abb. 6.2: Detail des Sensors an der Koordinateneinrichtung*

Bei einigen Produkten kann man die Abmessungen einfach durchführen, bei anderen kann es schwierig sein. Die Erzeugnisse beinhalten nämlich oft innere Öffnungen, in die der Sensor gelangen muss und so müssen einige innere Maßzahlen gemessen werden. Ein Beispiel einer solchen Öffnung ist ein ausgebohrtes Loch, also eine Öffnung in zylindrischen Form. Sind solche zylindrischen Öffnungen senkrecht zur Grundfläche des Körpers gebohrt, kann der Sensor in solche Öffnung leicht gelangen. Wenn jedoch die zylindrische Öffnung in das Erzeugnis so ausgebohrt wird, dass die Achse dieser Öffnung nicht senkrecht zur Grundfläche des Körpers ist (das ausgebohrte Loch hat also die Form des schiefen Zylinders), kann der Sensor die inneren Abmessungen der Öffnung nicht messen. Ein solches Problem löst man einfach so, indem man den gemessenen Körper um einen bestimmten Winkel neigen muss. Die Neigung des Erzeugnisses erfolgt mit Hilfe des sog. Sinusmagnets (Abbildung 6.3).

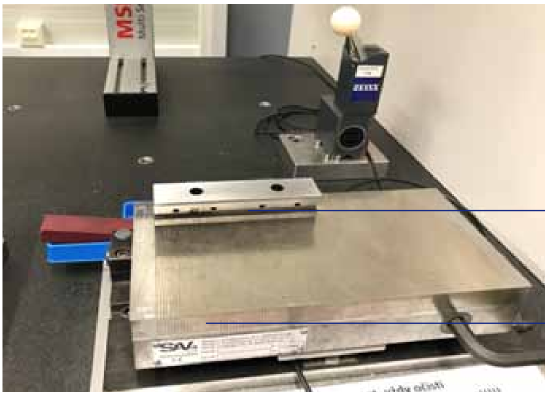



*Abb. 6.3: Sinusmagnet mit schräg ausgebohrten Löchern*

Weil meistens die Erzeugnisse aus gehärtetem Stahl oder aus verschiedenen Metalllegierungen vermessen werden, haftet das zu messende Erzeugnis dank magnetischen Eigenschaften gut auf der Oberfläche des Magneten. Will man den geneigten Sinusmagneten mit dem Erzeugnis in einer bestimmten Position fixieren, muss man das Ende des angehobenen Teiles mit einer Unterlegplatte stützen (Abbildungen 6.4 und 6.5).

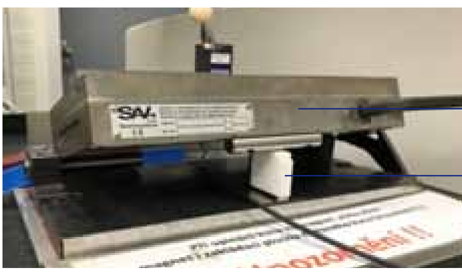
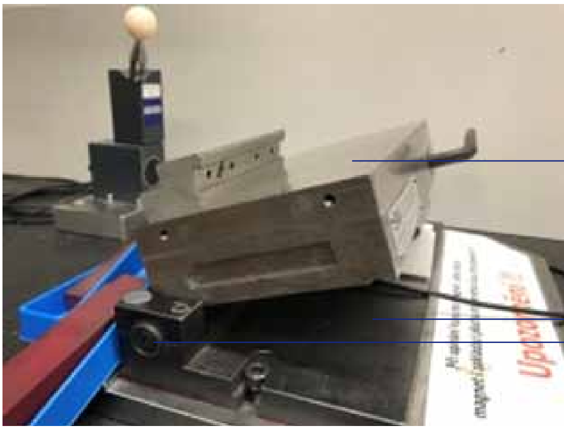



*Abb. 6.4: Geneigter Sinusmagnet*



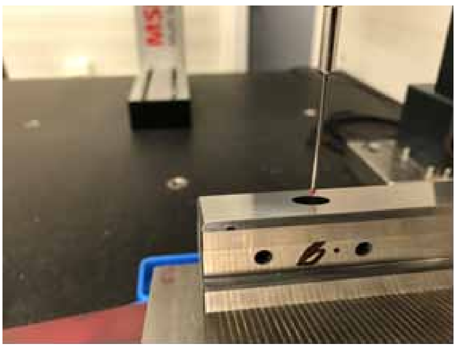
*Der angehobene Teil des Sinusmagnetes*

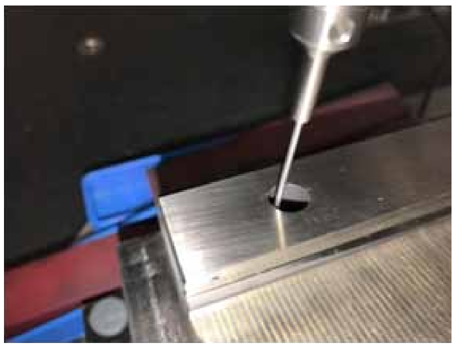
*Der untere Teil des Sinusmagnetes*

*Gelenkschraube des Sinusmagnetes*

*Abb. 6.5: Geneigter Sinusmagnet (Seitenansicht)*

Wenn es gelingt, den Magneten mit dem Erzeugnis im richtigen Winkel zu neigen, kann der Sensor die Innenabmessungen der im Erzeugnis gebohrten Öffnungen messen. Das Messen der Ausmaße vom Produktinneren wird auf nachstehenden Bildern dargestellt (Abbildung 6.6)





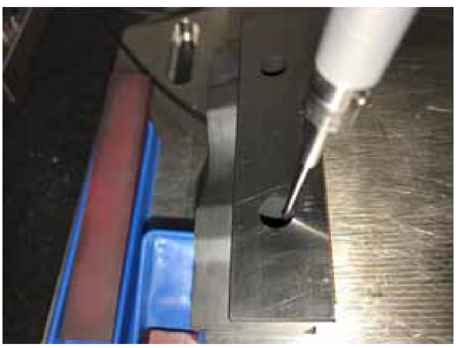


*Abb. 6.6: Messen der Innenöffnung des Erzeugnisses mit dem Messgerät mit Kugelsensor*

Für weitere Berechnungen der nachstehenden Aufgaben wird folgendes Produkt betrachtet (Abbildung 6.7):

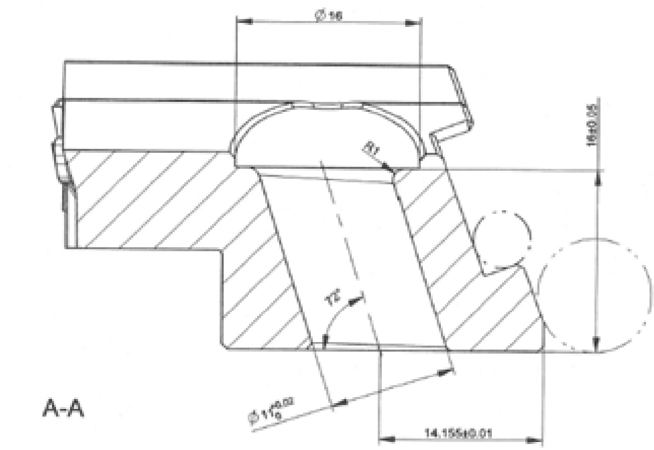



*Abb. 6.7: Technische Zeichnung des zu vermessenden Erzeugnisses*

Auf der technischen Zeichnung stellt der schraffierte Teil das Erzeugnis selbst dar. Im mittleren Teil befindet sich eine Öffnung mit dem Durchmesser von 11 mm (dieser Wert wird bei Berechnungen nicht angewendet), die Achse schließt den Winkel 72° mit der Grundfläche des Erzeugnisses ein. Es geht also um ein Erzeugnis mit einer Innenöffnung, deren Achse nicht rechtwinkelig zur Grundfläche des Erzeugnisses ist. So muss man das Erzeugnis für die Messung der Innenabmessungen der Öffnung am Sinusmagnet neigen. In der vorgegebenen Aufgaben wird jedoch der gemessene Körper vereinfacht dargestellt (ursprünglich war die Form des Körpers kompliziert – siehe Abbildung 6.7) und durch einen Quader modelliert, in dem eine zylindrische Öffnung gebohrt wird. Die Achse der Öffnung schließt mit der Grundfläche den Winkel 72° ein – ähnlich wie beim tatsächlichen Erzeugnis. Für weitere Berechnungen in den Aufgaben ist anzumerken, dass der neigbare Teil des verwendeten Sinusmagnetes 115 mm lang ist. Die Neigung des Sinusmagnetes mit dem angebrachten Körper wird vereinfacht wie folgt dargestellt (Abbildung 6.8):

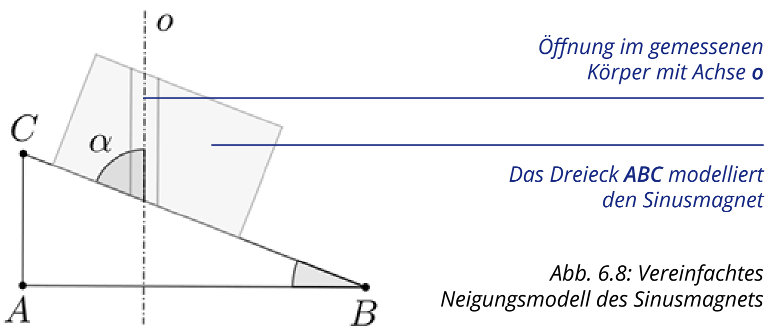



*Abb. 6.8: Vereinfachtes Neigungsmodell des Sinusmagnets*

### Aufgabe Nr. 1

Im Erzeugnis mit der Quader-Form ist eine Öffnung in zylindrischer Form, deren Achse den Winkel α mit der Grundfläche des Erzeugnisses einschließt. Um welchen Winkel soll man den Sinusmagnet mit dem Erzeugnis neigen, damit der Sensor des Messgerätes die Tiefe der Öffnung messen kann, wenn er sich lotrecht runter bewegt, d.h. senkrecht zur Unterlegplatte, auf der der Sinusmagnet liegt? Die Aufgabe ist für den Wert $\alpha=72°$ zu lösen.

### Aufgabe Nr. 2

Wie hoch soll man den Magneten mit befestigtem Erzeugnis an der Koordinaten-Messeinrichtung erhöhen, damit die zu messende Innenöffnung des Erzeugnisses in der Achse der lotrechten Bewegung des Messsensors mit Kugel passt? Die Magnetlänge ist 115 mm und der Winkel, den die Unterlegplatte des Magnetes und die horizontale Fläche einschließen, ist 18°.

### Aufgabe Nr. 3

Wie weit ist der Lotfußpunkt eines Lotes, das durch den Endpunkt des Magnetes von dem Gelenk geführt ist, mithilfe dessen der Magnet angehoben wird, vom Bohrloch entfernt? Die Magnetlänge ist 115 mm und der Winkel, der die Unterlegplatte des Magnetes und die horizontale Fläche umschließen, ist 18°.

### Aufgabe Nr. 4

Was für einen Winkel würde die Unterlegplatte des Magnetes mit der horizontalen Fläche einschließen, wenn der Magnet um 50 mm angehoben werden würde? Die Magnetlänge ist 115 mm.

### Erfahrungen mit der Anwendung des Unterrichtsmaterials

Die Vorgabe basiert auf der Praxis der Mitarbeiter der Firma Husky. Weil die SchülerInnen (und meistens auch die Lehrer) keine Erfahrungen mit technischer Praxis haben, kann es für die SchülerInnen am Anfang schwierig sein, Aufgaben zu verstehen. Zum besseren Verständnis der beschriebenen Lagen dienen die gemachten Fotos. Der Lehrer sollte sie für die Schüler kommentieren.

Beim Lesen der technischen Zeichnungen sollte der Lehrer den SchülerInnen helfen, falls die SchülerInnen nur selten mit technischen Zeichnungen in der Schule arbeiten. Besonderer Wert sollte hierbei auf Längen und Winkel gelegt werden. Am Anfang kann es für die SchülerInnen schwierig sein, zu unterscheiden, was das Erzeugnis selbst ist und was die darin gebohrten Öffnungen sind. Die größte Aufmerksamkeit sollten die Schüler den abgebildeten Winkeln widmen.

**Musterlösung**

Die Lösung der Aufgabe 1 ist der Abbildung zu entnehmen (Abbildung 6.9). Das Produkt ist als Rechteck dargestellt. Die Achse o der Öffnung schließt mit der Hypotenuse BC im rechtwinkeligen Dreieck ABC (mit dem rechten Winkel im Punkt A), Winkel α, ein. Der Winkel zu α ist ∢PRB und besitzt auch die Größe α. Also |∢RBP| ist 90° - α. Für α = 72° ist |∢RBP| = 18°.

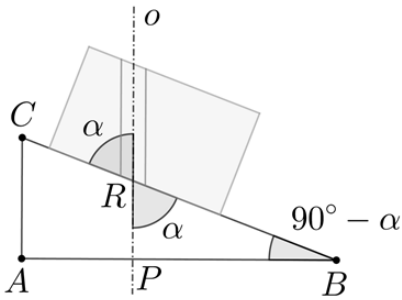



*Abb. 6.9: Modellage des Messvorgangs der Innenöffnung*

Die Lage von der Aufgabe 2 wird mit dem dreiwinkeligen Dreieck ABC (Abbildung 6.10) dargestellt.

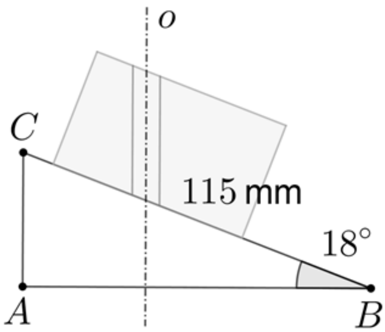



*Abb. 6.10: Rechtwinkeliges Dreieck ABC*

Zur Berechnung der Länge der Seite $AC$ verwendet man die Formel $\sin 18° = \frac{|AC|}{|BC|}$. Es folgt: $|AC| = |BC| \cdot \sin 18°$, also $|AC| = 115 \cdot \sin 18° \doteq 35{,}5$ mm.

Die Vorgabe der Aufgabe 3 kann man mit demselben Bild wie bei Aufgabe 2 (Abbildung 6.10) modellieren. Man sucht nach Länge $AB$ der Kathete im rechteckigen Dreieck $ABC$ (mit dem rechten Winkel bei $A$). Es folgt: $\cos 18° = \frac{|AB|}{|BC|}$. Davon $|AB| = |BC| \cdot \cos 18°$. Nach Einsetzen $|AB| = 115 \cdot \cos 18° \doteq 109{,}4$ mm.

Auch die vierte Aufgabe kann man mit demselben Bild modellieren (Abbildung 6.10). Wir suchen nach der Winkelgröße bei $B$ des rechtwinkeligen Dreiecks $ABC$ (mit dem rechten Winkel bei $A$), wenn: $|AC| = 50$ mm und $|BC| = 115$ mm. Es folgt mit dem Sinus: $sin\alpha = \frac{|AC|}{|BC|}$. Nach Einsetzen $sin\alpha = \frac{50}{115} \doteq 0{,}4347826087$, also $\alpha = sin^{-1}\frac{10}{23} \doteq 25°46'$.

# 7. Herstellungspreis eines Produktes

**Einführung**

Das Material wurde in Zusammenarbeit mit dem Unternehmen Motor Jikov a.s. erstellt. Der Schwerpunkt ist die Lösung eines realen Problems der Firma, nämlich der Berechnung des Herstellungspreises eines Produktes. Es werden hier mathematische Grundoperationen verwendet und man arbeitet mit physikalischen Einheiten. Eine erweiterte Variante dieses Unterrichtsmaterials steht zur Verfügung unter www.matematech.cz

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autor | Pavel Kolář |
| Alter | 16-19 Jahre |
| Dauer | 1 Unterrichtstunde |
| SchülerInnen-material | - Ausgedrucktes Arbeitsblatt<br>- Taschenrechner |
| Vorwissen und Voraussetzungen | - Kenntnisse der physikalischen Einheiten und ihrer Bedeutung und Umrechnung<br>- Mathematische Grundoperationen<br>- Prozentrechnen<br>- Finanzielle Grundkenntnisse (Lohn, Energiepreis etc.) |
| Lernergebnisse und Kompetenzen | - Sicherung und Übung der Kenntnisse über Umrechnungen, physikalische Berechnungen und Begriffe aus der Finanzmathematik<br>- Verstehen der Verbindung der Mathematik und Physik in der Praxis<br>- Kennenlernen von Grundlagen aus der Betriebswirtschaft<br>- Entwicklung von logischer Denkweise und Textverständnis |
| Anwendung | Darstellung der Lösung eines realen Problems in der tatsächlichen Firma. |
| Unternehmen: | MOTOR JIKOV Group a.s. |
| Quellen | Unterlagen, die von der Motor Jikov zur Verfügung gestellt wurden. |

## Arbeitsblatt für die SchülerInnen

### Angabe

Die Masse von eines Meters der Welle mit Durchmesser von 40 mm beträgt 9.865 g. Der Preis des Stoffes mit Durchmesser 40 mm, Güte 12 040, beträgt 25,- CZK/kg. Die Herstellungskapazität der Maschine ist 625 Stück/h. Die Leistungsaufnahme des Hauptmotors der Maschine macht 50 kWh und sein Wirkungsgrad beträgt 60%. Der Preis pro kWh Strom beträgt 2,50 CZK. Der Brutto-Lohn eines Arbeiters bei der Maschine beträgt 24.000,- CZK/Monat bei 156 Arbeitsstunden.

### Aufgabe

Berechnet die gesamten Herstellungskosten eines Produkts, für das 10 cm der Welle mit Durchmesser von 40 mm verbraucht werden. In die Lohnkosten müssen auch folgende Kosten eingerechnet werden: Fertigungsregiekosten (Lohnabgaben, Abschreibungen, Schutzmittel, Werkzeuge, Heizung, Aufräumen, Lohnanteil von Prüfung, Werkzeugeinrichter, Meister) in der Höhe von 400 % des Arbeiterlohnes für das erzeugte Produkt und Verwaltungsregiekosten (Löhne der Konstruktion, Technologe, Verkauf, Einkauf, Firmenchef, Abschreibungen der Computer, Gebäudeinstandhaltung) in der Höhe von 200 % des Arbeiterlohnes für das erzeugte Produkt.

## Erfahrungen mit Verwendung des Unterrichtsmaterials

Dieses Material ist für SchülerInnen von Mittleren Schulen gedacht, um sich mit physikalischen und mathematischen Begriffen auseinanderzusetzen.

Der Zweck des Arbeitsblattes ist es, in erster Linie den SchülerInnen zu zeigen, welche Aufgaben ein Mitarbeiter in einer realen Firma lösen kann. Sie sollen erfahren, wie die Berechnung des Preises eines Produktes erfolgt und was alles in den Preis einbezogen wird. Es ist geeignet mit den SchülerInnen zu diskutieren, wie sich weitere Kosten im Preis des Produktes widerspiegeln (Marge, Transportfirma, Lagerung, Steuern etc.), bevor sich der Kunde das Produkt kaufen kann.

Die vorgegebenen Werte kann man selbstverständlich ändern und sie den realen Werten in zum gegebenen Zeitpunkt anpassen. (z.B. Preise des Materials und der Energie, Lohn etc.)

Dieses Arbeitsblatt kann man auch im Tabelleneditor bearbeiten (z.B. MS Excel), wobei die SchülerInnen auch die Arbeit mit diesem Softwaretyp gleichzeitig üben.

Der Pädagoge sollte bei Bearbeitung dieses Arbeitsblattes die SchülerInnen selbständig arbeiten lassen und sich nur minimal in die Lösung einmischen, z.B. mit Erläuterung einiger Begriffe. Nachdem die SchülerInnen den Arbeitsauftrag gelöst haben, ist es angebracht, die ganze Vorgangsweise mit den SchülerInnen durchzugehen, damit sie die Lösung kontrollieren können.

**Musterlösung**

Material:

1 m 9 865 g 1 kg 25 CZK

10 cm = 0,1 m 986,5 g 986,5 g = 0,9865 kg 24,66 CZK

Arbeiterlohn:

24.000 CZK : 156 Stunden ≐ 153,85 CZK/h

153,85 CZK/h: 625 Stück/h ≐ 0,25 CZK/Stück

Energie:

Leistungsaufnahme der Maschine kWh 30 kWh · 2,50 CZK/kWh = 75 CZK

Wirkungsgrad 60% => Leistung 30 kWh 75 CZK: 625 Stück = 0,12 CZK/Stück

Marge:

Fertigungsregiekosten 400 % des Arbeiterlohnes 4 · 0,25 CZK = 1 CZK

Verwaltungsregiekosten 200 % des Arbeiterlohnes 2 · 0,25 CZK = 0,50 CZK

Summe 1,50 CZK

Summe: 24,66 + 0,25 + 0,12 + 1,50 = 26,53 CZK/Stück

**Weitere Unterrichtsmaterialien**

Ein weiteres Unterrichtsmaterial bezüglich des Themas „Finanzmathematik“ ist im Kapitel 8 dieses Buches angeführt.

# 8. Lohnberechnung

**Einführung**

Das Arbeitsblatt bearbeitet die Netto-Lohnberechnung von Mitarbeitern in einem realen Kontext. Die SchülerInnen bekommen eine Einsicht in die Lohnproblematik und setzen sich mit Begriffen, die für diesen Bereich typisch sind, auseinander. Anlass zu diesem Arbeitsblatt gab die Firma Motor Jikov. Die erweiterte Variante dieses Unterrichtsmaterials steht zur Verfügung unter www.matematech.cz.

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autor | Pavel Kolář |
| Alter | 16-19 Jahre |
| Dauer | 1 Unterrichtstunde |
| SchülerInnenmaterial | Ausgedrucktes Arbeitsblatt<br>Taschenrechner |
| Vorwissen und Voraussetzungen | Mathematische Grundoperationen<br>Prozentrechnen<br>Grundkenntnisse der Finanzmathematik |
| Lernergebnisse und Kompetenzen | Verstehen der Berechnungsweise des Netto-Lohnes<br>Sicherung der Kenntnisse über Prozentrechnung<br>Verstehen der Prinzips für Steuerabführungen und Lohnabzüge |
| Anwendung | Ausrechnung des Netto-Lohnes des Mitarbeiters in einer realen Firma |
| Unternehmen | MOTOR JIKOV Group a.s. |
| Quellen | Unterlagen, die von der Motor Jikov zur Verfügung gestellt wurden |

## Arbeitsblatt für SchülerInnen

**Angabe:**

Berechnung des Netto-Lohnes unterliegt mehreren Regeln:

| | |
|---|---|
| Grundlohn | Fixer Betrag im Arbeitsvertrag |
| beweglicher Lohnsatz | beweglicher Satz, er ist von der Pflichterfüllung abhängig |
| Abführungen des Arbeitgebers = 34 %, davon 25 % Sozialversicherung und 9 % Krankenversicherung | wird vom Brutto-Lohn berechnet |
| Lohnabzug des Mitarbeiters für Sozialversicherung = 6,5 % | wird vom Brutto-Lohn berechnet |
| Lohnabzug des Mitarbeiters für Krankenversicherung = 4,5 % | wird vom Brutto-Lohn berechnet |
| monatliche Einkommenssteuervorauszahlung = 15 % | wird vom Super-Brutto-Lohn berechnet |
| monatliche Steuerermäßigung des Steuerzahlers = 2.070,- CZK | fixer Betrag, gesetzlich festgelegt |

**Aufgabe**

Berechnen Sie Ihren Netto-Lohn anhand der genannten Angaben, wenn Ihr Grundlohn mit 24.000,- CZK im Arbeitsvertrag angeführt ist.

### Erfahrungen mit Verwendung des Unterrichtsmaterials

Das Arbeitsblatt kann man jederzeit anwenden, wenn man Finanzmathematik bzw. Finanzkenntnisse unterrichtet.

Der Zweck des Arbeitsblattes ist es, den SchülerInnen die Vorgangsweise zu zeigen, wie die Berechnung des Netto-Lohnes eines Mitarbeiters in der Firma erfolgt, damit sie - zumindest zur Orientierung – die Richtigkeit ihres künftigen Entgeltes überprüfen können. Direkt von der Firma Motor Jikov wurde mitgeteilt, dass sich die Mitarbeiter nicht mit den oben genannten Begriffen beschäftigen, sich aber im Nachhinein beschweren, wenn eine vermeintlich falsche Lohnabrechnung durchgeführt worden ist.

Die Lehrkraft sollte bei Bearbeitung dieses Arbeitsblattes die SchülerInnen selbständig arbeiten lassen und sich nur minimal in den Lösungsweg einmischen, z.B. mit Erläuterung einiger Begriffe. Am Ende der Lösung ist es angebracht, die ganze Vorgangsweise mit den SchülerInnen durchzugehen, damit sie die Lösung kontrollieren können.

Das Arbeitsblatt kann auch mit der Darstellung eines realen Lohnzettels aus einem Betrieb ergänzt werden. Man kann den SchülerInnen auch die Aufgabe geben, zu überprüfen, ob alle Berechnungen in Ordnung sind. Dank dieser Darstellung lernen sie sich auch in der Struktur ähnlicher Dokumente zu orientieren.

**Musterlösung**

**Die Lösung dieses Problems ist zum Beispiel mithilfe folgender Tabelle möglich:**

| | Mitarbeiter | | Arbeitgeber | |
|---|---|---|---|---|
| | Prozent | Betrag | Prozent | Betrag |
| Grundlohn | 100 % | 24.000,- | | |
| Beweglicher Satz des Lohnes | 20 % | 4.800,- | | |
| Brutto-Lohn | | 28.800,- | | |
| Sozialversicherung | 6,5 % | 1.872,- | 25 % | 7.200,- |
| Krankenversicherung | 4,5 % | 1.296,- | 9 % | 2.592,- |
| Super-Brutto-Lohn | | | | 38.592,- |
| Monatliche Steuervorauszahlung | 15 % | 5.789,- | | |
| Steuerermäßigung | | 2.070,- | | |

Netto-Lohn:

28.800 - 1.872 - 1.296 - (5.789 - 2.070) = <u>21.913,-</u>

Summe Prozent der Abführungen aus Super-Brutto-Lohn:

(21.913/38.592) × 100 = 56,78 % => <u>43,22 %</u>

**Weitere Unterrichtsmaterialien**

Weitere Unterrichtsmaterialien über Finanzmathematik sind im Kapitel 7 dieses Buches angeführt.

# 9. Mathematik der Brückenbauten – Schrägseilbrücke über die Oder und den Antošovické See

**Einführung**

Der Mensch bildet, dank seines Vernunfterkenntnisses und praktischer Fertigkeiten – gewöhnlich im Einklang mit der Natur – verschiedene Objekte, die sein Leben wertvoller machen. Dazu gehören zweifellos die Brückenbauten, die zur Überbrückung von Flüssen, Täler oder anderen Hindernisse dienen. Jedem Aufbau geht der architektonische Entwurf voran, der von den hervorragenden Kenntnissen in Geometrie ausgeht. Davon werden allfällige technische Änderungen und Parameter so abgewickelt, dass der Entwurf des Architekten den realen Bedingungen und physikalischen Gesetzen entspricht. Die Aufgaben dieses Arbeitsblattes wurden von der Schrägseilbrücke der ursprünglich geplanten Autobahn D47 (heute Bestandteil der D1) in der Nähe von Bohumín inspiriert. Die erweiterte Variante des Unterrichtsmaterials, die auch weitere Brückenbauten umfasst, findet man unter www.matematech.cz.

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autor | Hana Mahnelová |
| Alter | 16 – 19 Jahre |
| Dauer | 30 Minuten |
| SchülerInnen-material | - Taschenrechner |
| Vorwissen und Voraussetzungen | - Arithmetische Folge<br>- Goniometrische Funktionen im rechtswinkeligen Dreieck<br>- Satz des Pythagoras<br>- Lernen der Begriffe Hängestange, Brückenfahrbahn, Pylon |
| Lernergebnisse und Kompetenzen | - Entwicklung der Lesekenntnisse des Schülers<br>- Datenablesung aus Vorlage der Bauweise<br>- Anwendung der Folge<br>- Anwendung der Berechnungen im rechtwinkeligen Dreieck |
| Anwendung | Baupraxis beim Brückenbau |
| Links | [1] www.casopisstavebnictvi.cz/zaveseny-most-pres-odru_A1613_I24 |

**Arbeitsblatt für SchülerInnen**

*Abb. 9.1: Schrägseilbrücke über die Oder und den Antošovické See, übernommen von z [1], Autoren der Aufnahmen: Tomáš Malý, Jiří Dvořák*

Zu den interessanten Bauten des Jahres 2008 gehört zweifellos auch die Autobahnbrücke über den Fluss Oder und über den See Antošovické (Abbildung 9.1). Das Bauwerk ist von jeder Seite mit 14 Hängestangen auf einem Pfeiler in der Mitte der Brücke (Abbildung 9.2) aufgehängt. Die Hängestangen sind von 23 m bis 99 m lang und der Abstand zwischen ihren Verankerungspunkten am Pfeiler beträgt je 1,2 m. Der Pfeiler mit der Gesamthöhe von 46,81 m ragt 37,5 m aus der Brückenfahrbahn hervor. Weitere Daten sind auf der Abbildung 9.2 angeführt.

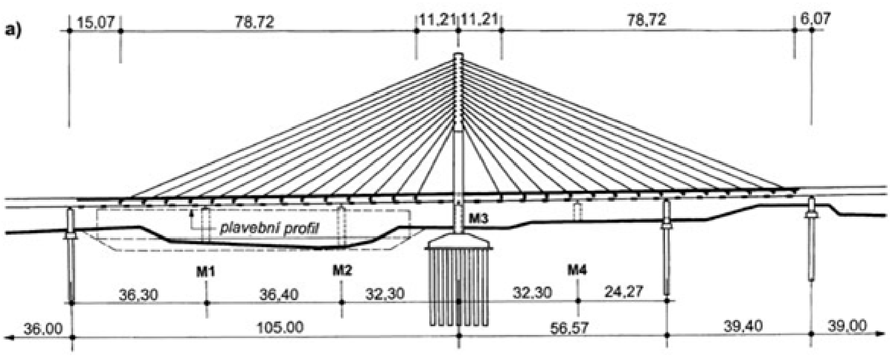



*Abb. 9.2: Längsschnitt eines aufgehängten Feldes der Schrägseilbrücke, übernommen von [1], Autoren der Zeichnung: Tomáš Malý, Jiří Dvořák*

**Aufgabe:**

a) Berechne mit Hilfe einer arithmetischen Folge den Abstand der symmetrischen Verankerung von Hängestangen auf der Brückenfahrbahn.

b) In welcher Höhe über der Brückenfahrbahn werden die kürzesten Hängestangen verankert?

c) In welchem Winkel vom Pfeiler werden die kürzesten und die längsten Hängestange aufgehängt?

### Erfahrungen mit Anwendung des Unterrichtsmaterials

Das AB kann auch als eine selbständige Arbeit des Schülers vergeben werden.

Das Problem a) kann man auch anders lösen, deshalb ist in der Vorgabe die gezielte Anforderung auf Verwendung der arithmetischen Folge eingetragen.

### Musterlösung

Weil die Verankerung der Hängestange symmetrisch ist, ist der Abstand zwischen zwei benachbarten Hängestangen immer gleich. Dieser Abstand wird d bezeichnet. Dem Bild 9.2 kann entnommen werden, dass die Anbringung der kürzesten Hängestange im Abstand von 11,21 m ist. Schreitet man in dieser Richtung zur längsten Hängestange vor, die vom Pfeiler im Abstand von 78,72 + 11,21 = 89,93 m ist, dann bilden die Abstände aller Hängestange vom Pfeiler eine arithmetische Folge mit der Differenz *d*.

Deshalb: $a_1$=11,21, $a_{14}$=89,93 und es gilt: $a_{14}=a_1+13d$, die Differenz kann folgendermaßen ausgedruckt und eingesetzt werden:

$d = (a_{14} - a_1):13$

$d = (89{,}93 - 11{,}21):13 \approx 6{,}06$

Die Hängekabel werden in der Brückenfahrbahn nach 6,06 Metern verankert.

Der gegebene Abstand wird mithilfe des Satzes des Pythagoras im rechtwinkeligen Dreieck berechnet, in dem die Hypotenuse die kürzere Hängestange ist und die kürzere Kathete der kürzeste Abstand der Verankerung dieser Hängestange vom

Pfeiler ist. Wenn man die gesuchte Länge mit *x* bezeichnet, so gilt:

$x^2 = 23^2 - 11{,}21^2 \implies x \approx 20{,}08.$

Die ersten Hängestangen am Pfeiler werden 20,08 Meter über die Brückenfahrbahn verankert.

Auch bei der Lösung dieser Aufgabe reicht die Betrachtung des rechtwinkelige Dreiecks. Es wird eine goniometrische Gleichung angewendet. Für den Fall der kürzesten Hängestange verwendet man das gleiche Dreieck wie in der vorigen Ausrechnung. Wenn man den zu suchenden Winkel mit α bezeichnet, dann gilt:

$\sin\alpha = 11{,}21/23 \Rightarrow \alpha \approx 29°10´$

Analog wird auch die Neigung der längsten Hängestange berechnet, sie wird mit $\beta$ bezeichnet. Die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks ist die Länge der Hängestange, die kürzere Kathete ist der Abstand 89,93 m.)

$\sin\beta = 89{,}93/99 \Rightarrow \beta \approx 65°17´$

**Weitere Unterrichtsmaterialien**

Unter www.matematech.cz stehen weitere Unterrichtsmaterialien zur Verfügung, die durch interessante Brückenbauten in der Tschechischen Republik inspiriert wurden. Z.B. „Regenbogen" in Bechyně, Marienbrücke in Ústí nad Labem oder Pfad in Budweis. Die gekürzte Version der ersten davon ist ein Teil dieses Buches (Kapitel 10).

Neben den schon angeführten mathematischen Themen werden in den Aufgaben zum Beispiel Kenntnisse über quadratische Funktionen und Abweichungen der Ebenen geprüft. Die Verbindung mit der technischen Praxis erfolgt durch die Datenerhebung aus der graphischen Planung einzelner Bauten, die ein Teil der Arbeitsblätter sind.

# 10. Mathematik der Brückenbauten – „Regenbogen“ in Bechyně

### Einführung

Schon im vergangenen Jahrhundert haben unsere Ahnen den Fluss Lausitz in südböhmischem Bechyně mit der Straßen- und gleichzeitig Eisenbahnbrücke überbrückt. Das Ergebnis ist nicht nur ein zweckmäßiger Bau in der Form einer einzigartigen Bogenbrücke, sondern es ist auch ein einmaliges künstlerisches Objekt. Auch hier können einige Themen zur mathematischen Modellbildung gefunden werden. Wir konzentrieren uns auf die analytische Geometrie des Kegelschnittes und Darstellung des Einsatzes vom Koordinatensystem als ein unerlässliches Instrument für die Lösung von mathematischen Aufgaben. Die erweiterte Variante des Unterrichtsmaterials, sowie weitere Brückenbauten, stehen zur Verfügung unter www.matematech.cz

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autor | Hana Mahnelová |
| Alter | 16 – 19 Jahre |
| Dauer | 15 Minuten |
| SchülerInnen-material | Bleistift<br>Taschenrechner |
| Vorwissen und Voraussetzungen | Grafische Darstellung im Kartesischen Koordinatensystem<br>Funktionsgleichung der Parabel<br>Lernen der Begriffe Spannweite und Stichhöhe des Brückenbogens |
| Lernergebnisse und Kompetenzen | Förderung der Lesekenntnisse<br>Entwicklung von grafischen Vorstellungsvermögen im Koordinatensystem<br>Fähigkeit der Anwendung von Mathematik in realen Problemen |
| Anwendung | Baupraxis beim Brückenbau |
| Links | [1] www.inbest.cz/profil-spolecnosti |

**Arbeitsblatt für SchülerInnen**

*Abb. 10.1: Brücke über die Lausitz in Bechyně, übernommen von [1],*
*Autor der Aufnahme: Michael Šmucr*

Am 1. 10. 2014 wurde die Bechyněr Brücke (Abbildung 10.1), oft als „Regenbogen“ oder „Regenbogenbrücke“ bezeichnet, zum nationalen Kulturdenkmal erklärt. Es handelt sich dabei um eine Straßen- und gleichzeitig Eisenbahnbrücke. Ihr Aufbau begann 1926 und sie wurde am 28. Oktober 1928 feierlich eröffnet. Die Rekonstruktion erfolgte 2003 – 2004. Die Brücke wird mit einem Eisenbeton-Bogen mit einer Spannweite von 90 m und Stichhöhe von 38 m gebildet, wobei der höchste Punkt ungefähr 50 m über dem Flusswasserspiegel der Lausitz liegt. Nehmen wir an, der Bogen hat die Form einer Parabel.

**Musterlösung**

Wenn die Anbringung der konkaven Parabel so gewählt wird, dass der Eckpunkt folgende Koordinaten hat: V[45,38] (wie in der Abbildung 10.2), dann lautet die Gleichung

$$(x-45)^2=-2p\,(y-38),\text{ wobei Parameter } p>0.$$

Durch Einsetzen der Koordinaten von Punkten A[0,0] oder B[90,0] wird der Wert des Parameters p=2025/76 festgelegt. Der Brennpunkt befindet sich auf der Achse o der Parabel und im Abstand, der um die Hälfte des Parameters kleiner ist, als die y-Koordinate des Eckpunktes. Deshalb gilt: F[45,3751/152] und der reale Abstand vom Wasserspiegel kann zum Beispiel mit der Summe 3751/152+12 berechnet werden, was ca. 37 Meter sind.

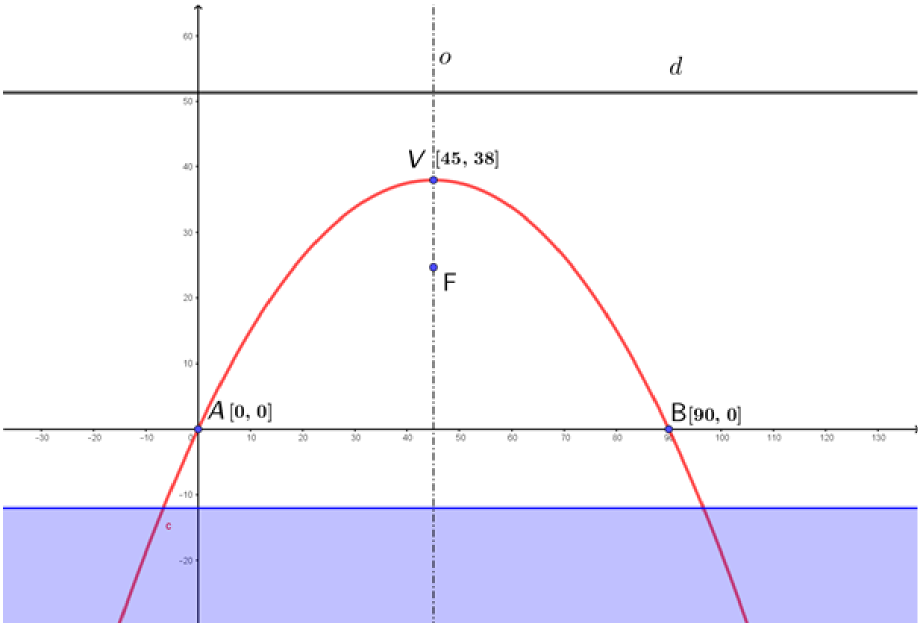



*Abb. 10.2: Darstellung des Brückenbogens im Programm GeoGebra*

### Erfahrungen mit Anwendung des Unterrichtsmaterials

Die Aufgabe ist zur selbständigen Arbeit der Schüler bestimmt.

Die Bogenspannweite stellt den höchsten Abstand z.B. der Stützen, die Stichhöhe ist der kürzeste Abstand des Bogeneckpunktes von der Verbindung der Stützenfüße. Erfahrungen im Unterricht zeigten, dass die SchülerInnen diese Begriffe intuitiv verstehen.

### Weitere Unterrichtsmaterialien

Unter www.matematech.cz stehen weitere Unterrichtsmaterialien zur Verfügung, die durch interessante Brückenbauten der Tschechischen Republik inspiriert sind. Z.B. Schrägseilbrücke über die Oder und den Antošovické See in der Nähe von Bohumín, Marienbrücke in Ústí nad Labem oder Pfad in Budweis. Die gekürzte Version der ersten davon ist ein Teil dieses Buches (Kapitel 9).

Die Verbindung mit der technischen Praxis erfolgt durch die Datenerhebung aus der graphischen Planung einzelner Bauten, die ein Teil der Arbeitsblätter sind.

# 11. Technische Darstellung

**Einführung**

Die technische Darstellung ist ein integrierter Bestandteil des normalen sowie beruflichen Lebens, deshalb sollten die SchülerInnen, die die Pflichtschule verlassen, mit den Grundzügen bekannt gemacht werden. Die SchülerInnen im Projekt „MatemaTech“ konnten sich davon bei der Exkursion in der Motor Jikov überzeugen. Hier haben sie gesehen, dass die CNC-Maschinen, die mit Computern gesteuert werden, nach den Programmen arbeiten, die von Programmierern nach technischen Zeichnungen der gegebenen Erzeugnisse hergestellt werden.

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autor | Květuše Mrázová |
| Alter | 12 – 15 Jahre |
| Dauer | 3 – 4 Stunden |
| SchülerInnen-material | Baukasten für rechteckige Darstellung, Modelle der Bauteile, kariertes Papier, interaktive Tafel (Beamer) |
| Vorwissen und Voraussetzungen | Lesen von technischen Zeichnungen<br>Grundkenntnisse des Zeichnens<br>Umrechnungen von Längeneinheiten<br>Maßstab<br>Grundkenntnisse des Raumvorstellungsvermögens |
| Lernergebnisse und Kompetenzen | Anwendung der Mathematik bei der technischen Darstellung<br>Orientierung in der technischen Zeichnung<br>Fähigkeit zum Zeichnen einer einfachen technischen Skizze, Zeichnung<br>Entwicklung des Vorstellungsvermögens |
| Anwendung | Das Auseinandersetzen und Verstehen von technischen Zeichnungen ist sowohl im Alltag als auch im (technischen) Berufsleben eine wichtige Kompetenz. |
| Links | MOTOR JIKOV Group a.s. |
| Quellen | [1] I. Škára: Pracovní vyučování – technické práce v 7. ročníku ZŠ, SPN, 1990.<br>[2] E. Kraemer a kol.: Matematika pro 8. ročník ZŠ, III. díl – rýsování, SPN, 1983. |

**Arbeitsblatt für SchülerInnen**

### Aufgabe Nr. 1

Ordne einen Buchstaben zu jeder Zahl so zu, dass die Projektionen dem Bauteil entsprechen. (Abbildung 11.1).

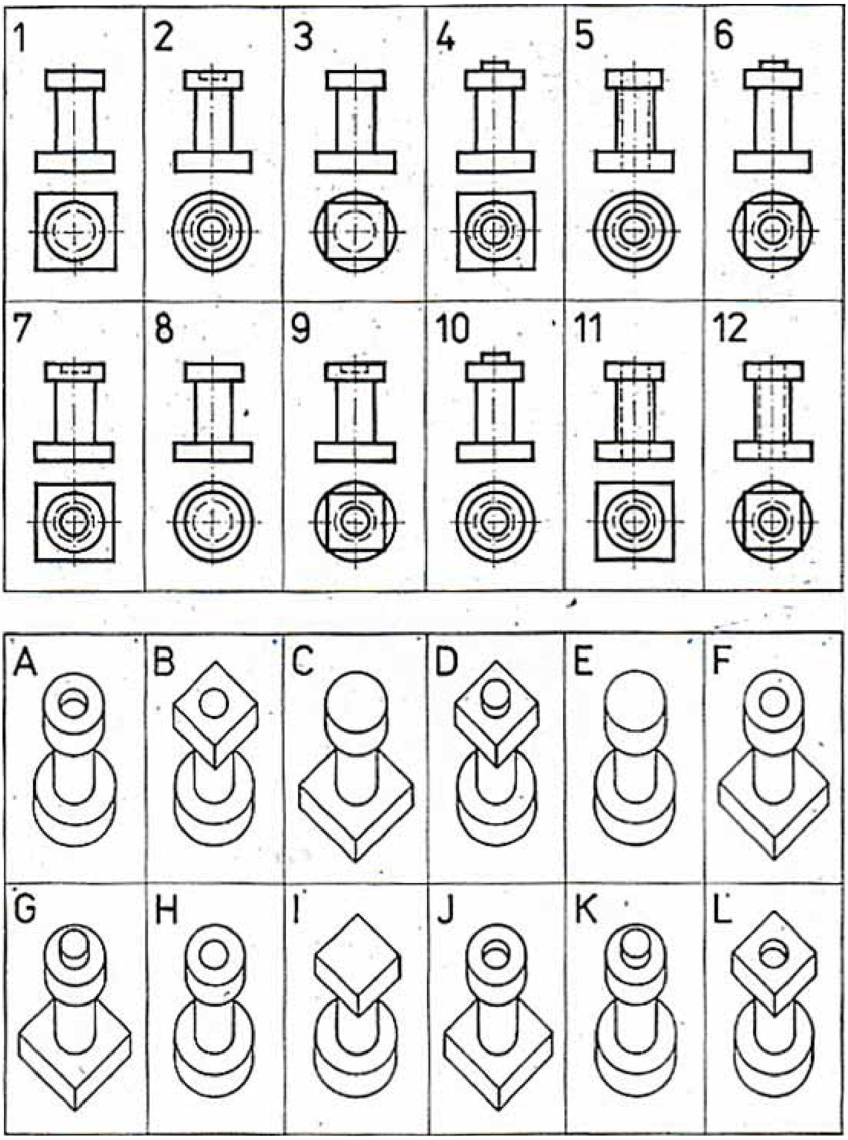



*Abb. 11.1: Projektionen, übernommen von [1]*

### Aufgabe Nr. 2

Erstelle eine technische Zeichnung des gewählten Bauteiles im Maßstab 1 : 1 mit den vorgegebenen Angaben aus Abbildung 11.2.

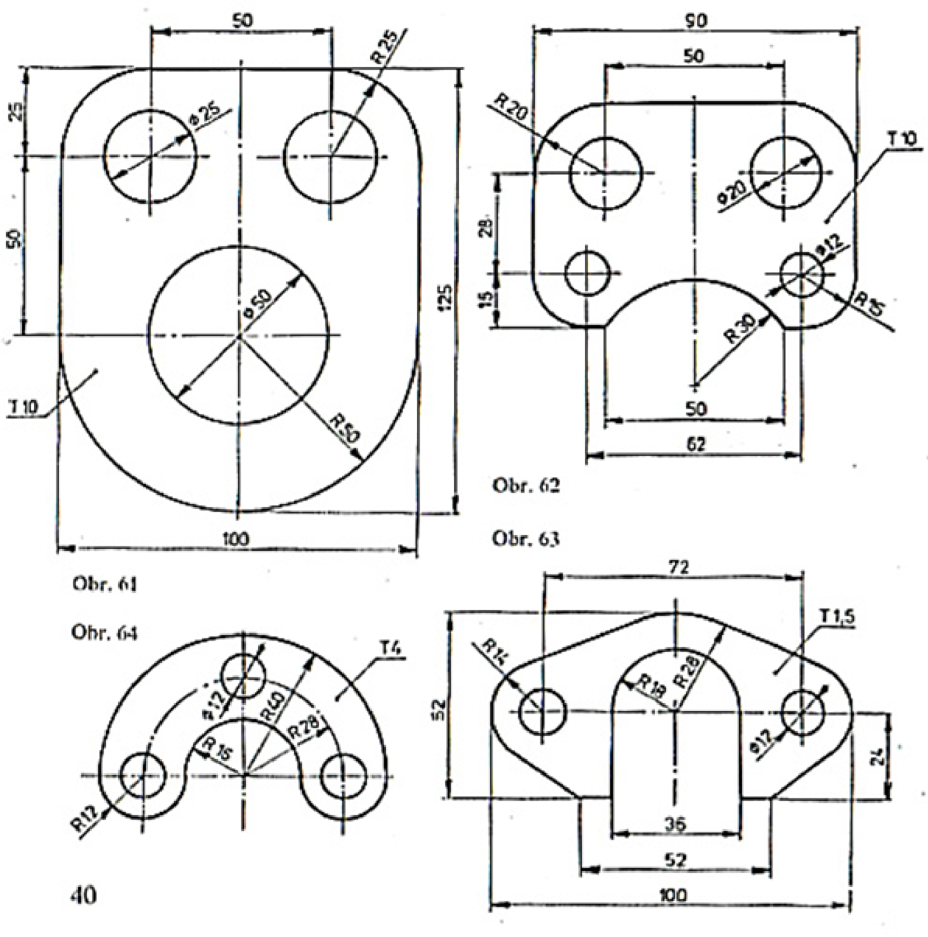



*Abb. 11.2: Technische Zeichnung eines Bauteiles, übernommen von [2]*

**Erfahrungen mit Anwendung des Unterrichtsmaterials**

Diese Unterlagen haben sich in der Praxis gut bewährt. Sie können die Entwickelung von logischem Denken sowie Vorstellungsvermögen helfen. Dies kann sowohl in der Mathematik (Skizzen der Körper, Analyse der Konstruktionsaufgaben, Umrechnungen) als auch in praktischen Fächern eingesetzt werden. Alle Erzeugnisse, die die SchülerInnen in diesen Stunden herstellen, werden nach technischen Zeichnungen gefertigt. Ohne zusätzliche Kenntnisse über eine geeignete Technologie zur Konstruktion des Gegenstands wird den SchülerInnen dieser Arbeitsauftrag schwer fallen.

Bevor die SchülerInnen also mit der Bearbeitung der vorgegebenen Aufgaben beginnen, müssen sie sich mit der verwendeten Technologie bekannt machen – es ist möglich, die Software GeoGebra zu verwenden, um verschiedene Perspektiven eines Objekt zu betrachten.

Danach ist die technische Darstellung mithilfe des Baukastens – Projektionsecke – einzuüben. Falls sie diesen Baukasten in der Schule nicht haben, kann man ihn auch aus einer Schachtel herstellen. Die Körper kann man zum Beispiel aus Styropor herstellen. Die Kärtchen können laminiert und an die Wände der Schachtel mit Büroklammern fixiert werden – siehe Abbildungen 11.3 und 11.4.A.

*Abb. 11.3: Projektionsecke – einzelne Bestandteile*

*Abb. 11.4: Projektionsecke – zusammengestellter Baukasten*

**Musterlösung**

Lösung der Aufgabe 1:

1 – C; 2 – A; 3 – I; 4 – G; 5 – H; 6 – D; 7 – J; 8 – E; 9 – L; 10 – K; 11 – F; 12 – B.

Probleme in der Lösung treten am häufigsten bei Bauteilen auf, die eine teilweise oder durchgehende Öffnung haben.

Lösung der Aufgabe 2:

Die SchülerInnen erstellen anhand der ausgedruckten Vorlage eine Zeichnung. Zu Beginn ist es sinnvoll, die Regeln zur Maßeintragung und Verwendung der Linienarten mit den SchülerInnen zu wiederholen.

Wenn Sie Modelle der maschinellen Bauteile haben (Abbildung 11.5), können die SchülerInnen einen tatsächlichen Bauteil wählen, ihn abmessen und zeichnen.

*Abb. 11.5: Modelle der maschinellen Bauteile*

**Weitere Unterrichtsmaterialein**

Die erweiterte Variante dieses Unterrichtsmaterials steht zur Verfügung unter www.matematech.cz – Unterrichtsmaterialien – Technische Darstellung.

Hier sind auch zusätzliche Ratschläge für LehrerInnen angeführt.

Auf der Internetseite www.matematech.cz widmen sich der technischen Darstellung auch die Unterrichtsmaterialien: Messen der Ausmaße des Dorngusses und Gewichtsberechnung eines Werkstücks für die Herstellung des Getriebes in einem Rasenmäher. Die verkürzte Version des letzteren ist ein Bestandteil dieses Buches (Kapitel 14).

# 12. Planung der Herstellung eines Spielzeugs (Kreisel)

**Einführung**

In diesem Unterrichtsmaterial sind verschiedene Berechnungen durchzuführen, die bei der Planung zur Herstellung eines Kreisels, durchgeführt werden müssen. Darunter fallen zum Beispiel die Berechnungen folgender Parameter: Zeitaufwand, Materialverbrauch, Volumen und Abfallmenge. Das folgende Material entstand unter Beteiligung der Firma ZVVZ Milevsko. Man kann dieses Material mit einer Exkursion zu dieser Firma verbinden. Die erweiterte Variante dieses Unterrichtsmaterials und weitere ähnliche Materialien zum Thema der Herstellung eines Kreisels stehen unter www.matematech.cz zur Verfügung.

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autor | Jitka Nováková |
| Alter | 14 – 16 Jahre |
| Dauer | 1 Stunde |
| SchülerInnen-material | Mathematisch-physikalische Tabelle<br>Taschenrechner |
| Vorwissen und Voraussetzungen | Volumen des Zylinders<br>Gleichungen lösen<br>Prozentrechnung<br>Lineare Funktionen<br>Umformungen |
| Lernergebnisse und Kompetenzen | Die SchülerInnen beherrschen den mathematik-Lehrstoff der Grundschule.<br>Die SchülerInnen können praxisrelevante Aufgaben lösen |
| Anwendung | Planung der Herstellung eines Kreisels |
| Zusammenarbeit mit dem Unternehmen | ZVVZ a.s. (Milevsko) |
| Quellen | Technische Informationen von der ZVVZ Milevsko |

**Arbeitsblatt für SchülerInnen**

Der Kreisel wird an einer CNC-Maschine aus Rundstahl mit einem Durchmesser von 50 mm hergestellt. Die Länge des verwendeten Halbfabrikates ist 60 mm. Der Kreisel wird aus der Stahlsorte S235JR hergestellt. Die Dichte beträgt ca. 7850 kg/m3. Das Gewicht des Erzeugnisses ist 0,108 kg.

*Abb. 12.1: Rundstahl und der davon erzeugte Kreisel*

## Aufgabe Nr. 1

a) Bestimme das Volumen des Halbfabrikates und seine Masse.

b) Bestimme das Volumen des Erzeugnisses.

c) Bestimmt den prozentuellen Anteil des Abfalls bei der Herstellung des beschriebenen Kreisels.

## Aufgabe Nr. 2

Zur Herstellung mehrerer Kreisel wird ein Stahlstab mit einem Durchmesser von 50 mm und einer Länge von 1500 mm verwendet.

Bestimmt die Anzahl der Stahlstäbe, die benötigt werden, um daraus 15 Kreisel zu erzeugen.

## Aufgabe Nr. 3

Der Kreisel wird auf der CNC-Maschine hergestellt. Die Vorbereitungsschritte (Programmieren der CNC-Maschine) dauern 60 Minuten. Die Herstellung eines Kreisels dauert 9 Minuten.

a) Bestimme die Gleichung zur Berechnung der Zeit, die für Herstellung der erwünschten Zahl von Erzeugnissen notwendig ist. Um welchen Funktionstyp handelt es sich dabei?

b) Bestimme die Zeit zur Herstellung von 15 Erzeugnissen.

**Erfahrungen mit Anwendung des Unterrichtsmaterials**

Das Arbeitsblatt kann man am Ende des 9. Jahrgangs zum Schluss der Exkursion in die ZVVZ anwenden.

Es ist auch als Überprüfung für SchülerInnen des 1. Jahrgangs der Mittelschule geeignet. Berechnungen aus Aufgabe Nr. 1 kann man mithilfe eines Messzylinders und einer Waage als Experiment überprüfen.

**Musterlösung**

### Aufgabe Nr. 1

a) Bestimme das Volumen und die Masse des Halbfabrikates:

$d$ = 50 mm, $v$ = 60 mm, $V$ = ? $cm^3$

$$V = \pi r^2 v$$

$$V = \pi \cdot 25^2 \cdot 60$$

$$V = 37500\pi = 117809{,}7245\ mm^3$$

$$V = 117809{,}7245\ mm^3 = 117{,}8097245\ cm^3$$

Folgerung: Das Volumen des Halbfabrikates ist ca. 117,8097245 $cm^3$.

Bestimme das Gewicht des Halbfabrikates.

$V$ = 117809,7245 $mm^3$ = 0,0001178097245 $m^3$, $\rho$ = 7850 $kg/m^3$, $m$ = ? kg

$$m = \rho \cdot V$$

$$m = 7850 \cdot 0{,}0001178097245$$

$$m = 0{,}924806337\ kg.$$

Folgerung: Das Gewicht des Halbfabrikates ist ca. 0,924806337 kg.

b) Berechne das Volumen des Erzeugnisses:

$\rho$ = 7850 $kg/m^3$, $m$ = 0,108 kg, $V$ = ? $cm^3$

$$V = m/\rho$$

$$V = 0{,}108 : 7850$$

$$V = 0{,}00001375796178\ m^3 = 13{,}757962\ cm^3.$$

Folgerung: Das Volumen des Kreisels ist ca. 13,757962 $cm^3$.

c) Prozentueller Anteil des AbfallS

Mithilfe des Volumen

100 % ..................117,8097245 $cm^3$

$x$ % .......................... 13,757962 $cm^3$

$$\frac{x}{100} = \frac{13,757962}{117,8097245}$$

$x$ = 11,678 %

Mithilfe der Masse

100 % ................. 0,924806337 kg

$x$ % .................................... 0,108 kg

$$\frac{x}{100} = \frac{0,108}{0.924806337}$$

$x$ = 11,678 %

Abfall: 100 % – 11,678 % = 88,32 %.

Folgerung: der Abfall bildet ca. 88,32 %.

### Aufgabe Nr. 2

Bestimme die Stückzahl der Rundstahle, die zur Herstellung von 15 Erzeugnissen notwendig sind.

Die Länge des verwendeten Halbfabrikates für die Herstellung des Kreisels ist

60 mm.

$x = 1500 \text{ mm} : 60 \text{ mm} = 25$ Stück

Folgerung: Aus einem Rundstahl werden 25 Stück Erzeugnisse hergestellt. Daher reicht ein Rundstahl mit den vorgegebenen Maßen aus.

### Aufgabe Nr. 3

a) Bestimme die Gleichung zur Berechnung der Zeit für Herstellung der gewünschten Zahl von Erzeugnissen. Um welchen Funktionstyp handelt es sich dabei?

$y = 60 + x \cdot 9$

$y = 9x + 60$   es ist eine lineare Funktion.

b) Bestimmt die Zeit zur Herstellung von 15 Erzeugnissen.

$y = 15 \cdot 9 + 60 = 195$ Minuten.

Die erforderliche Zahl der Erzeugnisse wird 195 Minuten nach dem Zeitpunkt, in dem man mit dem Programmieren der Maschine begonnen hat, hergestellt sein.

# 13. Mittelalterlicher Kran

**Einführung**

Der Lehrstoff über Proportionalität wird anhand eines Anwendungsbeispiels geübt. Dabei werden die mittelalterlichen Methoden zur Sanierung des Turmes Jakobínka in Rožmberk nad Vltavou in den Jahren 2018-19 betrachtet. Die erweiterte Variante dieses Unterrichtsmaterials steht zu Verfügung unter www.matematech.cz.

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autor | Marek Tyle |
| Alter | 12 – 15 Jahre |
| Dauer | 1 Unterrichtsstunde |
| SchülerInnen-material | kopierte Angabe oder Beamer |
| Vorwissen und Voraussetzungen | Proportionalität<br>Schlussrechnen<br>Bruchrechnen<br>Umformen |
| Lernergebnisse und Kompetenzen | Analyse eines technischen Problems<br>Mathematisierung eines realen Problems<br>Üben von Berechnungen |
| Anwendung | Betrachten von historischen Lösungen |
| Quelle | Artikel der Tschechischen Nachrichtenagentur ČTK, Fotografien aus der Internetseite des Nationalen Denkmalschutzamtes; detailliert am Ende des Kapitels |

**Arbeitsblatt für SchülerInnen**

*Bericht der Tschechischen Nachrichtenagentur ČTK 30. 5. 2018 [1]:*

**Mittelalterlicher Kran**

An der Sanierung des Turms wird ein mittelalterlicher Kran arbeiten. Er wird von Menschenkraft angetrieben.

Die Experten aus dem Budweiser Denkmalschutzamt setzen nun in ihrer sechsten Saison das einzigartige bauliche Experiment, die Renovierung des Turmes Jakobínka in Rožmberk nad Vltavou, fort. Mithilfe der Reproduktion eines mittelalterlichen Kranes, der mit Menschenkraft angetrieben wird, steht jetzt die Dachsanierung an.

Die Nachbildung des mittelalterlichen Kranes ist 14 Meter lang und 7 Meter hoch, und sie wurde Ende letzten Monates zur Turmspitze hochgehoben.

Mit seiner Hilfe werden steinerne Kragträger, Bauteile für das Dachstuhl- und Umgangsbauwerk, Bedachung, Steine und Mörtel zur Sanierung des Turmes dreißig Meter hoch gehoben und Schutt heruntergetragen.


*Abb. 13.1: Turm Jakobínka mit dem mittelalterlichen Baugerüst in Arbeit, übernommen von [2] (links); Tretrad als Antrieb des Kranes vor seinem Einbau zum Turm, übernommen von [3] (rechts)*

*Abb. 13.2: Detail des Rades mit Winde auf der Spitze des Turmes Jakobínka bei Besichtigung, Fotografin: Hana Mahnelová*

**Angaben**

Vorgesehener Radius des großen Rades 240 cm, Radius der Seilwinde 30 cm.

Der Mensch bringt das Rad mit seinem Lauf im Inneren des Rades in Bewegung. Wir nehmen an, dass jeder Schritt 50 cm misst und, dass der Mensch die Füße immer 5 cm hochhebt.

### Aufgabe Nr. 1

Wie viele Schritte sind notwendig, um das große Rad des Kranes einmal herum zu drehen?

### Aufgabe Nr. 2

Wie viele Schritte sind notwendig, um die Last in eine Höhe von 30 m zu heben?

### Aufgabe Nr. 3

Wie hoch werden die Füße dabei insgesamt gehoben, wenn eine Last 30 m nach oben gezogen wird?

**Musterlösung**

### Aufgabe Nr. 1

Umfang des Rades ist $2\pi r = 2 \cdot 3,14 \cdot 240 = 1507{,}2$ cm, das heißt ca. 15 m.

Man muss also 15 m zurückliegen, was 30 Schritten je 50 cm entspricht.

### Aufgabe Nr. 2

Bei einer Umdrehung des Rades erfolgt auch eine Umdrehung der Winde, das Seil wird also und die Länge des Umfangs der Winde aufgewickelt, das bedeutet $2 \cdot 3{,}14 \cdot 30 = 188$ cm, also 1,88 Meter.

Mithilfe des Dreisatzes kann man den Abstand $x$ bestimmen, der im Rad zurückzulegen ist, um die Last um 30 m anzuheben:

1,88 m................15 m

30 m.................... $x$ m

es ergibt sich daraus: $x = (30 : 1{,}88) \cdot 15 = 239$ m, also ungefähr 479 Schritte.

### Aufgabe Nr. 3

Wenn bei jeden Schritt ein Fuß um 5 cm gehoben wird, dann entsprechen 479 Schritte insgesamt rund 24 Meter.

**Erfahrungen mit Anwendung des Unterrichtsmaterials**

Die Aufgaben kann man auch offen ohne konkrete Zahlen vorgeben. Die SchülerInnen bestimmen selbst zuerst, welche Daten zur Berechnung notwendig sind, dann kann man sie von der Lehrkraft erhalten oder eine Abschätzung der benötigten Zahlen anhand Fotos oder anderer zugänglicher Unterlagen machen.

Die Aufgabe kann auch um physikalische Überlegungen erweitert werden. Die SchülerInnen können über Arbeit und Leistung des Menschen im Rad, über Reibungskräfte, über Drehmoment, über Gleichgewicht der Kräfte etc. nachdenken. Zu dieser Aufgabe wurden zwei Applets im Programm GeoGebra erstellt, die im Unterricht eingesetzt werden können, jedoch nicht müssen. Das erste stellt das Prinzip eines Rades mit Winde in einer animierten 3D Darstellung dar (Abbildung 13.3). Das zweite stellt das Rad in 2D dar und ist eine Ergänzung der Aufgabe bezüglich der Berechnung der Höhe, in die die Last gehoben wird, wenn ein Mensch im Rad eine gegebene Schrittzahl zurücklegt. Die Schrittzahl kann man mit Schieberegler einstellen. Das Applet beinhaltet auch eine Animation und die sofortige Darstellung der Höhe der Last (Abbildung 13.4).

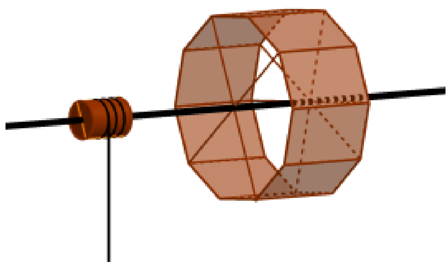


*Abb. 13.3: GeoGebra-Ansicht – Prinzip des Rades mit Winde, übernommen von [4]*

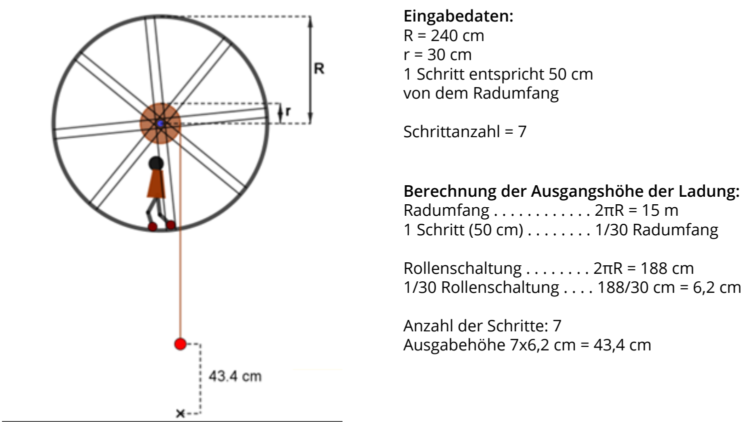



*Abb. 13.4: GeoGebra-Ansicht – Animation der Bewegung, übernommen von [5]*

**Weitere Unterrichtsmaterialien**

Ähnliche Unterrichtsmaterialien stehen auf der Internetseite www.matematech.cz – Výukové materiály – Diferenciální kladkostroj, Cyklistický převod, Pohon válečkové dráhy – zur Verfügung.

**Links**

[1] https://ct24.ceskatelevize.cz/regiony/2494756-na-oprave-veze-jakobinka-bude--pracovat-stredoveky-jerab-pohani-ho-lidska-sila

[2] https://www.npu.cz/cs/npu-a-pamatkova-pece/npu-jako-instituce/akce/22874--mimoradna-komentovana-prohlidka-veze-jakobinka

[3] https://www.npu.cz/cs/npu-a-pamatkova-pece/npu-jako-instituce/zpravy/30532-stante-se-stredovekym-jerabnikem-npu-hleda-dobrovolniky-pro-rekonstrukci-veze-jakobinky

[4] https://ggbm.at/g7vjwgpw

[5] https://ggbm.at/guvtxkpc

# 14. Gewichtsberechnung an Werkstücken

**Einführung**

Das Unterrichtsmaterial behandelt die Anwendung der Berechnung des Zylindervolumens an praktischen Beispielen. Falls die Ausarbeitung der Aufgaben mit dem Besuch der Firma Motor Jikov verbunden wird, können die Schüler auch das Messen der Längen mithilfe der Schiebelehre probieren. Die Variante des Unterrichtsmaterials ohne Besuch des Unternehmens steht unter www.matematech.cz zur Verfügung.

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autor | Marek Vejsada |
| Alter | 14 – 19 Jahre |
| Dauer | 2 Unterrichtsstunden |
| SchülerInnen-material | Beamer für Lehrer<br>Schiebelehren und Taschenrechner für SchülerInnen<br>Werkstücke – vorhanden in der Motor Jikov Group a.s. – die Exkursion ist bei Ing. Hrouda, rhrouda@mjs.cz zu bestellen |
| Vorwissen und Voraussetzungen | grundlegende Raum-Vorstellungsvermögen<br>Berechnungen des Volumens eines Körpers, der aus mehreren Zylindern zusammengesetzt ist<br>Lesen von einfachen technischen Zeichnung (Messzahlen)<br>Messen mit Schiebelehre<br>Arbeit mit Tabellen |
| Lernergebnisse und Kompetenzen | Geschicklichkeit beim Messen mit Schieblehre<br>Übung der Arbeit mit Tabelle und mit techn. Dokumenten<br>Anwendung der Volumenberechnung in der Technik<br>Verstehen der Zweckmäßigkeit der Mathematik bei Lösung eines realen Problems |
| Anwendung | Technische Zeichnungen und Tabellen sind ein integrierter Bestandteil der technischen Praxis. |
| Unternehmen | MOTOR JIKOV Group a.s. |
| Quelle | Technische Zeichnung des Werkstücks für Herstellung des Mähmaschinegetriebes – Ing. R. Hrouda, Motor Jikov Group. |

## Arbeitsblatt für SchülerInnen

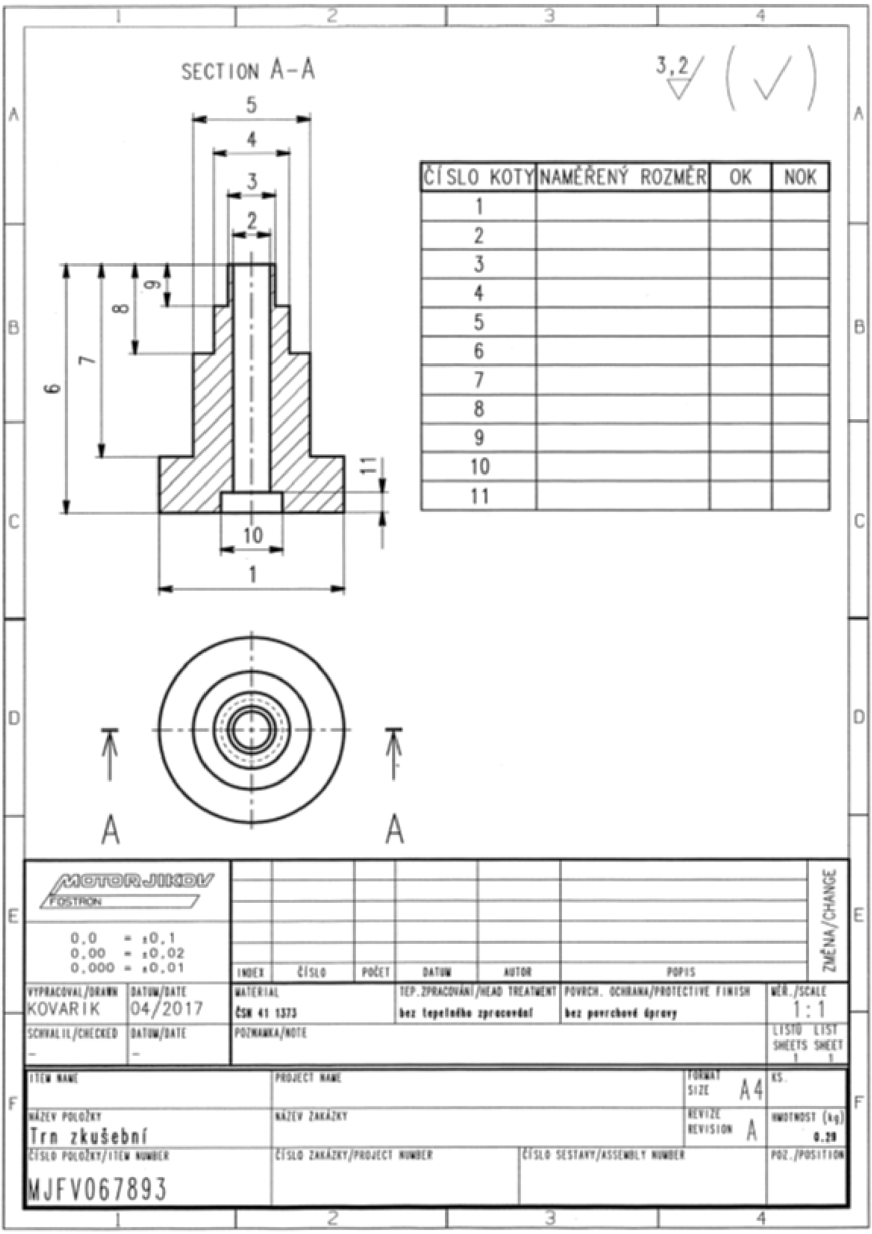



*Abb. 14.1: Technische Zeichnung des Dornes*

### Aufgabe Nr. 1

Füllen Sie die Tabelle der Abmessungen rechts oben auf der Abbildung 14.1. aus. Zum Messen ist die Schiebelehre zu verwenden. Gemessene Werte sind in Millimetern mit Genauigkeit auf zwei Zehntelmillimeter anzugeben.

Anmerkung: Nach der Bestimmung der Daten vergleichen Sie Ihre Messungen mit fachmännisch gemessenen Werten, die bei Ihrem Lehrer oder Exkursionsführer zur Verfügung stehen. Markieren Sie die Werte in der Spalte mit „OK“, wenn Ihr Messwert nicht mehr als 0,5 mm vom fachmännischen Messwert abweicht. Andernfalls bezeichnen Sie den Wert in der Spalte „NOK“ und übernehmen Sie den Wert von Ihrem Lehrer (Exkursionsführer).

### Aufgabe Nr. 2

Berechnen Sie das Volumen des Dornes anhand der gemessenen Werten. Zur Berechnung ist die Formel für Volumen des Zylinders anzuwenden. Der Rechengang ist zu notieren. Ergänzen Sie Ihre Berechnungen mit einfachen Skizzen.

Empfehlung: Schreiben Sie zuerst die Vorgehensweise mit der Reihenfolge der Berechnungen der verschiedenen Zylindervolumina. Erst dann beginnen Sie mit der Berechnung einzelner Volumen.

### Aufgabe Nr. 3

Wandeln Sie das Ergebnis von Aufgabe 2 in Kubikzentimeter um. Berechnen Sie Gewicht des Werkstückes, wenn man weiß, dass die Dichte des Stoffes, aus dem es erzeugt wurde, 7,850 g/cm$^3$ beträgt. Das Ergebnis ist auf Zehntel-Gramm zu runden.

### Erfahrungen mit Anwendung des Lernmaterials

Bei der Berechnung des Werkstückvolumens traten folgenden Probleme auf: Die in Gruppen arbeitenden SchüllerInnen wählten zwar originelle Vorgehensweisen, die jedoch sehr unterschiedlich waren. Es war schwierig, die Richtigkeit zu prüfen. Falls das Ergebnis von der richtigen Lösung wesentlich abweichend war, war die Suche nach richtiger Lösung kompliziert. Deshalb schlage ich vor, den Schüler eine gemeinsame Vorgehensweise vorzuschlagen, z.B. die von der Musterlösung.

### Musterlösung

Mögliche Lösung – Berechnung des Dornvolumens – das Werkstück ist in vier Teilen zu teilen. Zur Reihenfolge der Berechnungen siehe Abbildung 1. Die Hilfsbilder für Berechnungen sind nur Darstellungen ohne Maßzahlen.

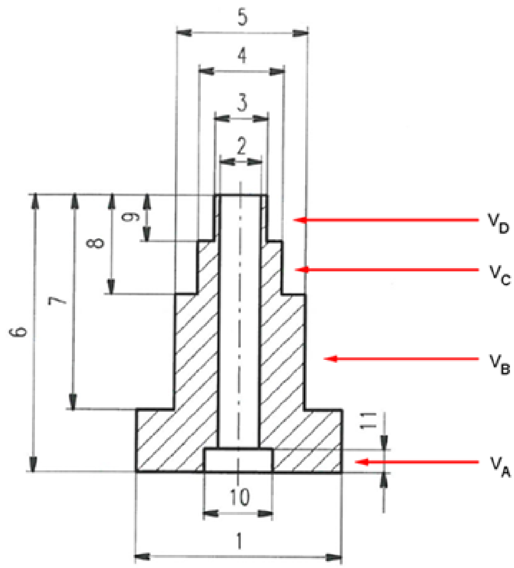



*Abb. 14.2: Bezeichnung der Dornteile für Berechnungen*

| Nummer | Abmessungen (mm) |
|---|---|
| 1 ($k_1$) | 45,02 |
| 2 ($k_2$) | 9,02 |
| 3 ($k_3$) | 11,53 |
| 4 ($k_4$) | 18,54 |
| 5 ($k_5$) | 28,51 |
| 6 ($k_6$) | 60,06 |
| 7 ($k_7$) | 46,62 |
| 8 ($k_8$) | 21,90 |
| 9 ($k_9$) | 10,15 |
| 10 ($k_{10}$) | 15,42 |
| 11 ($k_{11}$) | 5,10 |

*Abb. 14.3: Tabelle mit fachmännisch gemessenen Werten*

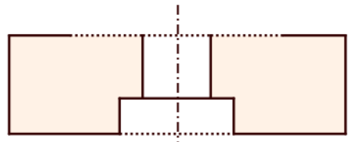
**1. Schritt:** Berechnung des Volumens $V_A$:

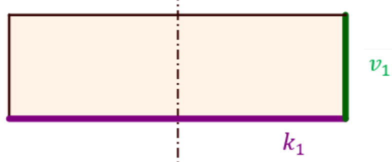
$V_A = ?$

$V_1 = \pi\,(\frac{k_1}{2})^2\,v_1 = 21394{,}4\ mm^3$

$v_1 = k_6 - k_7 = 13{,}44\ mm$

$k_1 = 45{,}02\ mm$

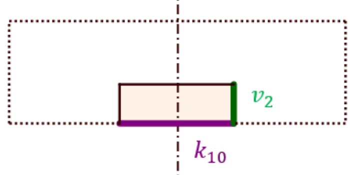





$V_2 = \pi\,(\frac{k_{10}}{2})^2\,v_2 = 952{,}4\ mm^3$

$v_2 = k_{11} = 5{,}10\ mm$

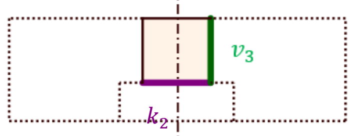
$k_{10} = 15{,}42\ mm$




$V_3 = \pi\,(\frac{k_2}{2})^2\,v_3 = 532{,}9\ mm^3$

$v_3 = k_6 - k_7 - k_{11} = 8{,}34\ mm$

$k_2 = 9{,}02\ mm$



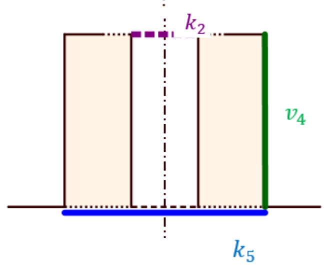

$V_A \doteq 19909{,}1\ mm^3$

**2. Schritt:** Berechnung des Volumens $V_B$:

$V_B = \pi\,(\frac{k_5}{2})^2\,v_4 - \pi\,(\frac{k_2}{2})^2\,v_4$

$v_4 = k_7 - k_8 = 24{,}72\ mm$

$k_2 = 9{,}02\ mm$, $k_5 = 28{,}51\ mm$



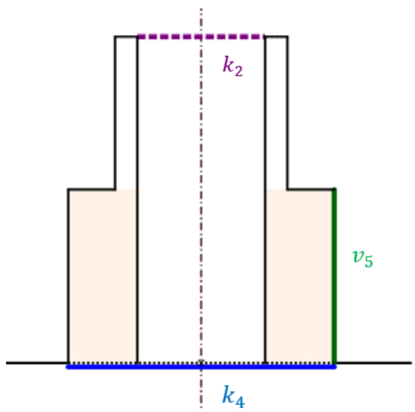

$V_B \doteq 14201{,}3\ mm^3$

**3. Schritt:** Berechnung des Volumens $V_C$:

$V_C = \pi\,(\frac{k_4}{2})^2\,v_5 - \pi\,(\frac{k_2}{2})^2\,v_5$

$v_5 = k_8 - k_9 = 11{,}75\ mm$

$k_2 = 9{,}02\ mm$, $k_4 = 18{,}54\ mm$




$V_C \doteq 2421{,}3\ mm^3$

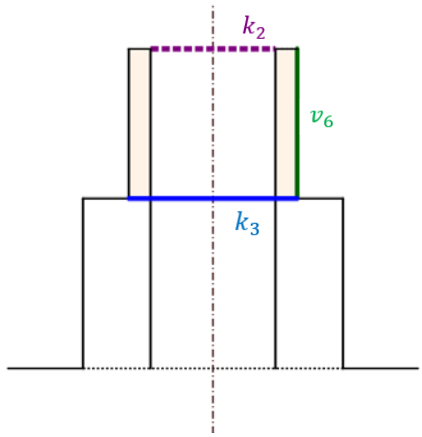
**4. Schritt:** Berechnung des Volumens $V_D$:

$V_D = \pi \left(\frac{k_3}{2}\right)^2 v_6 - \pi \left(\frac{k_2}{2}\right)^2 v_6$

$v_6 = 10{,}15$ mm

$k_2 = 9{,}02$ mm, $k_3 = 11{,}53$ mm

$V_D \doteq 411{,}2$ mm$^3$




**Gesamtvolumen:**

$V = V_A + V_B + V_C + V_D \doteq 36942{,}9$ mm$^3$

**Berechnung der Dornmasse:**

$V \doteq 36942{,}9$ mm$^3 = 36{,}9429$ cm$^3$

$m = \rho \cdot V = 7{,}850$ g/cm$^3 \cdot 36{,}9429$ cm$^3$

$m \doteq 290{,}0$ g

Die Masse des Dornes ist 290,0 g. Die Richtigkeit des Ergebnisses kann man auch mit Abwiegen überprüfen, wenn das Werkstück vorhanden ist (Abbildung 14.4).

*Abb. 14.4: Foto des Werkstücks*

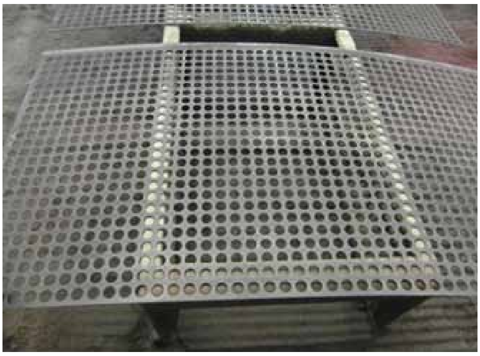
# 15. Technische Siebe

**Einführung**

Das Unterrichtsmaterial behandelt die praktische Berechnung des Volumens und der Masse eines technischen Siebes mit Anwendung der Kenntnisse über Berechnung von Volumen und Massen bei Quadern und Zylindern. Das Material entstand anhand des Besuches des Betriebes ZVVZ Milevsko.

Die erweiterte Variante dieses Unterrichtsmaterials steht unter www.matematech.cz zur Verfügung. Dem Besuch der ZVVZ Milevsko widmen sich auf dieser Internetseite auch Unterrichtsmaterialien mit dem Namen Flächeninhalt eines Rohrs und Anwendung der grundschulischen Mathematik bei Herstellung eines Kreisels, welche in gekürzter Version auch in diesem Buch enthalten sind (Kapitel 12).

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autor | Yvona Zuntová |
| Alter | 13 – 15 Jahre |
| Dauer | 1 Unterrichtsstunde |
| SchülerInnen-material | Arbeitsblatt mit eingetragenen Abmessungen<br>Mathematische Tabellen oder Internet<br>Handy |
| Vorwissen und Voraussetzungen | Flächeninhalt des Rechtsecks und des Kreises<br>Volumen und Masse des Quaders und des Zylinders<br>Prozentrechnung |
| Lernergebnisse und Kompetenzen | Lösung der praxismotivierten geometrischen Aufgabe<br>Vertiefung der Kenntnisse (Flächeninhalt des Kreises, Flächeninhalt des Rechtsecks, Volumen des Quaders und des Zylinders, Gewicht eines Körpers) |
| Anwendung | Berechnung des Volumens und der Masse von Körpern gehören zu elementaren praktischen Fertigkeiten für technische Praxis und Ausbildung. |
| Unternehmen | ZVVZ a.s. (Milevsko) |
| Quellen | Eigenarbeit, Messen und Fotos aus der Exkursion in die Firma ZVVZ Milevsko |



*15.1. Arbeitsblatt für SchülerInnen*

Erläuterung des Begriffes technische Siebe – Vorrichtung zum Fangen der Staubteilchen und Unreinheiten in lufttechnischen Anlagen. Sie haben die Form einer dünnen rechteckigen Platte aus Metall mit regelmäßig angeordneten kreisrunden Öffnungen (Abbildung 15.1).

### Aufgabe Nr. 1

Wiederholung – Ergänze die Formeln:

| | |
|---|---|
| Formel für Flächeninhalt des Rechtecks | S = |
| Formel für Flächeninhalt Kreises | S = |
| Formel für Volumen des Quaders | V = |
| Formel für Volumen des Zylinders | V = |
| Formel für die Berechnung der Körpermasse | m = |

Berechne den Flächeninhalt eines Rechtsecks mit folgenden Abmessungen:

2 m und 80 cm. Berechne den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Durchmesser 4 cm.

### Aufgabe Nr. 2

Volumen und Massenberechnungen eines Fangsiebes

1) Wie viele runde Öffnungen mit dem Durchmesser 4 cm kann man aus einer rechteckigen Platte mit Abmessungen 2 m und 80 cm ausschneiden, wenn der Abstand voneinander mindestens 1 cm ist und wenn am Rand der Platte mindestens 3cm Platz bleiben muss?
2) Berechnet, wie viel % der Abfall beim Ausschneiden macht.
3) Wie ist das Gewicht der Platte vor und nach der Änderung, wenn sie 5 mm dick ist und die Dichte des verwendeten Materials 7,87 g/cm$^3$ beträgt?

Erstellt eine Skizze gem. Abb. 15.1.

**Erfahrungen mit Anwendung des Unterrichtsmaterials**

Das Arbeitsblatt ist eine geeignete Ergänzung zum Abschluss des Themenbereichs Zylinder. Man setzt voraus, dass die Schüler die Aufgaben über Volumen und Gewicht des Zylinders selbständig berechnen. Wenn das Arbeitsblatt ein Teil der Exkursion in die Firma ZVVZ Milevsko ist, kann man tatsächliche Siebe vor Ort vermessen und die Daten aus dem Arbeitsblatt mit Ist-Werten vergleichen. Es wird empfohlen, die Wiederholungsaufgabe 1 als Einzelarbeit durchzuführen. Der andere Teil des AB (Aufgabe 2) ist als Arbeit in Gruppen vorgesehen, die Ergebnisse sind miteinander zu besprechen.

Anweisung für die Anwendung der Arbeitsmittel: Ideale Hilfsmittel sind das Handy (inkl. App für Formeln), der Taschenrechner, ein Fotoapparat, das Mathematikbuch der 8. Schulstufe, mathematische Tabellen oder Computer mit Internetzugang. Im Hinblick auf die Abbildung des Arbeitsblattes kommen die Schüler auch ohne diese Ausstattung zurecht und die Formel kann einfach abgeleitet werden. Wenn die Gruppe der Schüler „schwächer" ist und wenn man die Anschaulichkeit des beschriebenen technischen Siebes verbessern will, kann man die Kartonschachtel von Jogurts verwenden, die mit einer ähnlichen Platte mit Öffnungen oft ausgestattet wird.

**Musterlösung**

**Aufgabe 1:**

| | |
|---|---|
| Flächeninhalt des Rechtsecks: | $S = a \cdot b$ |
| Flächeninhalt des Kreises: | $S = \pi \cdot r^2$ |
| Volumen des Quaders: | $V = a \cdot b \cdot c$ |
| Volumen des Zylinders: | $V = \pi \cdot r^2 \cdot v$ |
| Masse des Körpers: | $m = V \cdot \rho$ |

Berechne den Flächeninhalt des Rechtsecks mit folgenden Abmessungen

2 m und 80 cm:

$S = 200 \cdot 80 = 16\,000\ cm^2$

Berechne den Flächeninhalt des Kreises mit dem Durchmesser 4 cm:

$S = 3{,}14 \cdot 22 = 12{,}56\ cm^2$

**Aufgabe 2:**

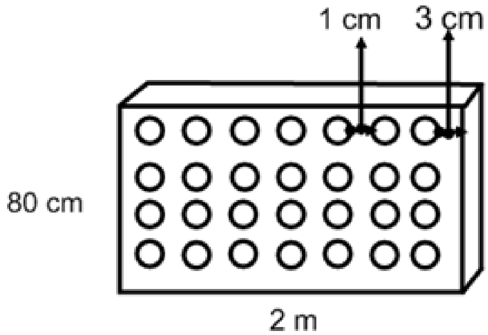



*Abb. 15.2: Skizze des technischen Siebes*

Zahl aller runden Öffnungen: [(20 – 3 –2): 5] · [(80 –3 –2): 5] = 585

Flächeninhalt der Grundfläche der Platte ohne Öffnungen: S = 200 · 80 = 16 000 $cm^2$

Flächeninhalt einer runden Öffnung: S = 3,14 · 22 = 12,56 $cm^2$

Flächeninhalt der Grundfläche der Platte mit allen runden Öffnungen:
16 000 – 585 · 12,56 = 16 000 – 7 347,6 = 8 652,4 $cm^2$

Volumen der Platte mit allen zylindrischen
Öffnungen: 8 652,4 · 0,5 = 4 326,2 $cm^3$

Prozent Abfall nach Ausschneiden der zylindrischen Öffnungen: 46 %
(100 % sind 16 000 $cm^2$; 54 % sind 8 652,4 $cm^2$; 46 % sind 7 347,6 $cm^2$)

Stoff und seine Dichte: Stahl $\rho$ = 7,87 g/ $cm^3$

Berechnung der Masse: m = V ·$\rho$ = 4 326,2 · 7,87 = 34 047,2 g = 34 kg

Die Masse der Platte vor dem Ausschneiden der Öffnungen war 63 kg, nach Ausschneiden 34 kg. Durch diese Änderung entstand 46 % Materialabfall.

# 16. Kraftwerkskette Gosau

## Einführung

In dieser Unterrichtssequenz arbeiten die SchülerInnen selbstständig in Kleingruppen (3-4 Personen) oder in Partnerarbeit an verschiedenen Aufgaben zur Kraftwerkskette Gosau.

Die Aktivitäten beinhalten unterschiedliche Aufgabenstellungen zu einer Kraftwerkskette, in denen mathematisches und auch physikalisches Wissen angewendet werden soll.

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autor | Andreas Trappmair, Johanna Zöchbauer |
| Schulstufe, Fach | 9./10. Schulstufe, Mathematik/Physik |
| Dauer | 2 Unterrichtseinheiten |
| SchülerInnen-material | https://ggbm.at/tega44pd |
| Unternehmen | Energie AG |
| Links | Unterrichtsplanung: https://ggbm.at/ryvbnbxw<br>Lösungen: https://ggbm.at/nqdzawuh |

*Quelle: Energie AG*

**Vorwissen und Voraussetzungen**

- Die SchülerInnen wissen, wie die physikalischen Größen Energie, Arbeit und Leistung definiert sind, bzw. in welchen Einheiten diese angegeben werden.
- Die SchülerInnen wissen, wie der „Wirkungsgrad“ physikalisch definiert ist und kennen dessen Bedeutung als relativ nutzbare Energiemenge eines Systems.
- Die SchülerInnen können mit unterschiedlichen Größen (und deren Abkürzungen) umgehen und können diese richtig ineinander umzuwandeln.
- Die SchülerInnen wissen, wie Mittelwerte berechnet werden.
- Die SchülerInnen wissen, wie Funktionswerte anhand einer Grafik bestimmt werden.
- Die SchülerInnen wissen, wie mit vorgegebenen Formeln gearbeitet werden kann (Einsetzen, einheitenkorrektes Rechnen).

**Lernergebnisse und Kompetenzen**

- Die SchülerInnen können ihr Wissen über die physikalischen Größen „Energie, Arbeit, Leistung und Wirkungsgrad“ überprüfen.
- Die SchülerInnen können mittels Substitutionsprinzip und sinnerfassendem Lesen eine alternative Formel für die Energie / Arbeitsfähigkeit eines Systems (Stausee) herleiten.
- Die SchülerInnen können anhand einer Grafik Funktionswerte im Sachzusammenhang mit der korrekten Einheit ablesen.
- Die SchülerInnen können in eine Formel einsetzen und Einheiten richtig umwandeln.
- Die SchülerInnen können erhaltene Ergebnisse im Sachzusammenhang interpretieren.
- Die SchülerInnen können anhand einer Grafik Differenzen von Funktionswerten ermitteln.

**Unterrichtsablauf**

Zuerst wird der Ablauf der Unterrichtssequenz gemeinsam besprochen, die SchülerInnen werden in Gruppen eingeteilt und erhalten den Link zur Aktivität.

*Abb. 16.1: Vorderer Gosausee, Quelle: Energie AG*

Alternativ kann über die Geografie des Gosaustausees oder den Aufbau eines Kraftwerks (inkl. Turbine) gesprochen werden.

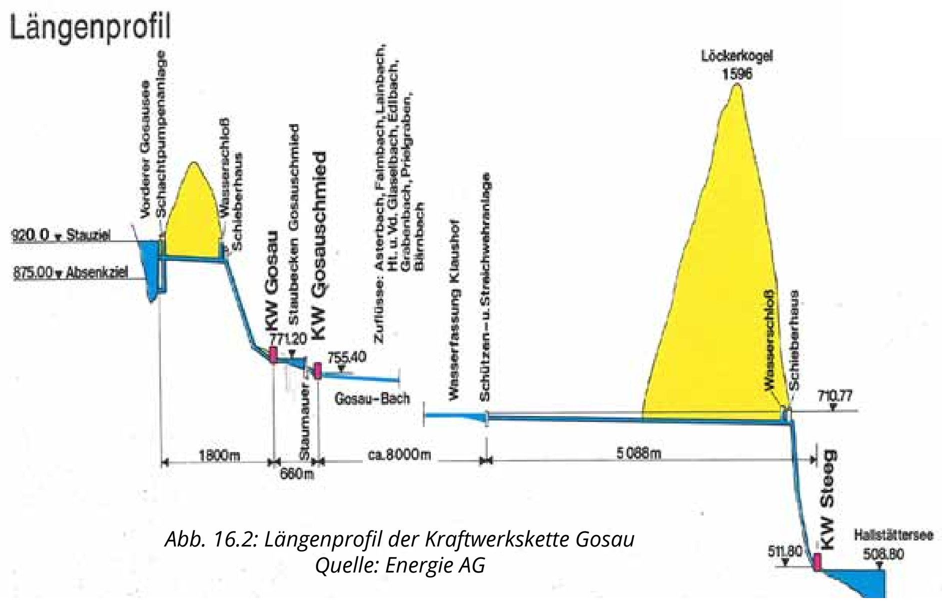



*Abb. 16.2: Längenprofil der Kraftwerkskette Gosau*
*Quelle: Energie AG*

Weiters kann über die Art und Weise der Energiegewinnung durch ein Speicherkraftwerk diskutiert werden.

### Aktivität 1

Die SchülerInnen beantworten in der ersten Aufgabenstellung allgemeine Fragen zu den physikalischen Größen, die später verwendet werden.

Die Lehrkraft sollte in dieser Phase durch Verständnisfragen aktiv in den Gruppen überprüfen, ob dieses Wissen vorhanden ist.

### Aktivität 2

In der zweiten Aufgabenstellung soll in den Gruppen eine Faustformel für den Energiegehalt eines Stausees in Abhängigkeit der Nettofallhöhe und des Gesamtvolumens des nutzbaren Wassers gefunden werden.

Dazu müssen die SchülerInnen mittels Substitutionsprinzip Informationen und Formeln aus der Angabe sinnvoll miteinander verbinden. Zudem müssen Größenordnungen richtig umgewandelt werden, um die korrekte Formel zu erhalten.

Die Lehrkraft kann in diesem Arbeitsschritt Hilfestellungen aus der Lösung bereithalten. Beispielsweise können den SchülerInnen einzelne Schritte in der

Herleitung der Formel zur Verfügung gestellt werden, wenn diese nicht mehr weiter wissen.

### Aktivität 3

In dem Arbeitsauftrag 3 müssen die SchülerInnen das Energiespeichervermögen (=Energiegehalt) des Vorderen Gosausees bezogen auf den Hallstättersee berechnen. Als Bezugspunkt für die Fallhöhe soll der Speicherschwerpunkt herangezogen werden. Dieser kann aus einer abgebildeten Graphik abgelesen werden (siehe Abb. 16.3).

Die Lehrkraft kann in der Arbeitsphase unterstützend eingreifen und z.B. erklären, wie der Speicherschwerpunkt zu ermitteln ist.

Das Einsetzen in die gegebene Formel und die Umwandlung in korrekte Einheiten stellen die Hauptschwierigkeit in dieser Aufgabe dar.

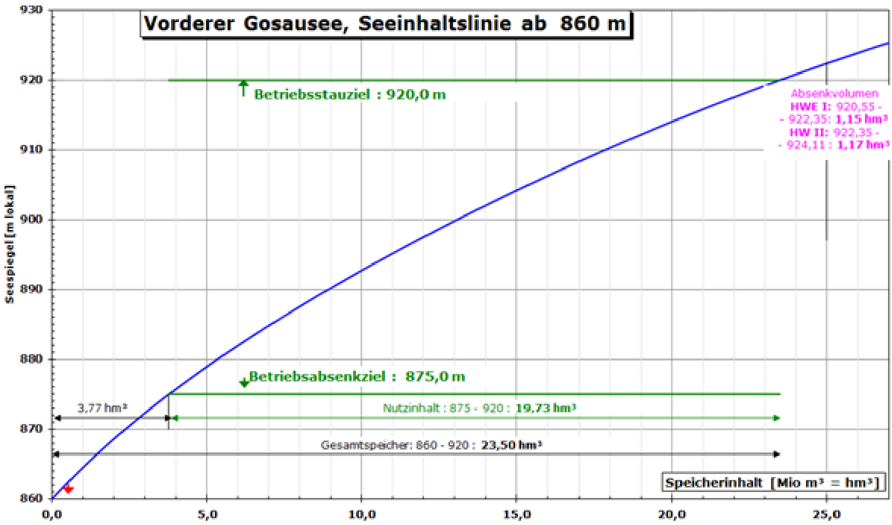



*Abb. 16.3: Vorderer Gosausee, Seeinhaltslinie ab 860 m*
*Quelle: Energie AG*

### Aktivität 4

Die SchülerInnen bearbeiten in Einzel- oder Partnerarbeit die Aufgabenstellung zur Aktivität 4.

In dieser Aufgabenstellung soll der technische Nutzungsgrad der Kraftwerksgruppe berechnet werden. Der Bezugspunkt für die Höhe und der Nutzungsgrad sind vorgegeben, bzw. müssen der Graphik entnommen werden.

**Es müssen im Wesentlichen zwei Teilaufgaben bearbeitet werden:**

1. Berechnung der ungenützten Fallhöhe und der Gesamthöhe entlang der Stauseekette

   Die ungenützte, sowie die Gesamthöhe lassen sich anhand der Höhen-Markierungen in der Grafik leicht ablesen.

2. Berechnung des technischen Nutzungsgrades

   Zur Berechnung des technischen Nutzungsgrades muss der Quotient aus ungenützter Fallhöhe und der Gesamthöhe gebildet werden.

## Aktivität 5

In der Aufgabenstellung 5 sollen die Kraftwerksleistungen bei verschiedenen Wasserströmen berechnet werden.

Die Hauptaufgabe besteht hier wieder im Ablesen der Nettofallhöhen aus der vorgegebenen Grafik und das einheitenkorrekte Einsetzen in die vorgegebene Formel.

Die Lehrkraft kann in dieser Phase unterstützend eingreifen, wenn z.B. Probleme beim Ermitteln der Nettofallhöhe auftreten.

Hinweis: Wird keine Technologie im Unterricht verwendet, kann der Wert für die Erdbeschleunigung g auch der Einfachheit halber auf 10 $m/s^2$ gesetzt werden.

*Abb. 16.4: Kraftwerk Steeg*
*Quelle: Energie AG*

### Aktivität 6

In der letzten Aufgabenstellung ist der mittlere Triebwassereinzug, also die Gesamtmenge an Wasser, die in einem Jahr pro Kraftwerk zur Energieerzeugung genutzt werden kann, zu berechnen. Dafür ist die Gesamtmenge an Energie, die pro Kraftwerk und pro Jahr umgesetzt werden kann, gegeben.

**Die Hauptaufgabe besteht aus zwei Teilschritten:**

1. Im Ablesen der Nettofallhöhen aus der vorgegebenen Grafik und das einheitenkorrekte Einsetzen in die vorgegebene Formel

   Die Lehrkraft kann in dieser Phase unterstützend eingreifen, wenn z.B. Probleme beim Ermitteln der Nettofallhöhe auftreten.

2. Im Umformen der gegebenen Formel auf die korrekte Größe

   Auch hier kann die Lehrkraft beim ersten Beispiel unterstützend eingreifen und die korrekte Umformung überprüfen, sodass bei den Folgebeispielen richtig mit anderen Zahlenbeispielen geübt werden kann.

**Hinweise für die Lehrperson**

Diese Unterrichtsplanung ist für einen fächerübergreifenden Unterricht für das Fach Mathematik und Physik geeignet. Falls das Material nur im Mathematikunterricht verwendet wird, soll darauf geachtet werden, dass die SchülerInnen schon mit den verwendeten physikalischen Begriffen vertraut sind und deren Definitionen und Zusammenhänge kennen und Berechnungen dazu durchführen können.

Die einzelnen Aktivitäten sind auch als einzelne Aufgabenstellungen verfügbar und sie müssen nicht alle der Reihe nach bearbeitet werden.

**Ähnliche Unterrichtsplanungen**

Die einzelnen Aktivitäten sind auch als einzelne Aufgabenstellungen verfügbar, welche in dem Buch Kraftwerksgruppe Gosau (Sammlung) zusammengefügt sind: https://ggbm.at/fahaavzv.

Somit können die einzelnen Aufgaben unabhängig voneinander verwendet werden. Die einzelnen Unterrichtsplanungen zu allen Aktivitäten sind auch in einem Buch zusammengefasst: https://ggbm.at/h4zzszn8

# 17. Rannastausee

**Einführung**

In dieser Lerneinheit beschäftigen sich die SchülerInnen mit Aufgaben rund um Befüllungs- und Entleerungsvorgänge an einem Stausee. Ausgehend von einem Applet, welches den Befüllungsvorgang des Stausees simuliert, müssen die SchülerInnen Flussdiagramme erstellen, Absenkdauern berechnen und mit sich ändernden Funktionswerten und x-Werten argumentieren.

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autor | Johanna Zöchbauer |
| Thema | Funktionen (arbeiten mit Definitions- und Wertemenge), Flussdiagramme |
| Schulstufe, Fach | 8. Schulstufe, Mathematik |
| Dauer | 1 Unterrichtseinheit |
| SchülerInnen-material | https://ggbm.at/b5ragg7r |
| Unternehmen | ENERGIE AG |
| Links | Unterrichtsplanung: https://ggbm.at/vyqzs38v<br>Lösung: https://ggbm.at/qwmgazub |

*Quelle: media.tourdata.at/file/responsiveDetailImg/e3350525dd1288a32e5b47fb01364987.JPG*

### Vorwissen und Voraussetzungen

- Die SchülerInnen kennen Flussdiagramme als Darstellungsmöglichkeit von dynamischen Systemen.
- Die SchülerInnen wissen, wie man Funktionswerte aus einem gegebenen Funktionsgraphen herauslesen kann.
- Die SchülerInnen wissen, wie man Änderungen von Funktionswerten und deren zugehöriger Argumente berechnet.
- Die SchülerInnen können Zeiteinheiten richtig ineinander umrechnen.

### Lernergebnisse und Kompetenzen

- Die SchülerInnen können zu einem dynamischen Vorgang ein Flussdiagramm (oder ein ähnliches Darstellungsmittel) anfertigen.
- Die SchülerInnen können Änderungen von Funktionswerten anhand von Daten einer vorgegebenen Grafik berechnen.
- Die SchülerInnen können Veränderungen von Funktionswerten und zugehörigen Argumenten im Sachkontext interpretieren.

### Unterrichtsablauf

Zuerst wird der Ablauf der Unterrichtssequenz gemeinsam besprochen und die SchülerInnen erhalten den Link zur Aktivität. Ergänzend kann auf die Rolle der ENERGIE AG in der Stromversorgung für Österreich eingegangen werden.

Das zentrale Diagramm der Unterrichtseinheit, das dem Applet (siehe Abb. 17.1) zugrunde liegt, wird besprochen.

In den folgenden Aktivitäten bearbeiten die SchülerInnen insgesamt vier Aufgabenstellungen, die größtenteils mit dem Applet aus Abbildung 17.1 bearbeitet werden können.

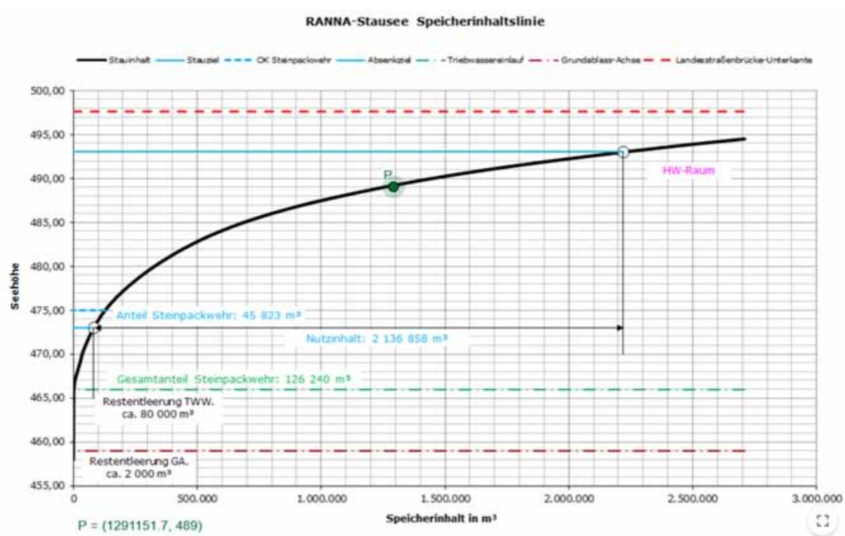



*Abb. 17.1: Applet*

## Aktivität 1

In der ersten Aufgabenstellung sollen die Zu- und Abflüsse am Stausee durch ein geeignetes grafisches Darstellungsmittel (z.B. ein Flussdiagramm, siehe Abb. 17.2) veranschaulicht werden.

Hierfür wird, außer der Angabe, kein weiterführendes Material benötigt.


*Abb. 17.2: Mögliches Flussdiagramm*

## Aktivität 2

In der zweiten Aufgabenstellung soll der kürzest mögliche Absenkvorgang im Stausee berechnet werden. Dieser tritt dann auf, wenn zusätzlich zum Wasserablass durch die Turbinen noch ein sogenannter „Grundablass" am Kraftwerk durchgeführt wird. Die tatsächlichen Abflussmengen müssen die SchülerInnen aus der Angabe ermitteln. Weiters müssen die SchülerInnen zuerst die Zuflussmengen des Wassers mit Hilfe des Applets bestimmen und so den Netto-Wasserabfluss ermitteln.

Im Anschluss muss aus der Grafik die insgesamt abzulassende Wassermenge aus der Differenz der Argumente bestimmt und die Zeit, die für diesen Absenkvorgang aufgewendet werden muss, berechnet werden.

Hierbei ist insbesondere auf die Verwendung der richtigen Zeiteinheiten zu achten!

## Aktivität 3

In der dritten Aufgabe soll der Nutzinhalt des Stausees durch Anpassung der Stau- bzw. Absenkziele verändert werden.

Der Nutzinhalt stellt dabei den zur technischen Stromerzeugung nutzbaren Wasserinhalt dar. Die weiteren Fachbegriffe werden in der Aufgabenstellung der SchülerInnen erklärt.

Die SchülerInnen sollen nun zuerst im Applet durch Verschieben des Punktes die neuen Wasserhöhen (Koten) zu dem jeweils gewünschten Nutzinhalt ermitteln. Anschließend sollen sie durch diesen auf die zugehörigen Funktionswerte schließen und das neue Stauziel festlegen.

Im zweiten Teil der Aufgabe, bei der Festlegung des neuen Absenkziels, wird außerdem die Interpretationsfähigkeit der SchülerInnen geschult, da die gewünschten Veränderungen nur durch Variation einer Größe (Verringerung des Absenkziels) nicht erreicht werden kann.

### Aktivität 4

Die bisherigen Vorgehensweisen werden in einer Argumentationsaufgabe mit Forschungscharakter verbunden:

Zuerst müssen die SchülerInnen aus der Veränderung der Funktionswerte im Applet auf die Veränderung der Argumente (insgesamt abzulassende Wassermenge) schließen und anschließend argumentieren, ob diese Wassermenge in der gegebenen Zeit bewältigt werden kann. Hierbei ist insbesondere auf die Verwendung der korrekten Einheiten zu achten.

Anschließend soll außerdem noch ermittelt werden, welchen relativen Anteil an der gesamten abgelassenen Wassermenge zur Energieumsetzung genutzt werden kann.

Diese Aufgabe soll für zwei verschiedene Absenkbereiche bearbeitet werden, wobei der zweite Absenkbereich in der vorgegebenen Zeit nicht bewältigt werden kann. Die SchülerInnen sollen hier also ihre Argumentationsfähigkeit verbessern.

**Hinweise für die Lehrperson**

Auf jeden Fall empfiehlt es sich, die im Arbeitsblatt verwendeten Fachbegriffe („Stau- und Absenkziel“, „Kote“, ...) mit den SchülerInnen gleich zu Beginn der Unterrichtseinheit zu besprechen.

Das Applet (siehe Abb. 17.1) sollte für die meisten SchülerInnen leicht zu bedienen sein. Jedoch empfiehlt es sich, ähnlich Aufgaben, die die Veränderung von Funktionswerten und / oder Argumenten behandeln zuvor in einfacherem Kontext zu üben.

In Aktivitäten, die das Applet (siehe Abb. 17.1) verwenden, kann es zu geringfügigen Abweichungen in den Ablesungen und dadurch auch der Ergebnisse kommen. Grundsätzlich können die Aufgabenstellungen auch ohne Verwendung des Applets bearbeitet werden. Dann empfiehlt es sich, das im Applet verwendete Diagramm, für alle SchülerInnen in gleicher Größe auszudrucken und der Aufgabenstellung beizulegen.

# 18. Treppenlift

## Einführung

In dieser Lerneinheit beschäftigen sich die SchülerInnen mit Aufgaben rund um die Bewegung eines Personen-Treppenliftes um eine Ecke. Mit Hilfe eines Applets wird die Bewegung um die Ecke maßstabsgetreu simuliert. In weiterer Folge sollen die SchülerInnen eigenständig mit Hilfe des Applets Fragestellungen zur Bewegungsform, der Geschwindigkeiten der Eckpunkte der Liftplattform entlang ihrer Bahnkurven und der Bewegungsdauer beantworten.

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autoren | Hubert Pöchtrager, Andreas Trappmair |
| Thema | Bahngeschwindigkeit, Winkelgeschwindigkeit, Bogenlänge |
| Schulstufe, Fach | 8. Schulstufe, Mathematik / Physik |
| Dauer | 1 Unterrichtseinheit |
| SchülerInnen-material | https://ggbm.at/nwrgwqxp |
| Unternehmen | Ganser Liftsysteme |
| Links | Unterrichtsplanung: https://ggbm.at/cjrbt7rb<br>Lösung: https://ggbm.at/tmtcsqcm |

*Quelle: www.facebook.com/Ganser-Liftsysteme-1110747465634845/*

**Vorwissen und Voraussetzungen**

- Die SchülerInnen wissen, wie Bogenlängen an Kreisen berechnet werden.
- Die SchülerInnen wissen, wie Durchschnittsgeschwindigkeiten berechnet werden.
- Die SchülerInnen wissen, wie mit Maßstäben gearbeitet wird.
- Die SchülerInnen können Formeln umwandeln und mit diesen rechnen.

**Lernergebnisse und Kompetenzen**

- Die SchülerInnen können Bahnkurven von verschiedenen Punkten eines rotierenden Rechtecks verfolgen und Radien und Bogenlängen anzeigen.
- Die SchülerInnen können Bahngeschwindigkeiten von unterschiedlichen Punkten berechnen und vergleichen.
- Die SchülerInnen können die erhaltenen Ergebnisse hinsichtlich einer vorgegebenen Maximalgeschwindigkeit interpretieren.

**Unterrichtsablauf**

Nach einer kurzen Besprechung des Arbeitsablaufes erhalten die SchülerInnen den Link zur Aktivität. Es kann kurz auf die Aufgabenstellungen und die Firma GANSER eingegangen werden. Bevor die SchülerInnen die Aktivitäten eigenständig bearbeiten, wird im Plenum wiederholt oder neu erarbeitet, wie unterschiedliche Bahngeschwindigkeiten von Punkten starrer Körper bei Rotationen entstehen. Sollte grundlegendes Wissen über die Rotation (zB aus Physik) jedoch noch fehlen, so empfiehlt es sich, eine zusätzliche Unterrichtseinheit zur Besprechung dieser Grundlagen einzuplanen.

## Aktivität 1

In der ersten Aufgabenstellung sollen die SchülerInnen die Bewegungen der unterschiedlichen Eckpunkte des Treppenliftes mit Hilfe des Applets (siehe Abb. 18.1) beobachten und beschreiben.

Insbesondere sollen die SchülerInnen hierbei auf das Drehzentrum und die Radien bei der Rotation achten. Die Beschreibung kann hier verbal und ohne besondere Rücksicht auf exakte Zahlenwerte und Maße vorgenommen werden.

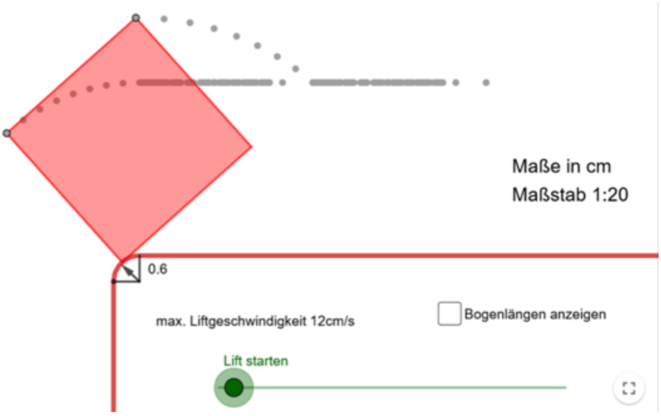



*Abb. 18.1: Applet zur Bestimmung unterschiedlicher Bahnkurven*

### Aktivität 2

In der zweiten Aufgabenstellung sollen sich die SchülerInnen im selben Applet durch Anklicken des Kontrollfeldes die Bogenlängen und Radien der einzelnen Eckpunkte anzeigen lassen oder allenfalls die Bogenlängen selbst berechnen (siehe Abb. 18.2).

Mit Hilfe des vorgegebenen Maßstabes werden im Anschluss die Geschwindigkeiten der einzelnen Eckpunkte des Treppenliftes bei der Bewegung um die Ecke berechnet. Dafür müssen die SchülerInnen wissen, in welchem Zusammenhang Weg, Zeit und Geschwindigkeit stehen.

Die Lehrkraft kann hier unterstützend eingreifen und mit den SchülerInnen besprechen, welche Eckpunkte konkret betrachtet werden müssen, bzw. welche Radien und Bogenlängen abgemessen bzw. berechnet werden müssen.

Mit Hilfe des Messwerkzeuges können außerdem – falls benötigt – noch weitere Längen im Applet bestimmt werden.

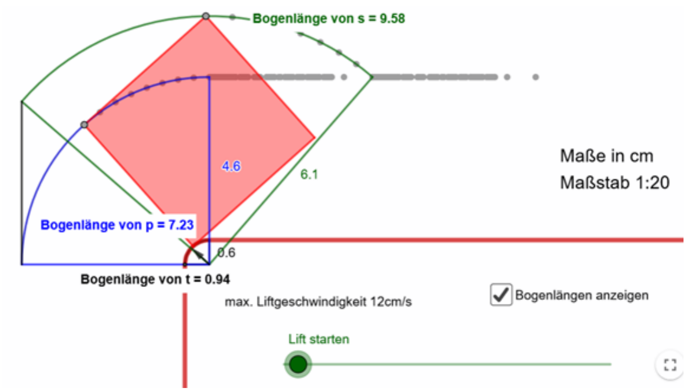



*Abb. 18.2: Anzeige der Radien und unterschiedlichen Bahnkurven*

### Aktivität 3

In der dritten Aufgabe sollen die SchülerInnen ausgehend von ihren bisherigen Berechnungen die maximal zulässige Bewegungsgeschwindigkeit des Treppenliftes um die Ecke bestimmen.

Da sich die äußeren Punkte wesentlich schneller bewegen, als der innerste Punkt, muss die Liftgeschwindigkeit angepasst werden, um den Anforderungen der Angabe zu genügen.

Für diese Aufgabe wird das Applet nicht mehr benötigt, kann aber weiterhin zur Visualisierung herangezogen werden.

### Hinweise für die Lehrperson

Als möglicher Einstieg in das Thema bietet sich auch an, etwaige Treppenlifte im Schulgebäude zu betrachten und diese auszuprobieren. Ergänzend kann über die Bedeutung und den Einsatz von Treppenliften in der Alten- und Behindertenpflege gesprochen werden.

Sollten die SchülerInnen keine geeigneten Beschreibungen in Aktivität 1 finden, können durch die Lehrkraft zusätzliche Orientierungsfragen gestellt werden:

- Welcher Eckpunkt bewegt sich zuerst?
- Welche Bahn beschreiben die Punkte?
- Welcher Eckpunkt legt rund um die Ecke den längsten/kürzesten Weg zurück?

In Aktivität 2 kann der angeführte Maßstab bei einigen SchülerInnen zu Verwirrungen führen. Ein unterstützender Hinweis durch die Lehrkraft, dass die angezeigten Längen im Plan Zentimetern entsprechen und gegebenenfalls eine Beispielrechnung im Plenum können unnötige Schwierigkeiten vermeiden.

Ein fächerübergreifender Zugang mit Physik ist in diesem Beispiel ebenfalls möglich. So könnten zum Beispiel vor oder nach der Unterrichtseinheit in Mathematik in einer Physikstunde über Zentripetalkräfte oder G-Kräfte bei Rotationen gesprochen werden. Eine Diskussion über maximale Rotationsgeschwindigkeiten bezüglich auftretender Beschleunigungen oder möglicher Materialermüdungen könnte an dieses Thema ebenso anschließen.

# 19. Simulation von Aktienkursen

**Einführung**

Schwerpunkt dieser Unterrichtssequenz ist die Simulation künftiger Aktienkurse. Zuerst sollen die SchülerInnen die Kursentwicklung eines Tages und eines Monats untersuchen und daraus Wahrscheinlichkeitsaussagen für die Kursentwicklung nach 30 Tagen treffen können. Weiters wird der Einfluss wichtiger Parameter einer Aktie (Trend und Volatilität) auf die mögliche Aktienkursentwicklung untersucht.

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autor | Lucia Del Chicca, Edith Lindenbauer |
| Thema | Simulation, Finanzmathematik |
| Schulstufe, Fach | 12. Schulstufe, Mathematik |
| Dauer | 2-3 Unterrichtseinheiten |
| SchülerInnen-material | https://ggbm.at/apupRnHN |
| Unternehmen | Invest-Design |
| Links | Unterrichtsplanung: https://ggbm.at/Ckb8s7Qd<br>Lösung: https://ggbm.at/WAsFk3FQ |

### Vorwissen und Voraussetzungen

- Die SchülerInnen kennen den Begriff der diskreten Zufallsvariable und der diskreten Verteilung.
- Die SchülerInnen kennen die Begriffe „Erwartungswert“ und „Standardabweichung“.
- Die SchülerInnen können Wahrscheinlichkeiten basierend auf relativen Häufigkeiten abschätzen.
- Die SchülerInnen können Simulationen mit GeoGebra mit Hilfe normalverteilter Zufallsvariablen durchführen.
- Die SchülerInnen können den Einfluss von Trend und Volatilität auf die Aktienkursentwicklung beschreiben.
- Die SchülerInnen können grobe Wahrscheinlichkeitsaussagen über eine Aktienkursentwicklung treffen.

### Lernergebnisse und Kompetenzen

- Die SchülerInnen können Simulationen mit GeoGebra mit Hilfe normalverteilter Zufallsvariablen durchführen.
- Die SchülerInnen können künftige mögliche Aktienkurse mit Hilfe von Trend und Volatilität simulieren.
- Die SchülerInnen können den Einfluss von Trend und Volatilität auf die Aktienkursentwicklung beschreiben.
- Die SchülerInnen können grobe Wahrscheinlichkeitsaussagen über eine Aktienkursentwicklung treffen.

### Unterrichtsablauf

Zuerst wird der Ablauf der Unterrichtssequenz gemeinsam besprochen und die SchülerInnen erhalten den Link zum GeoGebra Buch. Die Problemstellung – Simulation von Aktienkursen – wird erklärt. Dabei kann auf die Firma Invest-Design eingegangen werden (siehe „Einführung“ und „Problemstellung“).

### Aktivität 1

Im Arbeitsblatt „(Finanz-)mathematische Hintergründe und Begriffe“ besprechen die SchülerInnen gemeinsam mit der Lehrperson das Wiener'sche Aktienkursmodell. Die Formel (siehe Abb. 19.1) wird bekanntgegeben und deren Bestandteile gemeinsam analysiert und besprochen.

$$S_1 = S_0 \cdot e^{\left(\mu \cdot \Delta t + W_1 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\Delta t}\right)}$$

*Abb. 19.1: Formel zum „Wiener'schen Aktienkursmodell“ zur Berechnung eines möglichen Aktienkurswerts zum Zeitpunkt t = 1*

| | |
|---|---|
| $S_0$ ... Aktienkurs zum Zeitpunkt $t = 0$ | $\sigma$ ... Volatilität der Aktienrendite |
| $S_1$ ... Aktienkurs zum Zeitpunkt $t = 1$ | $W_1$ ... normalverteilte Zufallsvariable |
| $\mu$ ... Rendite/Trend | $\Delta t$ ... betrachtetes Zeitintervall zwischen 0 und 1 |

Eine detaillierte Erklärung zu den Begriffen und ihren Zusammenhängen sowie dem Wiener'schen Aktienkursmodell ist im Arbeitsblatt angeführt.

Abhängig vom Vorwissen der SchülerInnen kann dieses Modell der exponentiellen stetigen Verzinsung oder exponentiellen Wachstumsprozessen gegenübergestellt werden.

## Aktivität 2

In Aufgabe 1 soll die Aktienkursentwicklung einer fiktiven Aktie „Airport" für einen Tag simuliert werden. Trend und Volatilität werden dabei vorgegeben. Die SchülerInnen sollen diese Aufgabe mit GeoGebra lösen. Hierfür stehen zwei Varianten zur Verfügung. Das Arbeitsblatt „1 Tag – Variante A" ist etwas herausfordernder: der Lösungsweg ist vollkommen offen und keine Hilfestellung wird gegeben. Im Arbeitsblatt „1 Tag - Variante B" sind bereits erste Schritte der Lösung durchgeführt (siehe Abb. 19.2).

Die beiden Werte $S_0$ und $S_1$ sollen im Grafikfenster dargestellt werden. Die SchülerInnen sollen abschließend deren unterschiedliche Ergebnisse für $S_1$ diskutieren.

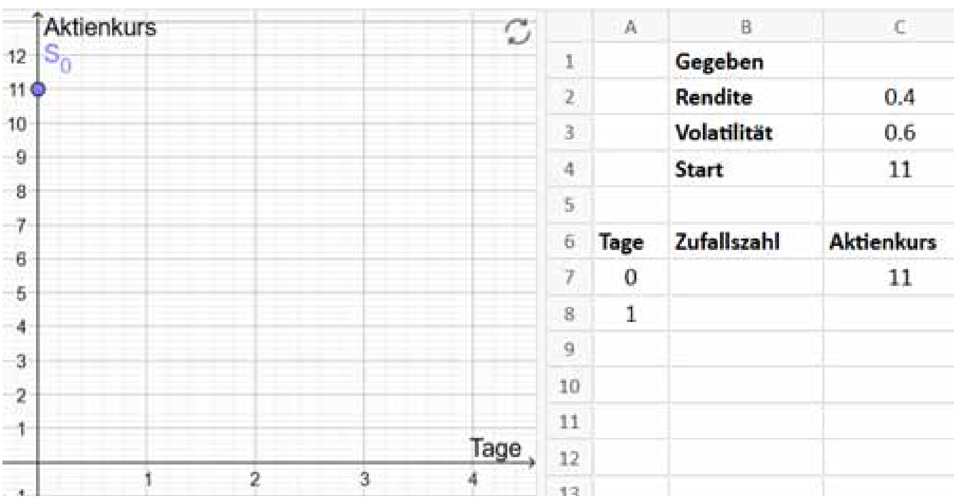
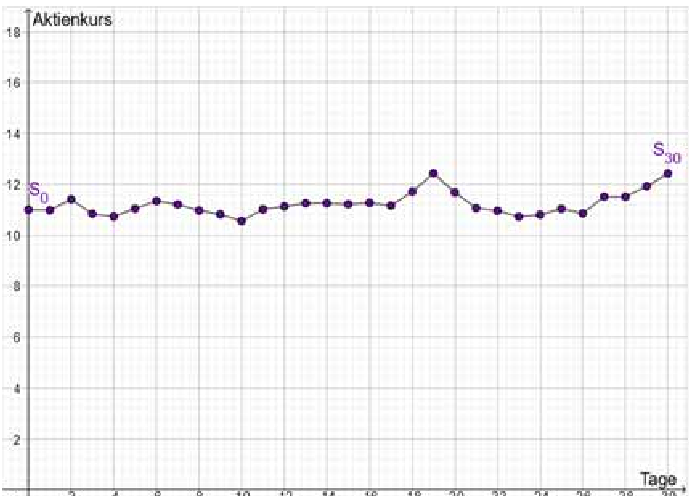



*Abb. 19.2: „1 Tag – Variante B" mit einigen voreingestellten Tabellenelementen und Hinweisen*

## Aktivität 3

Aufbauend auf Aufgabe 1 soll in Aufgabe 2 mit Hilfe des Arbeitsblattes „1 Monat“ die Aktienkursentwicklung einer fiktiven Aktie „Airport“ für einen Monat, d.h. 30 Tage, simuliert werden. Damit soll eine mögliche Wertentwicklung im Lauf dieser 30 Tage ermittelt werden. Trend und Volatilität werden dabei von Aufgabe 1 beibehalten.

Die SchülerInnen sollen diese Aufgabe mit GeoGebra lösen (entweder online im GeoGebra Buch - hier wurde ein leeres Applet vorbereitet - oder offline). Alle Werte ($S_0$, $S_1$, $S_2$, ...) sollen im Grafikfenster dargestellt sowie die Ergebnisse mit KollegInnen verglichen und diskutiert werden. Eine mögliche Lösung ist in Abb. 19.3 dargestellt.




| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | | **Gegeben** | |
| 2 | | **Rendite** | 0.4 |
| 3 | | **Volatilität** | 0.6 |
| 4 | | **Start** | 11 |
| 5 | | | |
| 6 | **Tage** | **Zufallszahl** | **Aktienkurs** |
| 7 | 0 | | 11 |
| 8 | 1 | -0.09 | 10.98 |
| 9 | 2 | 1.16 | 11.4 |
| 10 | 3 | -1.66 | 10.84 |
| 11 | 4 | -0.33 | 10.73 |
| 12 | 5 | 0.87 | 11.04 |
| 13 | 6 | 0.82 | 11.34 |
| 14 | 7 | -0.43 | 11.2 |
| 15 | 8 | -0.71 | 10.97 |
| 16 | 9 | -0.49 | 10.81 |
| 17 | 10 | -0.81 | 10.55 |
| 18 | 11 | 1.34 | 11.0. |

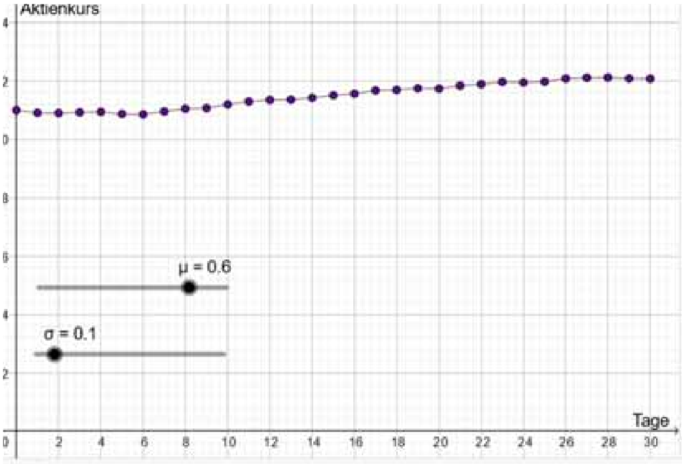
*Abb. 19.3: Musterlösung zur Aktivität 3*

## Aktivität 4

In Aufgabe 3 wird nun mit Hilfe des Arbeitsblattes „Trend und Volatilität“ untersucht, wie sich eine Veränderung des Trends und der Volatilität auf die mögliche Aktienkursentwicklung auswirkt. Dazu kann aufbauend auf Aufgabe 2 die Eingabe für Trend und Volatilität im Tabellenfenster verändert werden.

In Aufgabe 3 des GeoGebra Buches hingegen können die Werte von Trend und Volatilität dynamisch mit Hilfe von Schiebereglern verändert werden (siehe Abb. 19.4). Somit können die SchülerInnen einfach erkennen, welche Auswirkungen die Veränderung von Trend und Volatilität auf den möglichen Aktienkurs haben.

Zum Abschluss sollen Multiple Choice Fragen dazu beantwortet und die Erkenntnisse mit KollegInnen verglichen und diskutiert werden (siehe Abb. 19.5). Für die Antworten verweisen wir auf den Link zu den Lösungen.




| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | | Gegeben | |
| 2 | | Rendite | 0.6 |
| 3 | | Volatilität | 0.1 |
| 4 | | Start | 11 |
| 5 | | | |
| 6 | Tage | Zufallszahl | Aktienkurs |
| 7 | 0 | | 11 |
| 8 | 1 | -1.92 | 10.91 |
| 9 | 2 | -0.49 | 10.9 |
| 10 | 3 | 0.15 | 10.92 |
| 11 | 4 | -0.03 | 10.94 |
| 12 | 5 | -1.58 | 10.87 |
| 13 | 6 | -0.55 | 10.86 |
| 14 | 7 | 1.41 | 10.95 |
| 15 | 8 | 1.32 | 11.05 |
| 16 | 9 | 0.05 | 11.07 |
| 17 | 10 | 1.86 | 11.2 |

*Abb. 19.4: Arbeitsblatt „Trend und Volatilität“*

Wenn man für den Wert der Rendite einen immer größer werdenden Wert wählt, lässt sich...

Kreuze deine Antwort hier an

- ☐ erkennen, dass der Wert der Aktie tendenziell stärker fällt.
- ☐ erkennen, dass der Wert der Aktie tendenziell stärker steigt.
- ☐ kein besonderes Verhalten erkennen.

✓ ANTWORTEN ÜBERPRÜFEN

Welche Aussagen sind richtig?

Kreuze deine Antwort hier an

- ☐ Der Wert der Volatilität beeinflusst eindeutig, ob der Aktienkurs steigt oder fällt.
- ☐ Anschaulich betrachtet, scheint ein großer Wert der Volatilität die Stärke der Schwankungen des täglichen Aktienkurses zu beeinflussen.
- ☐ Wenn der Wert der Volatilität gleich Null ist, hat der Aktienkurs eine exponentielle Entwicklung.
- ☐ Wenn der Wert der Volatilität niedrig ist, ist es schwieriger eine Aussage über die Kursentwicklung zu machen.

✓ ANTWORTEN ÜBERPRÜFEN

*Abb. 19.5: Multiple Choice Aufgaben zu Trend und Volatilität*

**Aktivität 5**

Aufgabe 4 basiert auf Aufgabe 2: Es sollen nun 20 mögliche Entwicklungen des Aktienkurses erzeugt und im Grafikfenster dargestellt werden. Hierfür stehen erneut zwei Varianten als Differenzierungsmöglichkeit bereit, die in den Arbeitsblättern „Vergleich mehrerer Simulationen – Variante A“ und „Vergleich mehrerer Simulationen – Variante B“ gegenübergestellt werden. In Variante A soll dies von den SchülerInnen selbst mit GeoGebra programmiert werden, in Variante B (siehe Abb. 19.6) ist bereits ein fertiges GeoGebra-Arbeitsblatt vorhanden.

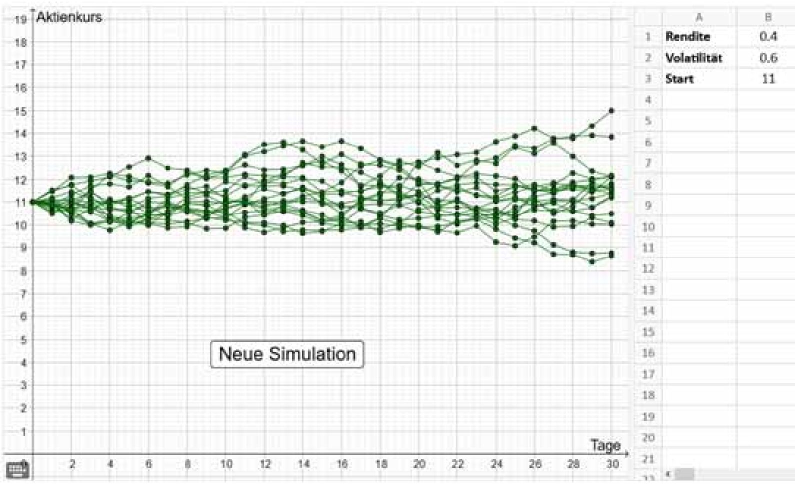



*Abb. 19.6: Variante B mit bereits vorgefertigter Simulation*

Ausgehend von diesen Simulationen soll die Wahrscheinlichkeit abgeschätzt werden, mit der nach Ablauf eines Monats der Aktienkurs zwischen 11 und 13 Punkten liegt.

**Hinweise für die Lehrperson**

Falls die SchülerInnen nur den Link zu den Materialien bekommen, werden die Ergebnisse nicht automatisch gespeichert. Damit die Eingaben gespeichert werden, müssen die Materialien über eine GeoGebra Gruppe geteilt werden.

Um bei Aktivität 5 eine genauere Abschätzung angeben zu können, können die Ergebnisse der 20 Simulationen von allen SchülerInnen der Klasse gesammelt werden. Dann wird ermittelt, wie viele der möglichen Kursentwicklungen nach einem Monat zwischen 11 und 13 Punkten liegen (z.B. wenn 68 von 400 Simulationen zwischen 11 und 13 Punkten liegen, wäre die relative Häufigkeit 68/400 eine Abschätzung für die gesuchte Wahrscheinlichkeit).

# 20. Befüllen eines Rohstoffsilos

## Einführung

In dieser Unterrichtssequenz befassen sich die SchülerInnen mit der mathematischen Beschreibung der Befüllung eines Rohstoffsilos. Dabei sollen sie in Einzel- oder Partnerarbeit zunächst die Funktion der Füllkurve aufstellen. Ausgehend von diesen Ergebnissen werden Fragen zur momentanen Änderung der Füllhöhe gestellt und Ableitungen müssen ermittelt werden. Funktionale Zusammenhänge werden in Aufgabenformaten, ähnlich zu jenen der standardisierten Reifeprüfung, überprüft. Diverse Verständnisfragen komplettieren diese Unterrichtssequenz.

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autor | Tanja Wassermair |
| Thema | Funktionen, Momentane Änderung - Steigung |
| Schulstufe, Fach | 11. Schulstufe, Mathematik |
| Dauer | 1-2 Unterrichtseinheiten |
| SchülerInnen-material | https://ggbm.at/mvK86S2n |
| Unternehmen | Schaumann |
| Links | Unterrichtsplanung: https://ggbm.at/VgbYshT8 |

*Quelle: www.schaumann.at*

### Vorwissen und Voraussetzungen

- Die SchülerInnen wissen, wie eine Funktion definiert ist.
- Die SchülerInnen können den Definitionsbereich einer Funktion bestimmen.
- Die SchülerInnen kennen die Wurzelfunktionen und lineare Funktionen.
- Die SchülerInnen wissen, wie man lineare Funktionen und Wurzelfunktionen für eine beschrieben Situation modelliert.
- Die SchülerInnen wissen, wie der Strahlensatz angewandt wird.
- Die SchülerInnen wissen, wie Funktionen rechnerisch und grafisch abgeleitet werden.

### Lernergebnisse und Kompetenzen

- Die SchülerInnen können mit Hilfe von Technologie (GeoGebra) ein Boxplot-Diagramm erstellen.
- Die SchülerInnen können statistische Kennzahlen im jeweiligen Kontext interpretieren und ermitteln.
- Die SchülerInnen können Eigenschaften des arithmetischen Mittels und des Medians nutzen und richtig anwenden.

### Unterrichtsablauf

In einer kurzen Einführung wird der Ablauf der Unterrichtssequenz besprochen. Die SchülerInnen erhalten den Link zum GeoGebra Buch, das die Aufgabenstellungen beinhaltet. Es wird kurz auf die Firma SCHAUMANN eingegangen und das Thema der Aufgabenstellungen - das Befüllen eines Silos und das Finden einer Füllfunktion - wird erklärt (siehe „Einführung“).

Alternativ können die SchülerInnen in einer vorhergehenden Unterrichtseinheit dazu aufgefordert werden, in ihrer unmittelbaren Umgebung nach solchen Silos Ausschau zu halten und eventuell Fotos mit in die Schule zu bringen.

Vor allem in ländlichen Gegenden sind solche Silos Teil des Landschaftsbildes.

### Aktivität 1

In der Aktivität „Füllkurve eines Silos“ arbeiten die SchülerInnen mit einem GeoGebra Applet (siehe Abb. 20.1), in dem ein 3D-Modell eines Silos dargestellt ist. Mit Schieberegler können die Maße des Silos verändert werden und die Zuflussgeschwindigkeit in diesen Silo kann reguliert werden. Durch eine Animation kann der Füllvorgang schematisch beobachtet werden.

In einem zweiten Grafik-Fenster wird der Graph der Füllfunktion angezeigt. Die Animation der Füllung und der Graph können miteinander verglichen werden.

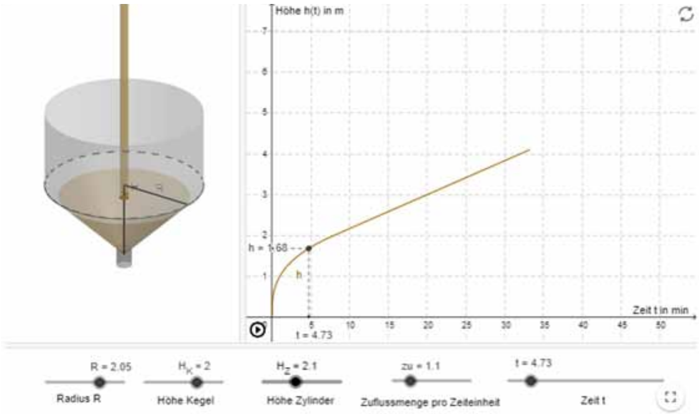



*Abb. 20.1: Applet zu Füllkurve eins Silos*

Anschließend sollen Fragen zu funktionalen Abhängigkeiten beantwortet werden. Die Fragestellungen beziehen sich dabei teilweise auf die oben beobachtete Füllkurve. Außerdem wird in einer dieser Fragen versucht, die SchülerInnen bereits auf die verschiedenen Arten der zusammengesetzten Funktionen hinzuweisen.

### Aktivität 2

In der Aktivität „Füllfunktion eines Silos“ sollen die SchülerInnen die Gleichung der Füllfunktion herausfinden und bestimmen. Dazu werden einige Hinweise, wie zum Beispiel das Heranziehen des Strahlensatzes, gegeben.

Die SchülerInnen haben in Aktivität 1 bereits herausgefunden, dass sich die Füllfunktion h(t) aus zwei Funktionen zusammensetzt: einer Wurzelfunktion und einer linearen Funktion. Daher sollen sie auch zwei Füllfunktionen erhalten - eine für den Kegelteil, und eine für den Zylinderteil des Silos. Entsprechend müssen Definitionsbereiche für die Teilfunktionen gesetzt werden.

Diese Überlegungen werden in Multiple-Choice-Fragen im Applet überprüft.

Schlussendlich soll mit vorgegebenen Maßen die Funktion eines bestimmten Silos dargestellt werden.

### Aktivität 3

In dieser Aktivität beschäftigen sich die SchülerInnen mit der momentanen Änderung der Füllfunktionen. Zunächst sollen sie die Füllfunktion in einem GeoGebra Applet grafisch ableiten (siehe Abb. 20.2).

Die SchülerInnen sollen hierbei einfach die Stiftwerkzeuge im Applet verwenden und im zweiten Grafikfenster eine mögliche grafische Ableitung der gegebenen Füllfunktion einzeichnen.

Anschließend wird mit Hilfe des CAS-Tools von GeoGebra diese grafische Ableitung in einem eigenen Fenster überprüft. Etwaige Unterschiede (Definitionsbereiche) sollen interpretiert werden. Danach werden Interpretations- und Argumentationsfragen zur 1. Ableitung gestellt.

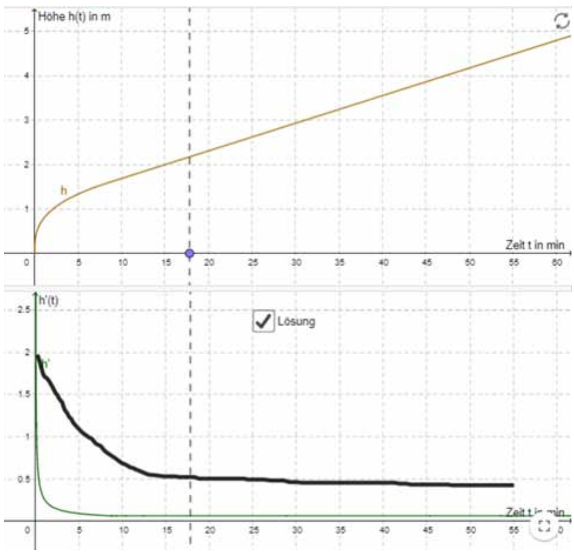



*Abb. 20.2: Applet zum grafischen Ableiten mit angezeigter Lösung*

### Aktivität 4

Die Silos werden nicht nur befüllt, sondern gewisse Mengen der Rohstoffe werden für die Produktion auch entnommen.

Ausgehend von dem erhaltenen Wissen aus den vorigen Aufgaben sollen die SchülerInnen in der Aktivität „Abflusskurve eines Silos“ den Graph einer möglichen Abflussfunktion zu einem vorgegebenen Rohstoffsilo skizzieren. Die Skizze kann durch eine einblendbare Lösung kontrolliert werden (siehe Abb. 20.3).

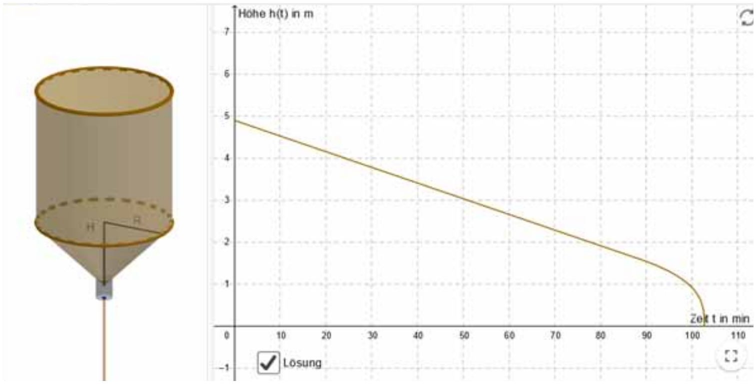



*Abb. 20.3: Applet zur Skizzierung einer möglichen Abflussfunktion inkl. Lösung*

Der Verlauf der Abflusskurve wird anschließend betrachtet und Aussagen bzgl. dieser Funktion sollen auf Richtigkeit überprüft werden.

### Zusatzaufgabe - Modellgrenzen

Als Zusatz können „Grenzen dieses idealen Modells" betrachtet werden. Folgende Fragen dienen dabei als Leitideen:

- Wie verändert sich die Füllfunktion, wenn noch eine gewisse Menge an Rohstoff im Silo vorhanden ist?
- Welche Auswirkungen hat der Aggregatzustand des Rohstoffes auf die Füllhöhe?

Nach Eingabe der Antwort können die SchülerInnen auf die Schaltfläche „Antwort überprüfen" drücken. Dabei wird die richtige Antwort angezeigt, die mit der eigenen Antwort verglichen werden kann.

### Hinweise für die Lehrperson

Um die Füllfunktionen h(t) in Aktivität 2 aufstellen zu können, benötigen die SchülerInnen die Volums-Formeln für Kegel und Zylinder. Im Falle des Kegels muss zusätzlich der Strahlensatz eingebaut werden.

Es wird eine Funktion V(t) mit Hilfe der Volumsformel ermittelt. Diese wird mit V(t)=Z*t schließlich gleichgesetzt und auf h(t) umgeformt.

Zunächst sollen die Funktionen allgemein mit Variablen (R, HK, HZ, Z) aufgestellt werden. Im zweiten Schritt wird ein konkreter Silo betrachtet.

Die Lösungen aller Aufgaben werden in den Aktivitäten angezeigt, sobald die SchülerInnen auf „Antworten überprüfen" klicken.

### Hinweis zur Verwendung von GeoGebra:

Um die 3. Wurzel in GeoGebra einzugeben, kann dieser Befehl verwendet werden: NteWurzel(x,n), wobei x der Diskriminante entspricht.

# 21. Boxplot

**Einführung**

In dieser Unterrichtssequenz sollen die SchülerInnen mit gegebenen Daten zu Produktionsmengen verschiedener Schweinefuttermittel der Firma Schaumann einen Boxplot (Kastenschaubild) in einem GeoGebra Applet erstellen und die wichtigsten statistischen Kennzahlen ablesen. Die SchülerInnen sollen dabei einen gegebenen Boxplot interpretieren und richtige bzw. falsche Aussagen herausfinden. Die Aufgabenformate richten sich nach der standardisierten Reifeprüfung in Österreich.

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autor | Carolin Kern |
| Thema | Beschreibende Statistik, Boxplot |
| Schulstufe, Fach | 8.-13. Schulstufe, Mathematik |
| Dauer | 1 Unterrichtseinheit |
| SchülerInnen-material | https://ggbm.at/vQXe2Gvg |
| Unternehmen | Schaumann |
| Links | Unterrichtsplanung: https://ggbm.at/Hf23Wd22<br>Lösungen: https://ggbm.at/QB7BTMP8 |


*Quelle: www.schaumann.at*

### Vorwissen und Voraussetzungen

- Die SchülerInnen wissen, was ein Boxplot ist.
- Die SchülerInnen wissen, wie Minimum, Maximum, Median und Quartile im Boxplot abgelesen werden.

### Lernergebnisse und Kompetenzen

- Die SchülerInnen können mit Hilfe von Technologie (GeoGebra) einen Boxplot erstellen.
- Die SchülerInnen können statistische Kennzahlen (Median, Quartile, Spannweite) im jeweiligen Kontext interpretieren und ermitteln.
- Die SchülerInnen können Eigenschaften des arithmetischen Mittels und des Medians nutzen und richtig anwenden.

### Unterrichtsablauf

Zu Beginn wird der Ablauf der Unterrichtssequenz besprochen und die SchülerInnen erhalten den Link zum GeoGebra Buch. Dabei kann auf die Aufgabenstellung und die Firma SCHAUMANN kurz eingegangen werden (siehe

„Einführung: Geschäftsführer-Tagung“). Im Plenum wird zunächst gemeinsam wiederholt oder bei Bedarf gelernt, wie ein Boxplot mit Hilfe von Technologie (GeoGebra) erstellt wird. Dabei kann das Arbeitsblatt „Wie erstelle ich Boxplots?“ als Unterstützung verwendet werden.

Es sollte für jeden Schüler/ jede Schülerin ein Computer, Laptop oder Tablet zur Verfügung stehen.

### Aktivita 1

Die SchülerInnen bearbeiten selbstständig das Arbeitsblatt „Boxplot erstellen: Geschäftsführer-Tagung“. Dabei sollen sie einen Boxplot mit einem zur Verfügung gestellten GeoGebra Applet erstellen. Dazu müssen sie aus gegebenen Daten zunächst eine Liste und anschließend das Kastenschaubild erzeugen (siehe Abb. 21.1).

Danach sollen die SchülerInnen statistische Kennzahlen (Median, Quartile, Spannweite) mit Hilfe des erstellten Boxplots bestimmen und im Rahmen einer Verständnisfrage einen Satz vervollständigen.

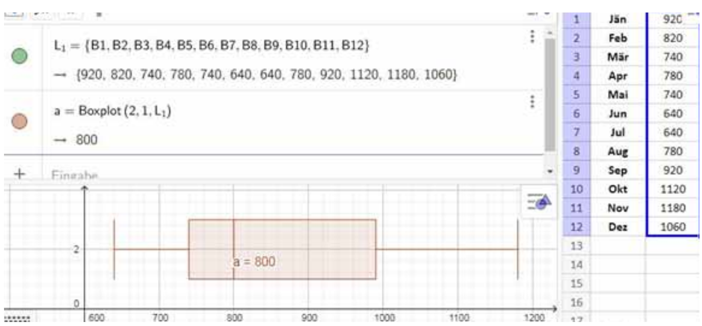



*Abb. 21.1: Lösung Aktivität 1*

## Aktivität 2

Im Arbeitsblatt „Boxplot interpretieren: Produktionszahlen" sollen die SchülerInnen die Kastenschaubilder der Produktionszahlen von zwei verschiedenen Produkten miteinander vergleichen (siehe Abb. 21.2).

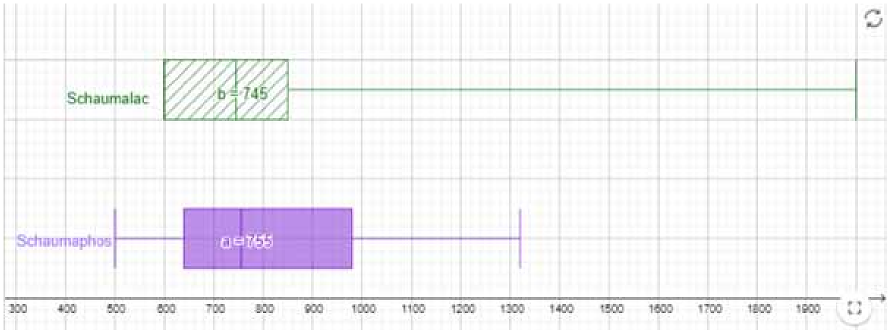
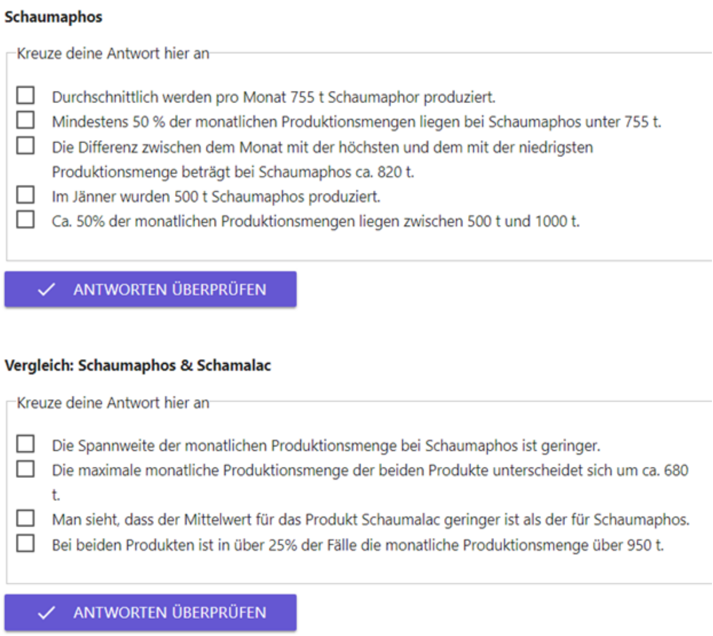



*Abb. 21.2: Boxplot interpretieren*

Dabei werden zunächst Aussagen zu den dargestellten Boxplots auf ihre Richtigkeit überprüft.

Anschließend werden beide Boxplots miteinander verglichen. Hierzu gibt es wiederum Aussagen, die entweder wahr oder falsch sind und dementsprechend angekreuzt werden müssen (siehe Abb. 21.3).



**Schaumaphos**

Kreuze deine Antwort hier an

- ☐ Durchschnittlich werden pro Monat 755 t Schaumaphor produziert.
- ☐ Mindestens 50 % der monatlichen Produktionsmengen liegen bei Schaumaphos unter 755 t.
- ☐ Die Differenz zwischen dem Monat mit der höchsten und dem mit der niedrigsten Produktionsmenge beträgt bei Schaumaphos ca. 820 t.
- ☐ Im Jänner wurden 500 t Schaumaphos produziert.
- ☐ Ca. 50% der monatlichen Produktionsmengen liegen zwischen 500 t und 1000 t.

ANTWORTEN ÜBERPRÜFEN

**Vergleich: Schaumaphos & Schamalac**

Kreuze deine Antwort hier an

- ☐ Die Spannweite der monatlichen Produktionsmenge bei Schaumaphos ist geringer.
- ☐ Die maximale monatliche Produktionsmenge der beiden Produkte unterscheidet sich um ca. 680 t.
- ☐ Man sieht, dass der Mittelwert für das Produkt Schaumalac geringer ist als der für Schaumaphos.
- ☐ Bei beiden Produkten ist in über 25% der Fälle die monatliche Produktionsmenge über 950 t.

ANTWORTEN ÜBERPRÜFEN

*Abb. 21.3: Multiple Choice Fragen - Interpretation der Boxplots*

In der Zusatzfrage sollen die SchülerInnen beantworten, wie sich der große Unterschied zwischen Median und Mittelwert des Produkts Schaumalac erklären lassen kann. In ihrer Antwort sollten sie erklären, dass der arithmetische Mittelwert empfindlich gegenüber Ausreißern (extrem abweichende Werte) reagiert. Der Median hingegen ist robust gegenüber Ausreißern.

**Hinweise für die Lehrperson**

Nachdem die SchülerInnen in dieser Unterrichtssequenz gelernt haben, wie mit Hilfe von GeoGebra Boxplots erstellt werden, könnten (als Hausübung) ähnliche Beispiele gegeben werden. Dabei kann man entweder wieder mit gegebenen Daten arbeiten oder man lässt die SchülerInnen selbst Daten zu einer bestimmten Frage sammeln und die Antworten in Form eines Boxplots darstellen.

Beispiele

- Stelle die Größe von zehn Personen aus deinem Bekanntenkreis in einem Boxplot dar.
- Erstelle einen Boxplot, der die Anzahl der Buben oder Mädchen in allen Klassen unserer Schule darstellt.
- Überleg dir eine Mathematikaufgabe und lass diese von mindestens 10 Personen lösen. Notiere die Zeit, die sie dafür brauchen und erstelle einen Boxplot mit den gesammelten Daten.

Als Variation können die SchülerInnen auch Daten zu verschiedenen Themen sammeln und diese in Kleingruppen präsentieren.

# 22. Inventur

**Einführung**

In dieser Unterrichtssequenz beschäftigen sich die SchülerInnen mit einer Diagramm-Auswertung. Sie müssen dazu bestimmte statistische Größen (Mittelwert, Minimum, Maximum) bestimmen. Dafür kann optional eine Tabellenkalkulation verwendet werden. Zusätzlich müssen Antworten auf Fragen gefunden werden, mit denen auch industrielle Betriebe in der Realität konfrontiert sind.

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autor | Tanja Wassermair |
| Thema | Statistik, Mittelwert |
| Schulstufe, Fach | ab 6. Schulstufe, Mathematik |
| Dauer | 1-2 Unterrichtseinheiten |
| SchülerInnen-material | https://ggbm.at/XUdCPeud |
| Unternehmen | Schaumann |
| Links | Unterrichtsplanung: https://ggbm.at/gwq8cDU2<br>Lösungen: https://ggbm.at/TJtk9tCN |

*Quelle: www.schaumann.at*

### Vorwissen und Voraussetzungen

- Die SchülerInnen wissen, wie man Daten aus einem Diagramm erhält.
- Die SchülerInnen wissen, wie man den arithmetische Mittelwert berechnet.
- Die SchülerInnen wissen, wie man Minimum und Maximum einer Datenliste bestimmt.
- Die SchülerInnen wissen, wie man einen prozentuellen Anteil berechnet.
- Die SchülerInnen wissen, wie man Maßeinheiten umwandelt.

### Lernergebnisse und Kompetenzen

- Die SchülerInnen können Daten aus Diagrammen ablesen und auswerten.
- Die SchülerInnen können Anwendungsaufgaben zum Thema Statistik lösen.
- Die SchülerInnen können Aufgaben mit Tabellenkalkulation lösen.

### Unterrichtsablauf

Zu Beginn wird der Ablauf der Unterrichtssequenz gemeinsam besprochen und die Materialien werden mit den SchülerInnen geteilt. Das Thema wird erklärt. Dazu kann auf die Problemstellung und die Firma SCHAUMANN eingegangen werden (siehe „Einführung Inventur“). Dabei kann auch über eine Inventur, deren Ablauf und deren Wichtigkeit gesprochen werden.

### Aktivität 1

Die SchülerInnen arbeiten selbstständig an dem Arbeitsblatt „Inventur: Einkaufsmengen“. Dabei sollen sie wichtige statistische Daten (wie Maximum und Minimum) aus einem Diagramm ablesen bzw. den arithmetischen Mittelwert und die Gesamt-Einkaufsmenge berechnen (siehe Abb. 22.1). Die Berechnung kann auch mit einer Tabellenkalkulation erfolgen, die im GeoGebra Applet integriert ist.

Weiters sollen die SchülerInnen überlegen, ob aufgrund der Einkaufsmengen auch eine Vermutung bzgl. der Produktionsmengen aufgestellt werden kann.

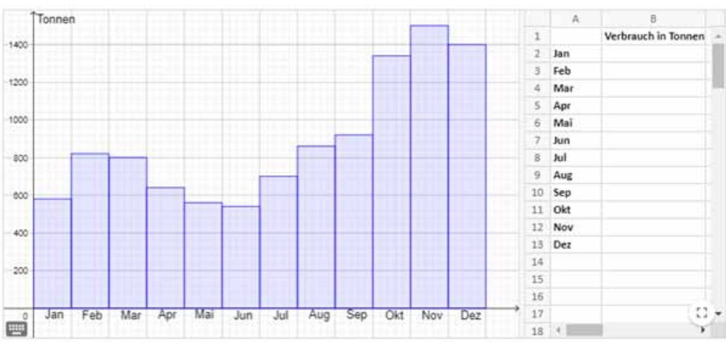



*Abb. 22.1: Diagramm Einkauf*

Im Anschluss werden auch noch Fragen zum Diagramm und dessen Interpretation direkt in der Aktivität gestellt.

### Aktivität 2

Wie in der vorigen Aktivität müssen die SchülerInnen im Arbeitsblatt „Inventur: Produktionsmengen" ähnliche Fragen beantworten. Dieses Mal werden jedoch die Produktionsmengen des Rohstoffes betrachtet. In einem Diagramm können die monantlichen Produktionsmengen abgelesen und in die nebenstehende Tabelle eingetragen werden. Mit Hilfe von Tabellenkalkulation kann danach die Gesamtmenge schnell berechnet werden. Abbildung 22.2 zeigt das Applet inklusive der Lösungen.

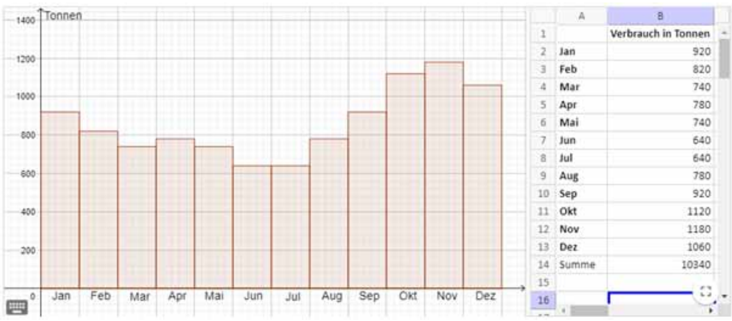



*Abb. 22.2: Diagramm Produktion mit Lösung*

Ebenfalls wie in Aktivität 1 werden im Anschluss an Tabellenkalkulation Fragen gestellt, bei denen die SchülerInnen ihre erhaltenen Ergebnisse interpretieren müssen.

### Aktivität 3

Nachdem die SchülerInnen nun berechnet haben, wie viel des Rohstoffes jeweils eingekauft bzw. verbraucht wurde, sollen sie sich nun mit dem „Soll-Stand" und „Ist-Stand" befassen. Im Arbeitsblatt „Inventur: SOLL und IST-Stände" erhalten sie dazu noch zusätzliche Informationen, um das SOLL berechnen zu können. Der IST-Stand wird vorgegeben.

Die SchülerInnen sollen im weiteren die Differenz zwischen SOLL und IST berechnen und die damit verbundenen Kosten für die Firma bestimmen.

Abschließend sollen sie über die Frage nachdenken, worin Gründe für eine Differenz zwischen SOLL- und IST-Stand liegen könnten.

**Dabei könnten zum Beispiel folgende Gründe genannt und diskutiert werden:**

- Falsche Dokumentation der Einkaufs-/Produktionsmengen
- Falsche Durchführung der Inventur-Messung
- Rückstände/Verluste des Rohstoffes in den Produktionsmaschinen
- Falsche Anlieferung durch die Speditionen
- Verlust von Rohstoffmengen bei Produktionen (z.B. Aufreißen der Säcke von fertigen Produkten o.ä.)
- „Übergewicht" mancher Säcke. (Laut Angabe sind z.B. 50 kg in einem Sack, im Wirklichkeit sind es jedoch 50,1kg).
- usw.

**Hinweise für die Lehrperson**

Es wird empfohlen dieses Buch über eine GeoGebra Gruppe zu teilen, da nur auf diese Weise die Ergebnisse und Eingaben gespeichert werden. Falls nicht mit einer GeoGebra Gruppe gearbeitet wird, ist es wichtig die SchülerInnen darauf hinzuweisen, dass die Ergebnisse schriftlich festgehalten werden müssen, da die Aufgaben aufbauend sind und auf die Resultate der vorherigen Arbeitsblätter zurückgegriffen werden muss.

**In einer anschließenden Diskussion können verschiedene Fragen aufgegriffen werden:**

- Wie wichtig ist es für die Firma zu wissen, wann ein Produktionsmaximum oder -minimum vorliegt? Könnten daraus Schlüsse für weitere Bestellungen/ Produktionen/Jahre ... gezogen werden?
- Kann aus einem Diagramm herausgelesen werden, wann die „stressigste" Zeit im Jahr ist?
- Es möchten mehrere MitarbeiterInnen z.B. im November oder Dezember des nächsten Jahres eine Woche Urlaub. Ist es für die Firma gut, wenn zu dieser Zeit mehrere MitarbeiterInnen einen Urlaub beantragen? Wie sieht es mit der klassischen Urlaubszeit im Sommer aus?
- Worin könnten mögliche Gründe für die Differenzen in den SOLL- und IST-Ständen liegen? Wurde die Inventur falsch durchgeführt? Wurden die Einkaufs- und Produktionsmengen falsch dokumentiert? Oder können die Rohstoffverluste auch anders erklärt werden (z.B. durch Rückstände in Maschinen, Fehlproduktionen, die wieder rückgeführt werden...)?

# 23. Rohstoffsilo

**Einführung**

In dieser Unterrichtssequenz arbeiten die SchülerInnen in zwei Phasen an Fragestellungen zu Rohstoffmengen und der Messung von Füllständen in Rohstoffsilos. In der ersten Phase bauen die SchülerInnen im Stil einer flex-Aufgabe ein Modell eines Rohstoffsilos und überlegen in Gruppen verschiedene Möglichkeiten zur Füllstandsmessung. In der zweiten Phase bearbeiten die SchülerInnen verschiedene GeoGebra Arbeitsblätter zu modellhaften und realen Rohstoffsilos der Firma SCHAUMANN.

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autoren | Tanja Wassermair, Johanna Zöchbauer |
| Thema | Mittelwert |
| Schulstufe, Fach | ab 6. Schulstufe, Mathematik |
| Dauer | 2 Unterrichtseinheiten |
| SchülerInnen-material | https://ggbm.at/vYnHhdCD<br>flex Materialien (siehe Aktivität 1) |
| Unternehmen | Schaumann |
| Links | Unterrichtsplanung: https://ggbm.at/hQKQUKPX<br>Lösungen: https://ggbm.at/TjtkvaBe |

*Quelle: www.schaumann.at*

**Vorwissen und Voraussetzungen**

- Die SchülerInnen wissen, wie der Mittelwert von mehreren Zahlen berechnet wird.
- Die SchülerInnen wissen, wie das Volumen eines Zylinders und Kegels berechnet wird.
- Die SchülerInnen wissen, wie Raum- und Hohlmaße umgewandelt werden können.
- Die SchülerInnen können Aufgabenstellungen zu Dichte, Masse und Volumen lösen.
- Die SchülerInnen wissen, wie man mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes die Länge einer Kathete berechnet.

**Lernergebnisse und Kompetenzen**

- Die SchülerInnen können anwendungsbezogene Aufgaben zur Volumenberechnung lösen.
- Die SchülerInnen können ein Modell zu vorgegebenen Parametern entwickeln und ihre Problemlösefähigkeit entwickeln.
- Die SchülerInnen können relevante Daten aus einer Grafik ablesen.

**Unterrichtsablauf**

Zu Beginn wird der Ablauf der Unterrichtssequenz gemeinsam besprochen und die Materialien werden mit den SchülerInnen geteilt. Bei Bedarf können das Thema und die einzelnen Aktivitäten genauer erklärt werden. Dabei kann auch auf die Problemstellung und die Firma SCHAUMANN eingegangen werden (siehe „Einführung Rohstoffsilo“). Außerdem werden die SchülerInnen für die flex-Phase und die spätere Arbeitsphase in passende Gruppen eingeteilt.

## Aktivität 1

In der ersten Phase sollen die SchülerInnen im Stil von flex-Aufgaben ein Modell eines Rohstoffsilos mit vorgegebenen Materialien erstellen. Die vorgegebenen Materialien müssen dabei nicht alle eingesetzt werden, es dürfen aber keine weiteren Materialien verwendet werden.

Folgende Materialien werden von der Lehrkraft vorgegeben (siehe „Lösung FLEX“): Schachteln / Kartons, Bänder, Lineal oder Maßband, Füllstoff (z.B. Styropor-Verpackungsmaterial), Schere, Klebeband

Erweiternd können noch „sinnlose“ Materialien wie Korken, Metalldraht, Münzen, Bindfaden, Gummiringe, ... angeboten werden.

Die SchülerInnen durchlaufen anschließend in ihren Gruppen die unterschiedlichen Phasen von flex-Aufgaben.

**flex-Aufgaben sind in vier klar abgegrenzte Phasen unterteilt:**

1. Kreative-Denkphase

Die SchülerInnen sammeln in der Gruppe alle möglichen Ideen, wie die zur Verfügung gestellten Materialien eingesetzt werden können, um den Arbeitsauftrag erfüllen zu können.

2. Entscheidungsfindung

Die SchülerInnen skizzieren ihre aussichtsreichste Idee und einigen sich in der Gruppe auf eine Umsetzung.

3. Experimentelle-Phase

Die SchülerInnen realisieren möglichst viele ihrer geplanten Ideen und notieren ihre Ergebnisse für eine spätere Diskussion in der Klasse.

4. Präsentation und Diskussion

Die einzelnen Gruppen präsentieren ihre Ergebnisse im Plenum und stellen sich der Diskussion.

Im Anschluss an diese vier Phasen sollen sich die SchülerInnen auch noch überlegen, wie sie mit ihrem jeweiligen Modell den Füllstand des Füllstoffes bestimmen könnten. Eine mögliche Methode findet sich in „Lösung FLEX" und ist in Abb. 23.1 dargestellt.

*Abb. 23.1: Mögliches Silomodell inklusiver möglicher Messmethode*

Wichtig hierbei ist, dass die SchülerInnen in ihrem jeweiligen Arbeiten noch nicht beeinflusst werden. Die Messmethoden der Mitarbeiter der Firma SCHAUMANN sollen also hier noch nicht erklärt werden, sondern erst im nächsten Arbeitsschritt mit den SchülerInnen besprochen und diskutiert werden.

Im Anschluss bearbeiten die SchülerInnen wieder in den Gruppen oder in Einzelarbeit die GeoGebra Aktivitäten zur Füllstandsmessung.

### Aktivität 2

In dieser Aktivität sollen die SchülerInnen die durchschnittlichen Füllstandshöhen eines modellhaften Rohstoffsilos berechnen.

Einführend zu dieser Aktivität empfiehlt es sich, den SchülerInnen im Plenum die Messmethode für Füllstände der Mitarbeiter der Firma SCHAUMANN zu erklären:

Die Mitarbeiter messen die Höhe des Füllstands mit Hilfe eines Lots, dessen Seillänge vom oberen Ende des Silos bis zum Füllmaterial mehrmals gemessen und anschließend der Mittelwert dieser Messdaten berechnet wird.

In der Aktivität „Höhe bestimmen“ sind in einer Tabelle mehrere Füllstandshöhen tabellarisch angeführt. Zur visuellen Unterstützung ist außerdem ein dreidimensionales Modell eines Rohstoffsilos angeführt, bei dem mittels eines Schiebereglers die Höhe des Füllmaterials verändert werden kann (siehe Abb. 23.2). Dieses Modell dient nur der besseren räumlichen Vorstellung, die Datenwerte in der Tabelle bleiben auch bei veränderten Füllständen gleich.

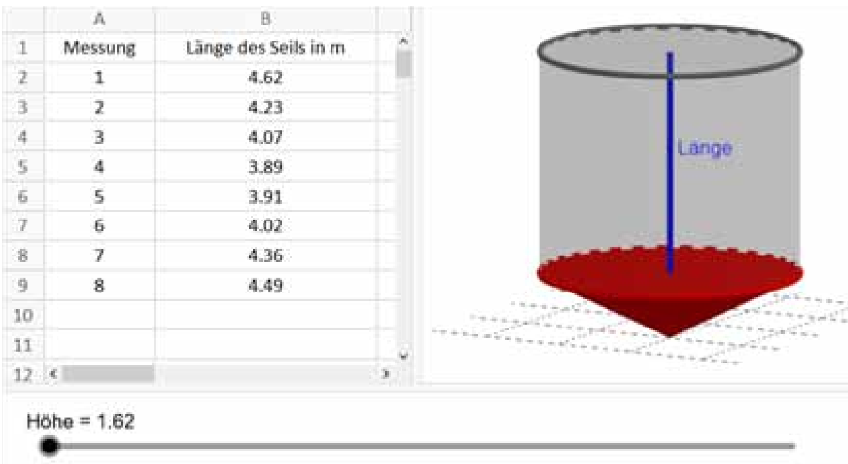



*Abb. 23.2: Applet zur Berechnung von durchschnittlichen Füllstandshöhen*

Anschließend an dieses Applet werden Fragen zur durchschnittlichen Seil- und Füllstandshöhe gestellt. Außerdem wird eine weiterführende Fragestellung zur (un-)gleichmäßigen Verteilung von Rohstoffen in Silos in Abhängigkeit deren Aggregatszustandes gestellt.

### Aktivität 3

Die nachfolgende Aktivität ermöglicht eine innere Differenzierung in der Klasse. Das Ziel ist die Berechnung des Volumens eines realen Rohstoffsilos. In beiden Fällen wird über die Volumen-Formeln von Zylinder und Kegel das Silo-Volumen berechnet.

In „Volumen des Silos – 1“ sehen die SchülerInnen einen gut beschrifteten Querschnitt eines modellhaften Silos (siehe Abb. 23.3). Die Maße sind leicht zu erkennen und die unterschiedlichen Teilfiguren des Querschnitts sind bereits eingezeichnet, was die Berechnung des Volumens vereinfacht.

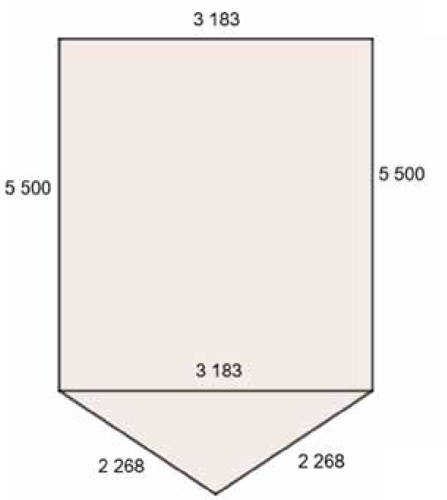



*Abb. 23.3: Plan eines Silo-Modells in „Volumen des Silos – 1“*

Unterhalb dieses Querschnitts werden Fragen zum Volumen und der Rohstoffmenge im Silo gestellt.

In „Volumen des Silos – 2“ sehen die SchülerInnen den Bauplan eines realen Rohstoffsilos inklusive aller Beschriftungen (siehe Abb. 23.4).

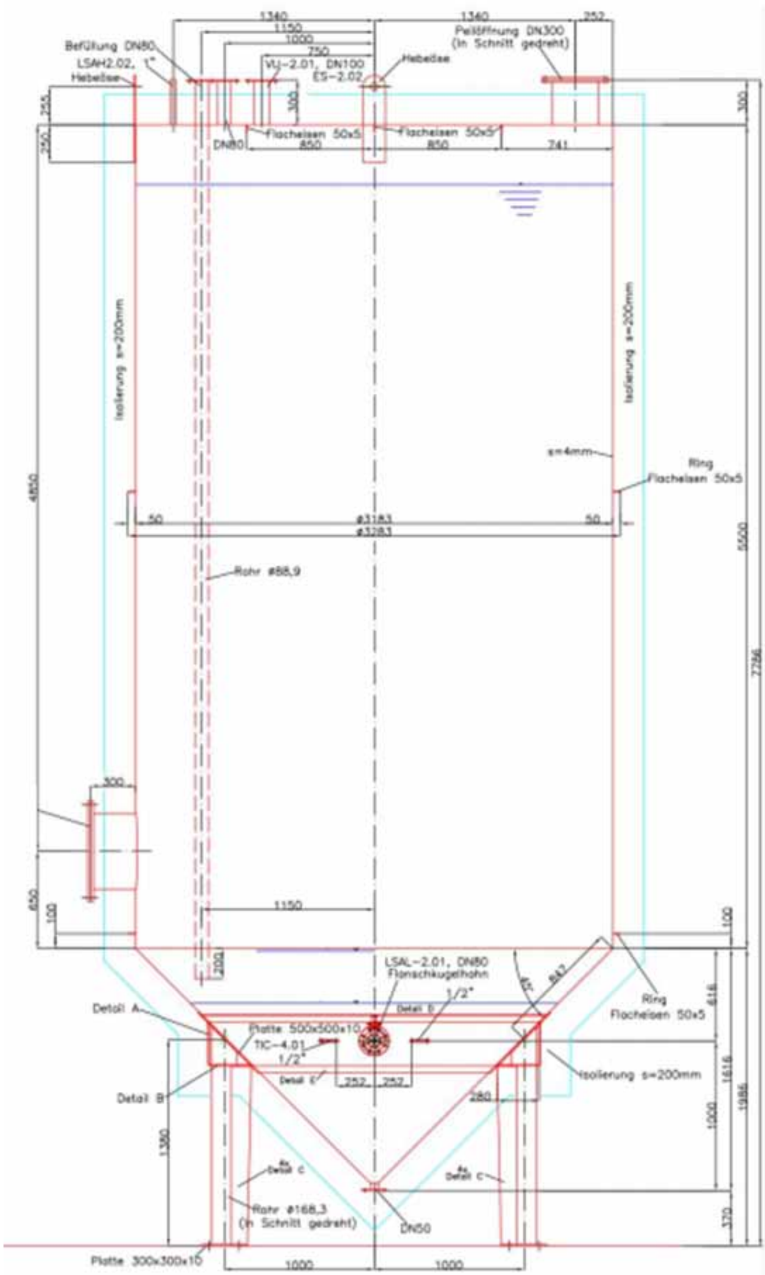



Abb. 23.4: Originalplan des Rohstoffsilos

Die Vielzahl an Abmessungen und Fachbegriffe lassen den Plan auf den ersten Blick unübersichtlich und verwirrend aussehen.

Diese Aufgabenstellung ist daher für SchülerInnen gedacht, die ihre Gedanken und Lösungsideen bereits ausreichend fokussieren können und selbstständig wichtige Informationen aus dem Kontext herausfiltern können.

### Aktivität 4

In der abschließenden Aktivität „Menge eines Rohstoffs“ werden die SchülerInnen aufgefordert, weitere Fragestellungen zur Rohstoffmenge in Rohstoffsilos zu bearbeiten.

Dabei wird exemplarisch der Rohstoff „Kalkgries“ herangezogen. Mit Hilfe der Ergebnisse aus den letzten Arbeitsschritten und der angegebenen Dichte des Rohstoffes sollen unterschiedliche Fragestellungen zur Rohstoffmasse berechnet werden. Die Ergebnisse können hierbei – sofern GeoGebra Gruppen verwendet werden – direkt im Applet eingegeben werden.

Auf jeden Fall empfiehlt sich jedoch auch für die spätere Vergleichbarkeit der Ergebnisse eine Aufzeichnung der erhaltenen Ergebnisse auf Papier.

### Hinweise für die Lehrperson

Detaillierte Information zum Konzept von flex-Phasen findet man unter:

www.expedition-flex.at

Die flex-Arbeitsphase sollte spätestens nach der ersten Unterrichtseinheit abgeschlossen sein. Sollte nicht so viel Zeit zur Verfügung stehen, so kann diese Phase auch dadurch abgekürzt werden, indem die Lehrkraft ein fertiges Modell eines Rohstoffsilos mitbringt und lediglich über die Möglichkeiten der Füllstandsmessung diskutiert wird. Hierbei empfiehlt es sich aber wieder, dem flex-Konzept entsprechend, zuerst die SchülerInnen in Kleingruppen nach Lösungsansätzen suchen zu lassen.

In „FLEX: Modell eines Silos“ werden die einzelnen Arbeitsschritte für die SchülerInnengruppen noch einmal Schritt für Schritt erklärt und mit einer beispielhaften Zeitangabe versehen.

Wollen die SchülerInnen ihre Ideen sammeln und ihre Antworten speichern, empfiehlt es sich, GeoGebra-Gruppen zu verwenden oder die SchülerInnen darauf hinzuweisen, dass sie parallel zum Applet ihre Ergebnisse und Ideen auch noch auf Papier notieren müssen.

Die Diskussion und die Sammlung von Ideen kann je nach verfügbarer Zeit im Anschluss geführt werden.

Der Plan aus der Aktivität „Volumen des Silos – 2“ sollte vorab in mindestens A4 Größe ausgedruckt werden, um die dünn eingezeichneten Abmessungen gut ablesen zu können.

# 24. Aussichtsplattform

## Einführung

In dieser Unterrichtssequenz führen die SchülerInnen in Einzel- oder Partnerarbeit Berechnungen in Hinblick auf Flächeninhalt und Umfang eines Kreisrings durch. Die Aufgaben im GeoGebra Buch beziehen sich auf eine Firma, die Glasarbeiten durchführt (WENNA GLAS).

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autor | Andreas Lindner, Sandra Reichenberger |
| Thema | Berechnungen am Kreisring |
| Schulstufe, Fach | 8. Schulstufe, Mathematik |
| Dauer | 1 Unterrichtseinheit |
| SchülerInnen-materialien | https://ggbm.at/ckX8S3CM |
| Unternehmen | WENNA Glas |
| Links | Unterrichtsplanung: https://ggbm.at/ytth3QRN<br>Lösungen: https://ggbm.at/GzzeS2Zb |

*Quelle: https://www.flickr.com/photos/wennaglas/*

### Vorwissen und Voraussetzungen

- Die SchülerInnen wissen, wie man den Umfang eines Kreises und Kreisrings berechnet.
- Die SchülerInnen wissen, wie man den Flächeninhalt eines Kreises und Kreisrings berechnet.
- Die SchülerInnen können den prozentuellen Anteil eines Grundwertes berechnen.
- Die SchülerInnen können den Flächeninhalt eines Zylindermantels berechnen.
- Die SchülerInnen wissen, wie man den Umfang eines Kreissektors berechnet.

### Lernergebnisse und Kompetenzen

- Die SchülerInnen können bereits bekannte Formeln für Flächeninhalt und Umfang eines Kreisrings in einer konkreten Alltagssituation anwenden.
- Die SchülerInnen können den Zusammenhang zwischen Flächeninhalt und Radius eines Kreises beschreiben.

### Unterrichtsablauf

In dieser Unterrichtseinheit soll für alle SchülerInnen ein Laptop oder Tablet zur Verfügung stehen. Falls es nicht möglich ist, dass alle Lernenden ein eigenes Gerät haben, sollte zumindest ein Gerät für je vier Kinder bereitgestellt werden. In diesem Fall empfiehlt es sich die Arbeitsblätter auch auszudrucken.

Zu Beginn wird der Ablauf der Stunde gemeinsam besprochen und die Aufgabenstellung - der Bau einer Aussichtsplattform - erklärt. Dabei wird auch auf die Firma WENNA GLAS eingegangen und über gebogenes Glas gesprochen (siehe „Einführung“).

Falls nötig können benötigte Formeln kurz noch einmal wiederholt werden.

### Aktivität 1

Die SchülerInnen bearbeiten nun in Einzelarbeit am Computer oder Tablet die erste Aufgabenstellung. Diese gliedert sich in eine Pflicht- und eine Erweiterungsaufgabe. In der Pflichtaufgabe „Gebogenes Glas“ sollen die SchülerInnen den Materialbedarf für die Glasbrüstung einer Aussichtsplattform berechnen. Zur Visualisierung wird ein GeoGebra Applet verwendet (siehe Abb.24.1).

Zusätzlich soll auch die prozentuelle Änderung des Glasbedarfs nach Veränderung der Höhe angegeben werden. Die Ergebnisse werden schriftlich festgehalten.

Im Applet können die SchülerInnen den inneren Radius, die Breite der Plattform und die Höhe der Brüstung verändern. Dabei können sie beobachten, wie sich die Aussichtsplattform den vorgenommenen Änderungen anpasst.

Die Erweiterungsaufgabe „Plattform mit Wendeltreppe“ stellt eine Vertiefung der vorherigen Aufgabe dar. Die SchülerInnen müssen wieder den Flächeinhalt der Glasbrüstung berechnen, aber zusätzlich berücksichtigen, dass nun auch eine

Wendeltreppe auf die Plattform führt. Das Glas für die Wendeltreppe wird in dieser Berechnung nicht berücksichtigt. Zur Veranschaulichung dient ein GeoGebra Applet (siehe Abb. 24.2).

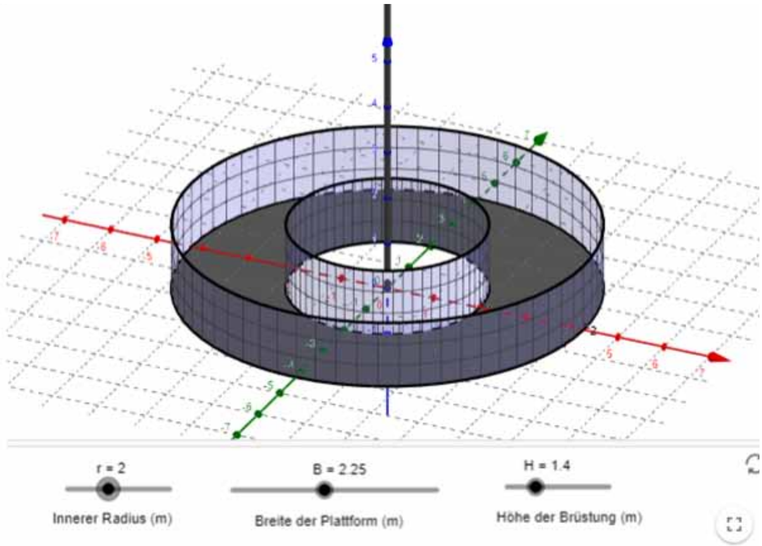



*Abb. 24.1: Visualisierung der Aussichtsplattform*

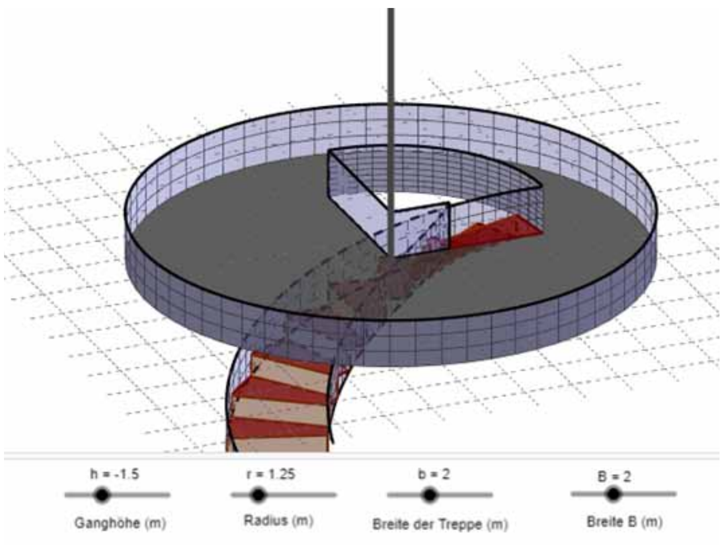



*Abb. 24.2: Plattform mit Wendeltreppe*

### Aktivität 2

In Partnerarbeit wird nun die Aufgabe „Größe der Plattform“ bearbeitet. Zuerst sollen die SchülerInnen den Flächeninhalt des Plattformbodens berechnen. Danach benutzen die SchülerInnen wieder ein GeoGebra Applet (siehe Abb. 24.3) und versuchen herauszufinden, ab welchen Dimensionen doppelt so viele Besucher auf der Plattform Platz haben.

Zur Lösung dieses Problems ist im Applet eine Tabelle integriert, in der die Lösungen eingetippt und direkt miteinander verglichen werden können. Die SchülerInnen erhalten dabei sofort Feedback über die Richtigkeit der Lösung.

Als Zusammenfassung wird abschließend zu dieser Aufgabe der Flächeninhalt eines Kreises betrachtet und Eigenschaften zu diesem wiederholt.

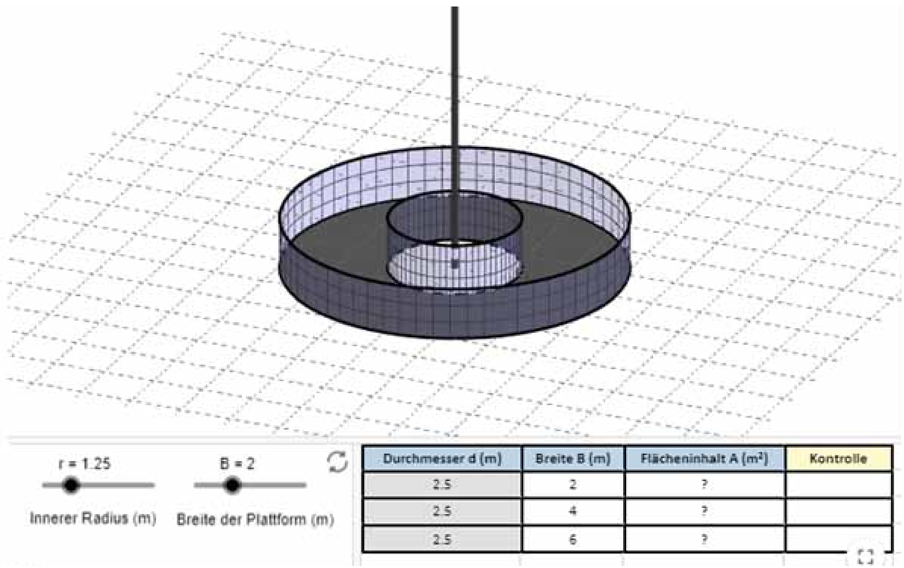



*Abb. 24.3: Größe der Plattform*

### Aktivität 3

In der Forschungsfrage sollen die SchülerInnen gemeinsam in Partnerarbeit herausfinden, bei welcher Breite der Flächeninhalt der Plattform tatsächlich verdoppelt wird. Die Lösung soll mit Hilfe eines Applets (ähnlich zu jenem aus Aktivität 2) herausgefunden werden.

Im nächsten Schritt soll das daraus erhaltene Ergebnis zunächst rechnerisch nachgewiesen werden und abschließend auch eine allgemeine Lösung für dieses Problem gefunden werden. Hierfür müssen Gleichungen aufgestellt und umgeformt werden.

### Hinweise für die Lehrperson

Damit SchülerInnen mit den GeoGebra Applets umgehen können sind nur wenige Grundkenntnisse notwendig (Schieberegler verwenden und Zahlenwerte in eine Tabelle eingeben). Diese Materialien eignen sich also auch für SchülerInnen, die noch weniger Erfahrung mit interaktiven Materialien haben.

Lösungen können über den Link (siehe Tabelle: Kurzinformationen) ausgedruckt und zur selbstständigen Kontrolle bereitgehalten werden.

Als Hilfestellung bei der Forschungsfrage kann die Lehrperson den SchülerInnen auch einen Lösungsansatz geben:

Da bei dieser Aufgabe eine allgemeine Lösung gesucht wird, bezeichnen wir den ursprünglichen (einfachen) Flächeninhalt des Kreisringes mit $A_1$. Den doppelt so großen Flächeninhalt kennzeichnen wir mit $A_2$.

Für $A_1$ und $A_2$ erhalten wir folgende Gleichungen:

$$A_1 = (R^2 - r^2) \cdot \pi$$

$$A_2 = 2 \cdot A_1 = ((k \cdot R)^2 - r^2) \cdot \pi$$

*Bemerkung: k stellt den Faktor dar, mit dem der äußere Radius multipliziert werden muss, um einen doppelt so großen Flächeninhalt zu erhalten.*

*In der zweiten Gleichung setzen wir für $A_1$ die erste Gleichung ein und formen anschließend die Gleichung auf k um.*

### Ähnliche Unterrichtsplanungen

In den Materialien dieser Unterrichtsplanung befassen sich die SchülerInnen mit der Berechnung der Glasfläche einer Wendeltreppe.

In höheren Schulstufen könnte mit Hilfe der Informationen der folgenden Materialien auch die Glasfläche der zur Aussichtsplattform führenden Wendeltreppe berechnet werden.

Treppengeländer aus Glas: https://ggbm.at/kZnFZSqz

# 25. Panoramaterrasse

**Einführung**

In dieser Unterrichtssequenz führen die SchülerInnen in Einzel- oder Partnerarbeit Berechnungen in Hinblick auf die Bogenlänge durch. Die Aufgaben im GeoGebra Buch beziehen sich auf die Firma WENNA GLAS, die Glasarbeiten durchführt und eine Panoramaterrasse mit einem Geländer aus gebogenen Glasflächen plant.

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autor | Andreas Lindner, Johanna Zöchbauer |
| Thema | Bogenlänge |
| Schulstufe, Fach | 8. Schulstufe, Mathematik |
| Dauer | ca. 1 Unterrichtseinheit |
| SchülerInnen-material | https://ggbm.at/x2j4fHXG |
| Unternehmen | WENNA GLAS |
| Links | Unterrichtsplanung: https://ggbm.at/xsCs6SHH<br>Lösungen: https://ggbm.at/SG6bRTvY |

*Quelle: https://www.flickr.com/photos/wennaglas/*

### Vorwissen und Voraussetzungen

- Die SchülerInnen können den Umfang eines Kreises berechnen.
- Die SchülerInnen können die Bogenlänge eines Kreissektors berechnen.
- Die SchülerInnen können den Flächeninhalt eines Rechtecks berechnen.

### Lernergebnisse und Kompetenzen

- Die SchülerInnen können bereits bekannte Formeln für die Bogenlänge in einer konkreten Alltagssituation anwenden.

### Unterrichtsablauf

In dieser Unterrichtseinheit soll für alle SchülerInnen ein Laptop oder Tablet zur Verfügung stehen. Falls es nicht möglich ist, dass alle Lernenden ein eigenes Gerät haben, können sich auch jeweils bis zu maximal 3 SchülerInnen ein Gerät teilen. Sollte dies der Fall sein, empfiehlt es sich die Arbeitsblätter auch auszudrucken.

Zu Beginn wird der Ablauf der Stunde gemeinsam besprochen und die Aufgabenstellung - der Bau einer Panorama-Terrasse - erklärt. Dabei kann auch auf die Firma WENNA GLAS eingegangen und über gebogenes Glas gesprochen werden (siehe Einführung).

### Aktivität 1

Die SchülerInnen bearbeiten nun in Einzelarbeit (falls genügend Geräte zur Verfügung stehen) am Computer oder Tablet nacheinander Aufgabenstellung 1 und Aufgabenstellung 2. Diese sind im GeoGebra Buch zu finden.

In der ersten Aufgabenstellung sollen die SchülerInnen die Maße und anschließend den Flächeninhalt der Glasplatten, die das gebogene Geländer bilden, berechnen.

Die Höhe des Geländers ist gegeben. Die Bogenlängen der verschiedenen Bögen der geschwungenen Terrasse können mit der Formel zur Berechnung der Bogenlänge eruiert werden. Die dafür benötigten Werte sollen dem dargestellten Applet (siehe Abb. 25.1) entnommen werden.

In diesem Applet wird die Panoramaterrasse aus verschiedenen Perspektiven dargestellt. Die Höhe des Geländers kann mit einem Schieberegler variiert werden.

WENNA GLAS kann Glasplatten nur zylindrisch biegen, das heißt für das Geländer der Panoramaterrasse werden mehrere verschieden große Glasplatten benötigt. Diese müssen bereits vor dem Biegen in die richtigen Größen zugeschnitten werden, da dies später nicht mehr möglich ist.

Die SchülerInnen sollen hier erkennen, dass die ursprüngliche Form des Geländers ein Rechteck ist. Somit kann die gesamte benötigte Glasfläche für das Geländer der Terrasse mit der Flächenformel für Rechtecke berechnet werden.

Die Rechnungen und Ergebnisse werden schriftlich festgehalten.

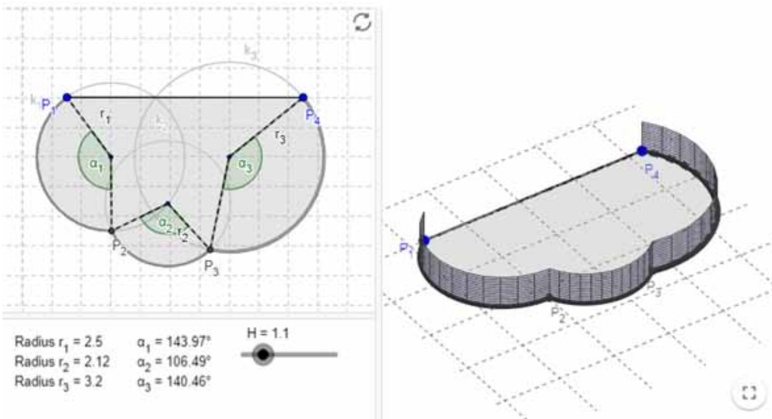



*Abb. 25.1: Dynamische darstellung der Panoramaterrasse*

### Aktivität 2

Im zweiten Arbeitsblatt sollen die SchülerInnen zunächst eine Recherchearbeit durchführen. Dazu ist die Webseite der Firma WENNA eingebettet. Die SchülerInnen sollen die maximal und minimal möglichen Abmessungen für gebogene Glasplatten herausfinden.

Für die gegebenen Radien können Glasplatten von 500 mm x 500 mm bis zu 2440 mm x 3600 mm gebogen werden. Aus den Ergebnissen der Aufgabenstellung 1 wissen die SchülerInnen, dass die Teilstücke der Panoramaterrasse länger als die maximal mögliche Länge sind. Sie müssen daher die Glasflächen nochmal unterteilen.

Danach berechnen die SchülerInnen zur Kontrolle den Flächeninhalt der Glasplatten erneut und vergleichen diesen Wert mit dem Ergebnis aus Aufgabenstellung 1.

### Hinweise für die Lehrperson

Die Panoramaterrasse besteht vor dem Biegen der Glasplatten aus drei Rechtecken. Um das Problem einfacher zu erfassen, könnte es hilfreich sein, die Glasplatten (im Heft) zu skizzieren. Auch die Lösung kann in einer solchen Skizze besser visualisiert werden (siehe Abb. 25.2).

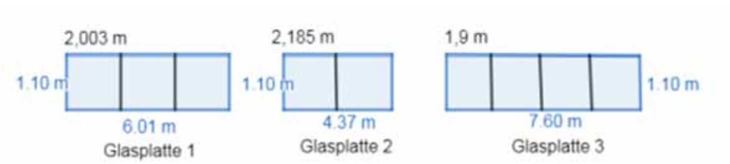



*Abb. 25.2: Mögliche Unterteilung der Glasplatten*

Bei der Unterteilung der Glasplatten in Aufgabenstellung 2 gibt es verschiedene Lösungen. Auch der optische Aspekt sollte hier nicht außer Acht gelassen werden.

# 26. Treppengeländer aus Glas

### Einführung

In dieser Unterrichtssequenz versuchen die SchülerInnen in Partnerarbeit anwendungsbezogene Aufgaben zum Thema Integral- und Differentialrechnung zu lösen. Dabei sollen sie verschiedene Berechnungen an einer dreidimensionalen Kurve, die ein Geländer einer Wendeltreppe darstellt, durchführen. In einer zusätzlichen Forschungsaufgabe sollen sie versuchen, den dargestellten Sachverhalt mit diversen Utensilien nachzustellen und Fragen zu diesem beantworten.

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autor | Andreas Lindner, Tanja Wassermair |
| Thema | Integral- und Differentialrechnung, Parameterkurve |
| Schulstufe, Fach | 12. Schulstufe, Mathematik |
| Dauer | 1 -2 Unterrichtseinheit |
| SchülerInnen-materialien | https://ggbm.at/zGBbEHrQ<br>Toilettenpapierrolle, Klebestreifen, Schere, Papier |
| Unternehmen | Wenna Glas |
| Links | Unterrichtsplanung: https://ggbm.at/kZnFZSqz<br>Lösungen: https://ggbm.at/BUA9DqzX |

*Quelle: Christoph Wenna*

**Vorwissen und Voraussetzungen**

- Die SchülerInnen wissen, wie man eine Funktion differenziert.
- Die SchülerInnen wissen, wie man eine Funktion (mit Hilfe von Technologie) integriert.
- Die SchülerInnen wissen, wie man ein bestimmtes Integral löst.
- Die SchülerInnen wissen, wie eine Parameterkurve definiert ist.

**Lernergebnisse und Kompetenzen**

- Die SchülerInnen können anwendungsbezogene Aufgaben zu Integral- und Differentialrechnung lösen.
- Die SchülerInnen können Längen von Parameterkurven berechnen.
- Die SchülerInnen können ihre Problemlösefähigkeit vertiefen.

**Unterrichtsablauf**

Zuerst wird der Ablauf der Unterrichtssequenz gemeinsam besprochen und die SchülerInnen erhalten den Link zum GeoGebra Buch (siehe Tabelle mit Kurzinformation). Das Thema der Aufgabenstellungen - der Bau einer Wendeltreppe mit Glasgeländern - wird erklärt. Dabei kann auch auf die Firma WENNA GLAS eingegangen und über gebogenes Glas gesprochen werden (siehe „Einführung").

## Aktivität 1

Die SchülerInnen arbeiten in Partnerarbeit am ersten Arbeitsblatt „Wendeltreppe". Dabei sollen sie den Flächeninhalt eines Glasgeländers berechen. Hierfür muss eine gegebenen Parameterkurve, die das Glasgeländer begrenzt und die Form einer Schraubenlinie hat, mit Hilfe von GeoGebra berechnet werden. Zur mathematischen Beschreibung einer dreidimensionalen Kurve sind allgemeine Gleichungen für x(t), y(t) und z(t) gegeben.

Zur Lösung benötigen die SchülerInnen die Integral- und Differentialrechnung. Als Hilfestellung ist das Integral zur Berechnung der Länge einer Parameterkurve gegeben:

Länge einer Kurve in Parameterform = $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\, dt$

Zur Visualisierung des Sachverhalts wird ein GeoGebra Applet verwendet (siehe Abb. 26.1).

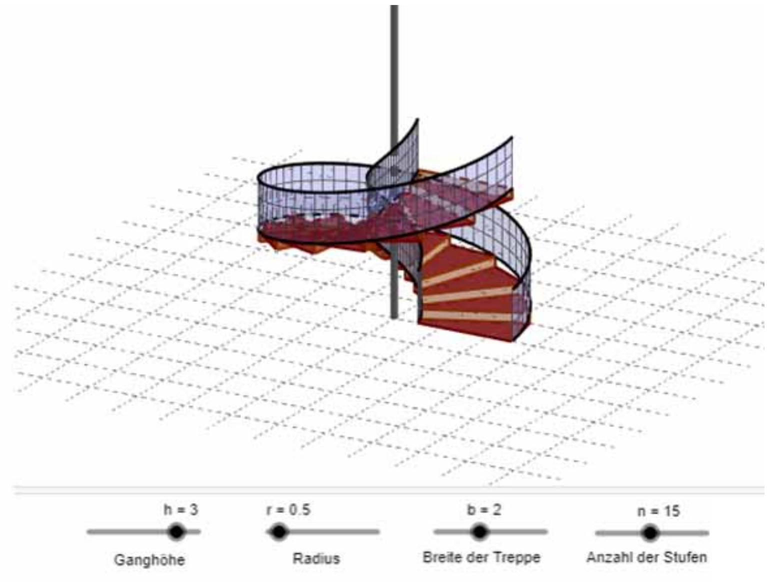



*Abb. 26.1: Applet zu Wendeltreppe*

Im Applet können sie die Parameter (Ganghöhe, Radius der Treppe, Breite der Treppe und Stufenanzahl) ändern und beobachten, wie sich die 3D-Grafik entsprechend ihrer Eingaben verändert.

In einer Zusatzaufgabe soll berechnet werden, wie viele Stufen von bestimmter Höhe bei einer vorgegebenen Ganghöhe der Treppe benötigt werden.

### Aktivität 2

Die SchülerInnen basteln in dieser Aktivität ein Modell des Außengeländers. Dazu benötigen sie: leere Toilettenpapierrolle, Klebestreifen, Papier, Stift, Geodreieck und Schere.

Sie sollen bei dieser Aufgabe erforschen, ob die Ganghöhe einen Einfluss auf den Flächeninhalt des Treppengeländers hat und eine mögliche Begründung dafür finden. Eine Anleitung ist im GeoGebra Buch enthalten (siehe Abb. 26.2). Das pdf zum Ausdrucken ist in der Online Version dieser Unterrichtsplanung verfügbar.

## Hands on! Bastle und entdecke!

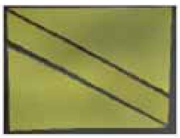
Timo und Claudia haben zu Haus ein Modell gebaut, mit dem sie das Beispiel einer Berechnung des Flächeninhaltes eines gebogenen Geländers verdeutlichen wollen. Die beiden machen folgende Entdeckung: Der Flächeninhalt entspricht dem Mantel eines Zylinders. Deshalb stellen sie in der nächsten Mathematikstunde folgende Behauptung auf: Man muss bei diesem Beispiel nicht mit dem Integral rechnen, sondern kann ganz einfach den Mantel auf folgende Weise berechnen:

$A = U_{Kreis} \cdot h$ r... äußerer Radius des Geländers
$A = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$ h... Normalhöhe des Geländers

**Forscherfrage:**
Haben die beiden Recht? Baue mit Hilfe der folgenden Anleitung das Modell nach und begründe, warum die beiden Recht oder nicht Recht haben.

**Benötigte Materialien:**

- Leere Toilettenpapierrolle
- Klebeband
- Stück Papier in Form des Mantels der Klopapierrolle
- Schere
- Geodreieck und Stift



**Schritt 1:** Zuerst nehmt ihr das Stück Papier, das genau um die Toilettenpapierrolle passt. Macht 2 cm unterhalb der linken oberen Ecke und 2 cm über der rechten unteren Ecke eine kleinen Markierung und verbindet die linke obere Ecke mit der rechten Markierung und die rechte untere Ecke mit der linken Markierung. Dann schneidet entlang dieser beiden Linien. Wir brauchen den mittleren Streichen, der entstanden ist.

**Schritt 2:** Verwende nun das Klebeband und klebe den Streifen um die Toilettenpapierrolle. Dieser Streifen soll nun das äußere Glas-Geländer darstellen. Auf der Klopapierrolle kannst du mit einem Stift eine senkrechte Linie ziehen, an der du erkennst, dass es sich genau um eine Umdrehung handelt. Das sollte dann ungefähr so aussehen:

**Schritt 3:** Nimm nun das gelbe "Geländer-Stück" wieder von der Klopapierrolle und klebe die beiden Enden dieses Stückes so zusammen, dass ein Ring entsteht.

**Was hast du nun herausgefunden...**

Du hast nun das Model von Timo und Claudia nachgebaut. Haben die beiden mit ihrer Behauptung, dass der Flächeninhalt des äußeren Geländers mit folgender Formel berechnet werden kann, Recht?

$A = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$ r... äußerer Radius des Geländers h... Normalhöhe des Geländers

Begründe deine Antwort und beziehe dich dabei auf das gebastelte Modell!

*Abb. 26.2: Anleitung zur Hands-on Aktivität*

### Aktivität 3

Die SchülerInnen bearbeiten eine der beiden Aufgaben aus Kapitel 2 des GeoGebra Buches. Dabei handelt es sich um komplexere Aufgabenstellungen, bei denen weitere Faktoren in der Parameterkurve berücksichtigt werden. In beiden Aufgaben handelt es sich jeweils um eine Spirallinie.

In Aufgabe 1 wird der Radius der Kurve mit zunehmender Ganghöhe größer, in Aufgabe 2 ändert sich der Radius der äußeren Kurve schneller als jener der inneren Kurve.

Die SchülerInnen sollen die Länge des inneren bzw. äußeren Handlaufs berechnen und dann vergleichen, wie sich unter diesen Faktoren die Fläche des Glasgeländers im Gegensatz zu jenem aus dem Beispiel in Kapitel 1 ändert. Zur Visualisierung werden wieder GeoGebra Applets verwendet, bei denen ähnlich zum vorigen Applet die verschiedenen Parameter variiert werden können.

### Hinweise für die Lehrperson

Zur Durchführung dieser Unterrichtssequenz wird ein CAS-Programm zum Lösen der Integrale empfohlen. Sollten nicht genug Computer, Laptops, Tablets, Handys oder CAS fähige Taschenrechner zur Verfügung stehen, können die Aufgaben auch ohne Technologie gelöst werden. Dies erhöht aber den Grad der Komplexität, wodurch eine andere Zeitangabe als die angegebene gewählt werden muss.

Hinweis: Wenn das Buch über eine GeoGebra Gruppe mit den SchülerInnen geteilt wird, dann werden die Änderungen und Eingaben der SchülerInnen gespeichert.

# 27. Verrechnung von Glasarbeiten

**Einführung**

Die SchülerInnen sollen in dieser Unterrichtssequenz darüber nachdenken, welche Leistungen eine Glasbaufirma erbracht haben könnte. Sie entwickeln in Kleingruppen Lösungswege, wie eine Gesamtrechnung kalkuliert werden kann.

Zur Bearbeitung der Aufgaben werden GeoGebra Applets verwendet.

| **Kurzinformation** | |
|---|---|
| Autor | Hubert Pöchtrager |
| Thema | Flächen- und Preisberechnung, Maßstab, Prozentrechnung |
| Schulstufe, Fach | 7.Schulstufe, Mathematik |
| Dauer | 1 Unterrichtseinheit |
| SchülerInnen-materialien | https://ggbm.at/WYg9aQjf |
| Unternehmen | Wenna Glas |
| Links | Unterrichtsplanung: https://ggbm.at/qveyz6cE<br>Lösungen: https://ggbm.at/eN3xc24n |

*Quelle: Hubert Pöchtrager*

**Vorwissen und Voraussetzungen**

- Die SchülerInnen können den Flächeninhalt von Vierecken (Rechteck, Trapez, Parallelogramm) berechnen.
- Die SchülerInnen können den Maßstab interpretieren und anwenden.
- Die SchülerInnen verfügen über Grundkenntnisse im Arbeiten mit den Geometriewerkzeugen von GeoGebra und können mit folgenden Werkzeugen umgehen: Abstand oder Länge, Vieleck und Fläche.
- Die SchülerInnen können funktionale Abhängigkeiten (direkte Proportionalität) erkennen und gesuchte Größen entsprechend berechnen.
- Die SchülerInnen können einfache Berechnungen mit einer Tabellenkalkulation durchführen.
- Die SchülerInnen beherrschen die Prozentrechnung.

**Lernergebnisse und Kompetenzen**

- Die SchülerInnen können aus einem Bild (mit Maßstab) Längen in Wirklichkeit ermitteln.
- Die SchülerInnen können die Flächeninhalte verschiedener Glasflächen berechnen.
- Die SchülerInnen können von GeoGebra berechnete Flächen unter Verwendung des Maßstabs in die wahre Größe umrechnen.
- Die SchülerInnen können aus den Preis- und Größenangaben eine Gesamtrechnung erstellen.
- Die SchülerInnen erfahren, dass manchmal auch Näherungen als Ergebnisse angegeben werden können.

**Unterrichtsablauf**

In dieser Unterrichtssequenz wird abwechselnd in Kleingruppen bzw. in Einzel- oder Partnerarbeit gearbeitet. Notwendig ist ein digitales Endgerät (PC, Notebook oder Tablet) pro Gruppe bzw. SchülerIn.

**Aktivität 1**

Nach einer kurzen Übersicht über den Inhalt der folgenden Unterrichtssequenz wird die erste Aufgabenstellung bearbeitet. Aus der offenen Aufgabenstellung „Eine Glasbaufirma verrechnet ihre Leistungen“ (siehe Abb. 1) wird in Partner- oder Kleingruppenarbeit ein erster Lösungsentwurf entwickelt, der als Grundlage für die Weiterarbeit in Einzel- oder Partnerarbeit dient. Folgende Fragen sollen dabei beantwortet werden:

- Welche Arbeiten könnte die Glasbaufirma geleistet haben?
- Was bedeutet der Maßstab?
- Was müssen wir berechnen?

Hinweis: Die Frage „Wie geht das?“ muss noch nicht beantwortet werden.

Der Lösungsentwurf einer Gruppe wird einer anderen Gruppe vorgestellt.

Hinweis: Das Aufgabenblatt (siehe Link: SchülerInnenmaterialien) wird idealerweise von der Lehrperson vor Beginn der Unterrichtseinheit ausgedruckt. Die SchülerInnen notieren ihre Überlegungen auf diesem Arbeitsblatt.


*Abb. 27.1: Applet zu Arbeiten einer Glasbaufirma*

## Aktivität 2

In Einzel- oder Partnerarbeit berechnen die SchülerInnen mit Hilfe des Applets „Arbeiten der Glasbaufirma“ die Flächeninhalte der Glasflächen, die die Glasbaufirma geliefert und montiert haben könnte. Die für die Berechnung relevanten Längen können aus dem Bild unter Anwendung des Maßstabs und Verwendung des Werkzeugs  Abstand oder Länge entnommen werden.

Die Messung der Längen im Bild erfolgt mit den Werkzeugen von GeoGebra. Die Ermittlung des Flächeninhalts einer Schaufensterfläche (auf dem Bild) kann auch mit Hilfe der Werkzeuge  Vieleck und  Fläche erfolgen.

Mit Hilfe dieser Werkzeuge können auch Flächen, deren Flächeninhaltsformel noch nicht gelernt wurde, einfach berechnet werden. Der Flächeninhalt des Kreissegments, das das Schaufenster oben abschließt, kann somit ganz einfach mit einem Vieleck angenähert werden.

Nachdem der Flächeninhalt im Applet ermittelt worden ist, stellt sich folgende Frage: Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesem Flächeninhalt, dem Maßstab und dem tatsächlichen Flächeninhalt der Schaufensterscheibe?

Hinweis: Nicht alle SchülerInnen müssen alle Glasflächen berechnen. Unter Berücksichtigung der Heterogenität der Lernenden kann eine unterschiedliche Bearbeitungstiefe ermöglicht werden.

### Aktivität 3

Die SchülerInnen berechnen in der GeoGebra Aktivität „Erstelle eine Rechnung“ die Kosten für das benötigte Glas und die Arbeitskosten, wobei die benötigte Arbeitszeit schätzungsweise vorgegeben ist. Unter Berücksichtigung der Mehrwertsteuer (20%) wird aus den Nettobeträgen ein Rechnungsbetrag ermittelt (siehe Abb. 27.2).

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Verbaute Glasflächen | Preis €/m² | Glasfläche in m² | Gesamtpreis |
| 2 | Schaufensterglas | 89 | | |
| 3 | Glas für Geländer | 150 | | |
| 4 | Zwischensumme Material | | | |
| 5 | Arbeitszeit | Preis €/h | Arbeitszeit in h | Gesamtpreis |
| 6 | Glasermeister | 54 | | |
| 7 | Lehrling | 29 | | |
| 8 | Zwischensumme Arbeit | | | |
| 9 | Nettobetrag | | | |
| 10 | 20% Mehrwertsteuer | | | |
| 11 | Rechnungsbetrag | | | |

*Abb. 27.2: Tabelle zum Erstellen einer Rechnung*

Als Zusatzaufgabe kann in dieser Aktivität auch einfach überprüft werden, wie sich kleine Veränderungen der berechneten Flächeninhalte (die aus dem Bild ja nicht ganz exakt ermittelt werden konnten) auf den Gesamtpreis auswirken.

### Hinweise für die Lehrperson

Manche Fragestellungen stellen eine besondere Herausforderung für manche SchülerInnen dar:

*„Wie kann der Flächeninhalt von nicht eckigen Flächen näherungsweise berechnet werden?“*

Hier sollen die SchülerInnen mit den vorhandenen Geogebra Werkzeugen selbst eine Lösung finden. Der Hinweis, dass auch näherungsweise Berechnungen möglich sind, kann dabei hilfreich sein.

In diesem Zusammenhang kann auch die Genauigkeit von Messungen erörtert werden. Auch in der höheren Mathematik wird häufig mit Näherungswerten gerechnet. Für SchülerInnen ist dies oft fremd. In der Welt der Mathematik gibt es für sie immer nur eine Lösung. Diese Materialien können diesen Irrglauben etwas aufbrechen und den SchülerInnen einen neuen Blick auf die Welt der Mathematik ermöglichen.

*„Wie kann aus einem Flächeninhalt auf dem Bild ein Flächeninhalt in der Realität berechnet werden?“*

Um den Flächeninhalt vom Plan in die Wirklichkeit umzuwandeln, muss mit dem Quadrat des Maßstabs multipliziert werden. Es empfiehlt sich dies bereits im Vorfeld mit den SchülerInnen zu besprechen.

*„Wieso habe ich nicht das gleiche Ergebnis wie mein Nachbar, obwohl wir gleich gerechnet haben?“*

Beim Abmessen der Längen oder Flächen in GeoGebra kommt es zu kleinen Ungenauigkeiten, da nicht jeder die exakt gleichen Punkte wählt. (siehe Abb. 27.3 und Abb. 27.4)

Welches Ergebnis ist nun richtig? Kann es sein, dass verschiedenen Ergebnisse richtig sind? Diese Fragen können im Plenum diskutiert werden.


*Abb. 27.3: Ergebnis der Flächenberechnung eines Schaufensters 1*


*Abb. 27.4: Ergebnis der Flächenberechnung eines Schaufensters 2*

| | |
|---|---|
| Název projektu/Projektname: | MatemaTech |
| Autoři/Autoren: | Kolektiv autorů / Kollektiv der Autoren |
| Vydavatel/Herausgeber: | Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích |
| Editor /Editor: | Roman Hašek, Carolin Kern, Libuše Samková, Andreas Trappmair, Johanna Zöchbauer |
| Grafická úprava/Grafikdesign: | Daniel Kyncl, DfK Group |
| Vydání/Ausgabe: | 1. |
| Počet stran/Seitenzahl: | 264 |
| Rok vydání/Jahrgang: | 2019 |
| Náklad/Exemplare: | 500 ks/ 500 St. |
| Tisk/Drucker: | Typodesign s.r.o. |

ISBN 978-80-7394-744-6

**MatemaTech**
Matematickou cestou
k technice

**MatemaTech**
Durch den mathematischen
Weg zur Technik

ISBN 978-80-7394-744-6

České Budějovice
2019