Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Sborník příspěvků 12. konference Užití počítačů ve výuce matematiky

13.–15. listopadu 2025
České Budějovice

Společnost učitelů matematiky
JČMF

Katedra matematiky Pedagogické fakulty
Jihočeská univerzita v Č. Budějovicích

Katedra matematiky, Pedagogická fakulta,
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

ISBN 978-80-7694-161-8

Předmluva

Sborník obsahuje příspěvky, které zazněly na dvanácté konferenci *Užití počítačů ve výuce matematiky*, pořádané ve dnech 13.–15. listopadu 2025 Pedagogickou fakultou Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích ve spolupráci se Společností učitelů matematiky JČMF a Jednotou českých matematiků a fyziků, pobočným spolkem České Budějovice.

Plenární přednášky přednesli Volker Ulm (Universität Bayreuth, Německo): Diagnosing and supporting pupils with severe difficulties in learning arithmetic, Tomáš Fabián (Gymnázium, Dvůr Králové nad Labem): Dynamická geometrie aneb GeoGebra v akci, Petra Kuncová (Český statistický úřad): Popularizace statistiky s Českým statistickým úřadem a Zuzana Pátíková (Univerzita Tomáše Bati Zlín): Automatizované hodnocení matematických úloh s moodle pluginem STACK. Anotace přednášek jsou spolu s prezentacemi dostupné na webové stránce konference www.pf.jcu.cz/upvm.

Přednesené příspěvky se kromě tradičních témat využití systémů počítačové algebry a dynamické geometrie ve výuce a softwarové podpory e-learningu věnovaly také aktuálním otázkám role výuky matematiky při rozvoji digitálních kompetencí žáků a s tím související technologické a didaktické podpoře matematického vzdělávání. Celkem na konferenci kromě 4 plenárních přednášek zaznělo 16 referátů, bylo uspořádáno 10 workshopů a bylo představeno 5 posterů. Články vycházející z příspěvků jsou ve sborníku uvedeny v abecedním pořadí podle jmen autorů. Sborník byl recenzován členy programového výboru konference.

Poděkování patří členům organizačního výboru a studentům Pedagogické fakulty za jejich obětavou práci jak při přípravě, tak i během konference.

Programový výbor konference pracoval ve složení

Mgr. Roman Hašek, Ph.D.
doc. RNDr. Helena Koldová, Ph.D.
doc. Mgr. Zuzana Pátíková, Ph.D.
prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.
doc. RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D.
doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.
doc. RNDr. Libuše Samková, Ph.D.
prof. Dr. Volker Ulm
doc. PaedDr. Jiří Vaníček, Ph.D.

V Českých Budějovicích 19. prosince 2025

Za programový výbor
doc. RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D.

ZÁŠTITA

11. konference „Užití počítačů ve výuce matematiky“ se konala pod záštitou

Pedagogické fakulty

Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích

Obsah

MATTECOACH: KDYŽ DOUČOVÁNÍ POMÁHÁ ŽÁKŮM I BUDOUCÍM UČITELŮM

Eliška Beránková

Katedra algebry a geometrie, Přírodovědecká fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci

Abstrakt: Mattecoach je online aplikace poskytující bezplatnou podporu v matematice žákům základních a středních škol prostřednictvím textového chatu a sdílené tabule. Doučování zajišťují studenti učitelství matematiky, kteří si tímto způsobem rozvíjejí své didaktické i odborné kompetence. Projekt vznikl ve Švédsku, funguje také ve Skotsku a od roku 2024 i v České republice. Příspěvek představuje princip fungování aplikace a shrnuje výsledky z prvního roku provozu, včetně přínosů pro žáky i budoucí učitele.

Klíčová slova: matematické vzdělávání, online podpora učení, doučování matematiky, peer-to-peer přístup, příprava budoucích učitelů, digitální vzdělávání

Mattecoach: When Mathematics Support Benefits Both Pupils and Future Teachers

Abstract: Mattecoach is an online platform providing free mathematics tutoring for primary and secondary school students through text-based chat and a shared whiteboard. Tutoring is delivered by pre-service mathematics teachers, who simultaneously develop their didactic and professional skills. The project originated in Sweden, operates in Scotland, and has been implemented in the Czech Republic since 2024. The contribution introduces the functioning of the application and presents results from its first year of operation, highlighting its benefits for both pupils and future teachers.

Key words: mathematics education, online learning support, mathematics tutoring, peer-to-peer learning, pre-service teacher education, digital education

Úvod

Matematika představuje důležitou součást vzdělávání a rozvoj matematického myšlení je klíčový pro další studijní i profesní dráhu žáků. Současné vzdělávací prostředí zároveň nabízí nové možnosti, jak žáky v jejich učení podporovat, rozvíjet jejich porozumění a posilovat jejich samostatnost. Digitální nástroje a online formy výuky otevírají prostor pro flexibilní a individualizovanou podporu, která může doplnit tradiční výuku ve škole.

Projekt Mattecoach na tyto možnosti navazuje a přináší model online podpory v matematice, jenž propojuje potřeby žáků s přípravou budoucích učitelů matematiky. Nabízí bezpečné a dostupné prostředí, ve kterém mohou žáci pracovat vlastním tempem a současně získat cílenou pomoc. Zároveň vytváří autentický prostor pro rozvoj didaktických a komunikačních dovedností studentů učitelství, čímž přispívá k inovaci vzdělávání na obou úrovních.

1 Mattecoach jako nástroj podpory výuky matematiky

Aplikace Mattecoach je online platforma určená k podpoře učení matematiky žáků základních a středních škol. Vznikla v roce 2009 ve Švédsku ve spolupráci tří univerzit – Linköping University, KTH Royal Institute of Technology ve Stockholmu a Chalmers University of Technology v Göteborgu – s cílem nabídnout dostupné a kvalitní matematické doučování v online prostředí [2]. Postupně se projekt rozšířil i do dalších zemí; v roce 2023 byla spuštěna anglická verze aplikace ve Skotsku na University of Edinburgh [4]. Díky této verzi se Mattecoach stal přístupným širší mezinárodní komunitě. V roce 2024 byla navázána spolupráce mezi švédskými univerzitami a Univerzitou Palackého v Olomouci, která umožnila spuštění české verze aplikace dostupné na webu mattecoach.upol.cz [3].

Stejně jako v zahraničí je i česká verze Mattecoache poskytována zdarma. Tento princip vychází ze základní filozofie projektu – zajistit rovný přístup k podpoře ve vzdělávání bez ohledu na socioekonomické zázemí žáků. Aplikace funguje od pondělí do čtvrtka v čase 17:00–20:00, což odpovídá modelu ověřenému ve Švédsku. Mattecoach je určen žákům základních a středních škol s různými vzdělávacími potřebami – od těch, kteří se chtějí připravit na test nebo přijímací zkoušky, přes žáky s dlouhodobějšími obtížemi až po žáky matematicky nadané, kteří mají zájem rozšiřovat své znalosti nad rámec školní výuky.

Komunikace probíhá prostřednictvím textového chatu a sdílené tabule, což umožňuje anonymní a individualizovanou podporu bez nutnosti zapnutí kamery. Tento způsob práce poskytuje žákům větší pocit bezpečí a snižuje obavy z chyb nebo hodnocení. Zároveň nabízí flexibilitu – aplikace je dostupná na všech zařízeních s webovým prohlížečem a umožňuje koučům pracovat s více žáky současně, přičemž každý z nich postupuje vlastním tempem. Žáci se mohou k řešeným úlohám během konverzace opakovaně vracet, což podporuje lepší orientaci v probíraném učivu.

Základním principem práce v aplikaci je peer-to-peer přístup. Studenti učitelství matematiky zde vystupují v roli koučů, kteří žáky provázejí procesem řešení úloh. Nejde o poskytování hotových řešení, ale o cílené otázky a podporu vedoucí k aktivnímu přemýšlení žáka. Koučové se zaměřují na zjištění toho, čemu žák rozumí, kde vzniká problém, a pomáhají mu nalézt správný postup vlastní cestou. Tento přístup přispívá k hlubšímu porozumění matematickým konceptům a rozvoji samostatnosti při řešení problémů.

Doučování v české verzi Mattecoache zajišťují studenti učitelství matematiky Přírodovědecké a Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci. Ti kombinují odborné znalosti s didaktickými dovednostmi získanými během studia a zároveň procházejí speciálním školením zaměřeným na online výuku a koučování. Projekt tak přináší přínos nejen žákům, ale i samotným budoucím učitelům, kteří zde získávají cennou praktickou zkušenost.

Celkově projekt Mattecoach sleduje tři hlavní cíle: podporu žáků prostřednictvím dostupné a kvalitní pomoci v matematice, rozvoj profesních a didaktických kompetencí budoucích učitelů a výzkum online výuky matematiky. Analýza probíhajících konverzací umožňuje sledovat způsoby komunikace, typické obtíže žáků i efektivitu peer-to-peer přístupu. Mattecoach tak představuje nejen nástroj podpory výuky, ale i platformu pro inovaci a výzkum v oblasti matematického vzdělávání [1].

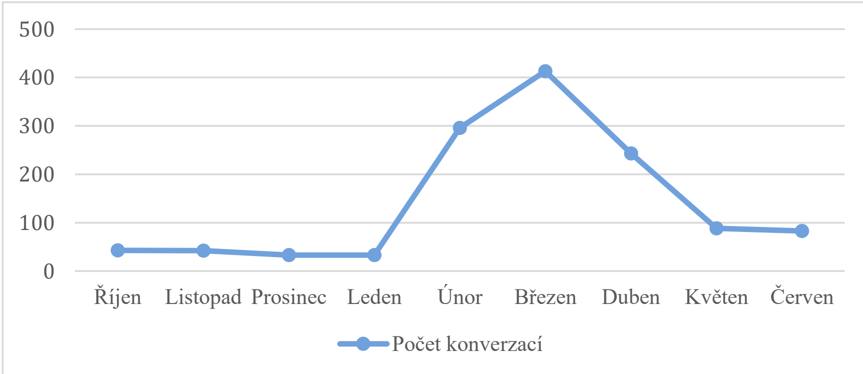
2 Výsledky z prvního roku fungování aplikace Mattecoach

Aplikace Mattecoach byla v České republice spuštěna 14. října 2024 a během prvního roku provozu se do jejího fungování zapojilo 22 koučů – studentů učitelství matematiky. Ti uskutečnili celkem 1274 konverzací se žáky, což odpovídá 1831 hodinám online koučování. V průběhu školního roku se projekt postupně dostával do povědomí veřejnosti, a to nejen prostřednictvím cílené propagace na základních a středních školách a během dnů otevřených dveří Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého, ale také díky mediálním výstupům v tištěných periodikách, rozhlase a televizi.

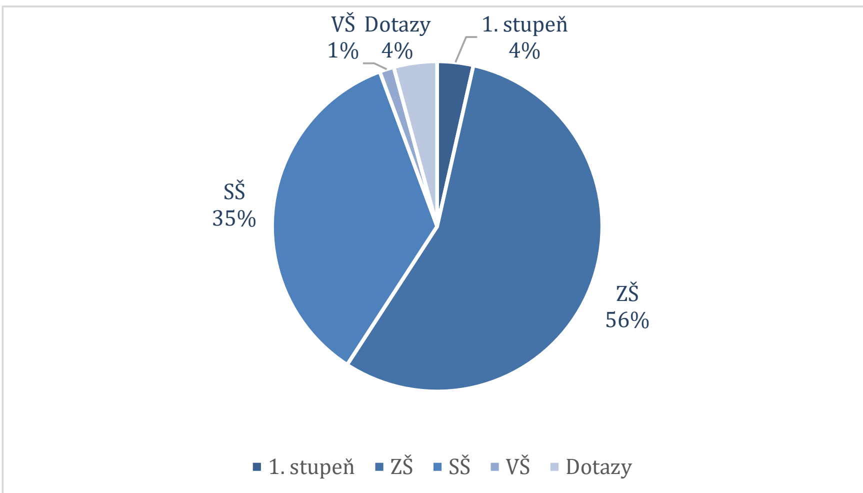
Součástí rozvoje projektu bylo rovněž zavedení vysokoškolského předmětu Mattecoach (2 kredity) na Univerzitě Palackého v Olomouci. Tento předmět poskytuje studentům teoretické zázemí v oblasti online výuky matematiky, praktický výcvik koučování a prostor pro analýzu a reflexi autentických chatových konverzací. Projekt se tak stal přirozenou součástí přípravy budoucích učitelů matematiky a propojil podporu žáků s univerzitním vzděláváním.

Obrázek 1 zachycuje vývoj počtu konverzací v jednotlivých měsících školního roku. Zřetelně se ukazuje, že Mattecoach byl nejvíce využíván v obdobích zvýšené studijní zátěže, zejména od února do dubna, kdy se žáci připravují na přijímací zkoušky a maturitu. Zvýšená aktivita v tomto období zároveň odráží efekt mediální propagace, která proběhla v únoru a přispěla k většímu povědomí o existenci aplikace.

Z obrázku 2 vyplývá, že největší podíl dotazů pocházel od žáků základních škol, především druhého stupně, přestože významnou část uživatelů tvořili i středoškolští studenti. Ojediněle se objevily také dotazy od vysokoškolských studentů či dotazy z jiných předmětů než matematiky. Pokud to kapacity projektu umožňují, snaží se koučové pomáhat i s úlohami z fyziky nebo žáky odkázat na vhodnou formu podpory v dané oblasti.



Obrázek 1: Vývoj počtu konverzací v jednotlivých měsících školního roku 2024/2025



Obrázek 2: Rozložení konverzací podle stupně vzdělávání

Analýza tematického zaměření konverzací ukazuje, že u žáků základních škol dominovala témata spojená s přijímacími zkouškami, algebraickými výrazy, aritmetikou a slovními úlohami. Středoškolští studenti se na kouče nejčastěji obraceli s dotazy na rovnice, nerovnice a funkce, přičemž zde výrazně převažovala problematika exponenciálních, logaritmických a goniometrických rovnic a funkcí. Tyto výsledky potvrzují, že Mattecoach nejčastěji využívají žáci v přechodovém období mezi základní a střední školou, kdy se setkávají s náročnějšími matematickými koncepty a potřeba individuální podpory je nejvýraznější.

První rok fungování projektu potvrdil, že Mattecoach dokáže efektivně propojit podporu žáků s rozvojem studentů učitelství matematiky. Aplikace nabízí moderní formu podpory učení založenou na peer-to-peer přístupu, který podporuje aktivní myšlení, samostatnost a hlubší porozumění matematice u obou skupin. Projekt tak otevírá nové možnosti pro inkluzivní, dostupné a smysluplné učení matematiky v online prostředí.

Tento příspěvek vznikl za podpory projektů IGA_PrF_2025_008 a fondu F – Projekt na podporu navýšení kapacit vysokoškolského vzdělávání v učitelských studijních programech.

Literatura

[1] Läthén, S.: *Maths Coach Online – university students help with maths. LiU Magazine* [online]. Linköping: Linköping University, 2024. [cit. 2026-01-09]. Dostupné z: https://liu.se/en/news-item/maths-coach-online-

[2] Mattecoach [online]. Dostupné z: https://www.mattecoach.se [cit. 2026-01-09].

[3] Mattecoach Česká republika [online]. Dostupné z: https://mattecoach.upol.cz/ [cit. 2026-01-09].

[4] Maths Coach Scotland [online]. Dostupné z: https://www.mathscoach.scot/ [cit. 2026-01-09].

Eliška Beránková
Katedra algebry a geometrie
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Palackého v Olomouci
17. listopadu 1192/11, 779 00 Olomouc
eliska.berankova01@upol.cz

OD DIGITÁLNÍ SIMULACE K ODVALOVÁNÍ 3D TIŠTĚNÉHO FYZICKÉHO MODELU

Daniela Bímová, Petra Pirklová

Katedra matematiky, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická, Technická univerzita v Liberci

Abstrakt: Pracovní dílna byla navržena s cílem poskytnout vyučujícím matematiky různých typů a stupňů škol, tj. zájemcům z řad účastníků konference, praktické zkušenosti práce s dynamickými applety obsahujícími úlohy zaměřené na odvalování rozličných modelů krychle. Účastníci pracovní dílny aktivně vypracovávali předpřipravené úlohy nejen v online virtuálním prostředí GeoGebra Classroom, ale i s pomocí 3D tištěných fyzických modelů.

Klíčová slova: Spontánní stereometrie, odvalování krychle, GeoGebra 3D, dynamické applety, 3D tištěné modely.

From digital simulation to the rolling of a 3D printed physical model

Abstract: The workshop was designed to provide mathematics teachers from diverse types and levels of schools (that is, conference participants interested in the topic) with practical experience in working with dynamic applets containing tasks focused on rolling various models of the cube. The workshop participants actively worked through pre-prepared tasks not only in the online virtual environment of GeoGebra Classroom, but also with the help of 3D printed physical models.

Key words: Spontaneous stereometry, rolling the cube, GeoGebra 3D, dynamic applets, 3D printed models.

Úvod

V současné době je velmi často obtížné motivovat žáky vhodným způsobem k učení. Je proto více než žádoucí najít takové způsoby a metody, které by je vedly k touze po poznání něčeho nového, objevení pro ně neznámých skutečností či zákonitostí apod. a které by jim zároveň poskytly pocit úspěchu. Z uvedených důvodů jsme si položily otázku: „Jak motivovat žáky k pochopení geometrického jevu, jakým může být např. odvalování různých modelů krychle?“ Odpověď na tuto otázku jsme hledali společně s účastníky pracovní dílny pomocí aktivních činností spočívajících v řešení zadaných úloh.

1 Geometrické myšlení a prostorová představivost

Vzhledem ke skutečnosti, že v revidované verzi dokumentu Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (RVP ZV, 2025) došlo k opětovné redukci učiva geometrie – a přitom dostatečně rozvinuté geometrické myšlení a prostorová představivost jsou nezbytné nejen pro řadu každodenních činností, ale i pro řadu profesí – vyvstávají otázky, jaké geometrické úlohy do výuky zařazovat (tj. úlohy pro jaká geometrická témata do výuky geometrie nenásilnou formou integrovat, když byla centrálně další témata z výuky geometrie odebrána), kdy takové geometrické úlohy do výuky implementovat a jakými způsoby.

Nejprve ve stručnosti pojednejme o významech geometrického myšlení a prostorové představivosti nejen z hlediska kognitivní psychologie, ale především i z hlediska didaktiky matematiky.

Geometrické myšlení i prostorová představivost jsou zařazovány mezi tzv. kognitivní složky člověka. Toto jejich zařazení je opodstatněné, a to právě jak z hlediska kognitivní psychologie, tak i z pohledu didaktiky matematiky a neurověd.

Geometrické myšlení představuje **specifickou formu kognitivního zpracování informací**, která mj. zahrnuje:

- vnímání a rozpoznávání rovinných tvarů, prostorových objektů a vztahů mezi nimi,
- mentální manipulaci s geometrickými objekty,
- abstrahování prostorových vlastností,
- deduktivní a vizuálně-logické usuzování.

V kognitivní psychologii je geometrické myšlení řazeno mezi vyšší kognitivní funkce, neboť kombinuje percepční procesy s abstraktním a logickým myšlením. V didaktice matematiky se často zmiňuje, že geometrické myšlení má vlastní vývojové stupně (např. van Hieleho model), což je typický znak kognitivní schopnosti.

Prostorová představivost je standardně považována za **základní kognitivní schopnost** člověka, která zahrnuje například:

- mentální rotaci objektů,
- představování si pohybů a transformací v prostoru,
- orientaci v prostoru.

V psychologii je prostorová představivost často řazena mezi **vizuálně-prostorové schopnosti**, které tvoří samostatnou složku inteligence.

Z obecného hlediska jsou geometrické myšlení a prostorová představivost součástí **kognitivních procesů** (mezi ně řadíme vnímání, paměť, myšlení, představivost), **inteligence jedince** (zejména její vizuálně-prostorové a logické složky) a **exekutivních funkcí** (pokud jde o plánování, kontrolu a koordinaci mentálních operací).

V oblasti vzdělávání jsou tyto dvě uvedené schopnosti – geometrické myšlení a prostorová představivost – považovány za **klíčové pro porozumění geometrii, stereometrii a technickým oborům, významné pro (každodenní) lidské činnosti** (orientace v prostoru, ve městě či na mapě, manipulace s prostorovými objekty, práce s nástroji), **rozvíjitelné cílenou výukou, manipulativními aktivitami a dynamickými vizualizacemi**.

Lze shrnout, že geometrické myšlení i prostorová představivost jsou plnohodnotnými kognitivními složkami člověka, mezi které patří základní schopnosti lidské mysli propojující vnímání, představivost, abstrakci a logické usuzování, a mající zásadní význam jak pro matematické vzdělávání, tak pro běžné fungování člověka v prostoru

2 Procvičování geometrického myšlení a prostorové představivosti pomocí odvalování modelů krychle

Profesor Hejný klade ve své dlouholeté práci důraz na učení založeném na „budování schémat“ a na rozvoj geometrické představivosti prostřednictvím izolovaných a generických modelů, které žáci aktivně objevují a testují. Ve své knize (Hejný, 1989) zavádí pojem spontánní stereometrie jako takový typ prostorové geometrie, v níž nejsou kromě základních znalostí o prostorových tělesech, resp. objektech zapotřebí žádné hlubší poznatky z prostorové geometrie. Spontánní stereometrii tedy chápe v tomto duchu jako soubor dovedností a představ o trojrozměrných objektech vznikajících ze zkušeností s manipulacemi a modelováním. Hejný rozděluje spontánní stereometrii na šest oblastí:

- geometrická tělesa (modelování a znázorňování těles, manipulace s modely těles, skládání/rozkládání těles, . . .),
- sítě těles (vytváření sítí a manipulace s nimi),
- geometrie povrchu těles (pohyb po povrchu tělesa),
- pohyb těles (odvalování a otáčení těles, zápis těchto pohybů, stopa vytvořená odvalováním tělesa nebo jeho části),
- kombinatorická geometrie těles (např. obarvování vrcholů, hran a stěn tělesa, kombinatorické hry),
- prostorová bludiště (řešení, ale i tvoření prostorového bludiště).

Uvedených šest oblastí spontánní stereometrie nabízí řadu aktivit a úloh, pomocí nichž lze u žáků nenásilnou formou rozvíjet a trénovat geometrické myšlení i prostorovou představivost. Pro pracovní dílnu jsme zvolily oblast pojmenovanou pohyb těles a speciálně jsme se zaměřily na odvalování rozličných modelů krychle po předem vytvořených trasách.

Úlohy zaměřené na odvalování různých modelů krychle záměrně propojují několik kognitivních procesů, a to tyto následující procesy:

- vizuálně-prostorovou transformaci (mentální rotace a translace),
- strukturální reprezentaci (hrany, sousedství stěn, povrch modelů krychle – tj. barvy nacházející se nebo symboly znázorněné na jednotlivých stěnách příslušného modelu krychle),
- sekvenční plánování (sled kroků při odvalování),
- propojení 2D reprezentací (rovinné sítě) s 3D objektem (odpovídajícím 3D fyzickým modelem).

Tento multiplex kognitivních procesů podporuje vytváření flexibilních modelů 3D objektu, tj. právě to, co Hejný označuje jako konstrukci generického schématu ve stereometrii. Přesněji, odvalování modelu krychle nutí žáka uvažovat, jak se konkrétní stěna krychle „přemístí“ na novou pozici, jak se v příslušném kroku odvalení změní orientace symbolů na stěnách (pokud se tedy může změnit; např. u kruhu znázorněného na stěně modelu krychle k žádné změně orientace díky jeho tvaru dojít nemůže) a jak z příslušného kroku odvalení odvodí výslednou konfiguraci modelu krychle umístěného na nové pozici.

2.1 Zmínka o empirických výzkumech

Moderní kognitivně-vzdělávací výzkumy ukazují, že prostorové dovednosti jsou naučitelné a mají širší dopad na výkon v STEM oblastech. Metaanalýza (Uttal a kol., 2013) shromáždila stovky studií, ze kterých byl odvozen závěr, že cílený trénink prostorových dovedností vede k jejich výrazným zlepšením. Jinými slovy řečeno, specifická cvičení (včetně implementace úloh zaměřených na trénování a rozvoj manipulativních dovedností se 3D objekty) přinášejí reálná zlepšení schopností, které jsou spojeny s úspěchem v matematice a technických oborech. Další přehledy a studie (Hegarty, 2018; Sorby, 2009) potvrzují, že specifické postupy (mentální rotace, práce se zobrazeními, skládání/rozkládání sítí těles atd.) vedou k měřitelnému zlepšení a někdy i k lepším školním výsledkům. Uvedená fakta tak empiricky podporují zařazování úloh zaměřených na odvalování rozličných modelů krychle do strukturovaného rozvoje stereometrických dovedností žáků.

2.2 Odvalování modelů krychle z hlediska vzdělávacího procesu

Z pohledu vzdělávacího procesu fungují úlohy založené na odvalování různých modelů krychle v následujících vzájemně se doplňujících rovinách:

- **manipulace se 3D (tištěným) fyzickým modelem** podporuje propojení motorických dovedností s mentálními reprezentacemi prostorových transformací. Do této roviny lze zařadit také řešení problému „na prstech“ či pomocí „rukou“. V těchto případech prsty či ruce pomáhají žákům vytvořit si konkrétní imaginární izolační model, se kterým ve svých představách následně pracují.

- **pozvolné abstrahování** (např. opakované odvalování jednoho a téhož modelu po různých trasách vede k identifikaci invariantů, tj. k určení, která stěna sousedí se kterou stěnou, které symboly se objeví v sousedních čtvercích zobrazené trasy odvalování aj.),

- **metakognitivní řízení**
  - *vytvoření strategie* (žáci jsou nuceni plánovat dílčí kroky postupu a možné strategie řešení úloh (při postupném odvalování barevného modelu krychle po zadané trase budou např. sledovat jednotlivé pozice modré stěny)),
  - *průběžná kontrola porozumění* (během průběžné kontroly se žáci mohou ptát sami sebe: „Učinil(a) jsem tento krok správně?“)
  - *vyhodnocování a průběžná změna strategie* (v průběhu řešení úlohy mohou žáci dojít ke zjištění: „Tento postup mi nevyhovuje, zkusím najít jiný způsob řešení.“, což je zpravidla vede ke změně původně zvolené strategie)

- **reflexe a hodnocení** (žáci hodnotí, zda byl jimi zvolený postup řešení úlohy efektivní; uvědomují si vzniklé chyby, a především jejich možné příčiny; přenášejí získané zkušenosti na další podobné situace, tj. na řešení úloh podobného typu).

Metakognice, neboli uvědomování si řízení vlastních myšlenkových procesů při učení a řešení úloh nespočívá v samotném způsobu řešení úlohy, ale ve vědomém pochopení toho, jak k řešení přistupujeme, jak ho kontrolujeme a jak se z něj učíme. Metakognici lze v kontextu odvalování různých modelů krychle chápat např. následovně:

- žák rozpozná, že se v řešení úlohy s pomocí mentálního odvalování „ztrácí“, a tak vědomě použije 3D fyzický model,

- žák dokáže vysvětlit, proč jím zvolená strategie funguje či nefunguje (např. sledování stěny jedné barvy (tzv. referenční stěny) během procesu odvalování),

- žák dokáže po vyřešení úlohy reflektovat, která zvolená strategie vedoucí k nalezení správného řešení byla nejúčinnější, a také zvládne vysvětlit, proč tomu tak bylo.

2.3 Návrhy implementace úloh zaměřených na odvalování modelů krychle

Základní princip procesu odvalování různých modelů krychle nebo jiných těles (Bímová & Pirklová, 2024) je možné žákům nejprve názorně ukázat s pomocí užití 3D fyzických modelů a předtištěných plánků příslušných tras.

Úlohy zaměřené na odvalování rozličných modelů krychle je možné začleňovat do výuky geometrie již od 1. stupně základní školy, kdy jsou žáci zvyklí pracovat s 3D fyzickými modely. A protože odvalování modelu krychle spadá pod jednu z šesti oblastí spontánní stereometrie, nejsou k řešení úloh tohoto typu zapotřebí žádné hlubší znalosti z geometrie. Žáci musí pouze pochopit základní princip procesu odvalování modelu krychle a zaznamenávání požadovaných barev či symbolů vyskytujících se na jeho jednotlivých stěnách do vyznačené trasy. K nalezení řešení úloh uvedeného typu mohou žáci zpočátku využívat jak papírové modely, tak i 3D tištěné fyzické modely. Oba typy modelů krychle mohou vyrobit sami žáci v pracovních činnostech či v informatice (začlenění mezipředmětových vztahů ve výuce), nebo je pro žáky může vyrobit učitel. Nevýhodou papírových modelů oproti 3D tištěným fyzickým modelům je jejich krátká životnost, a to především v případě, že je budou používat opakovaně žáci mladšího školního věku. Výhodou obou dvou typů modelů je jejich variabilita. Tzn. lze je vyrobit takovým způsobem, aby na jejich stěnách byly znázorněny takové barvy či symboly, které se vyskytují v předkládaných úlohách. Navíc při samostatné tvorbě papírových modelů si žáci procvičí různé typy sítí krychle, skládání sítě do povrchu modelu krychle a zpětné rozkládání povrchu modelu krychle do roviny, dále budou trénovat své motorické dovednosti (přesnost rýsování, stříhání, ohýbání v místech přehybů apod.). Při tvorbě 3D tištěných fyzických modelů je žákům představen postupný proces 3D tisku, a to od 3D modelování virtuálního modelu ve vhodném geometrickém softwaru, nastavení virtuálního modelu k 3D tisku (vytvoření souboru ve formátu *.stl, slicování, generování souboru ve formátu *.gcode) a samotný proces 3D tisku 3D fyzického modelu na 3D tiskárně.

Žáci jakéhokoliv věku (nejen mladšího školního věku) mohou pomocí induktivního způsobu výuky, v jehož rámci přecházejí od konkrétních příkladů a dílčích zkušeností k obecným pravidlům, principům a zobecněním, řešit zadané úlohy zaměřené na odvalování různých modelů krychle. Dostanou-li se do fáze, kdy jsou schopni úlohy uvedeného typu řešit pouze ve svých představách, lze přejít k abstraktnějším variantám úloh uvedeného typu.

Mezi abstraktnější varianty úloh zaměřených na odvalování různých modelů krychle můžeme zařadit jednak úlohy řešené ve virtuálním prostředí některého ze 3D geometrických softwarů, tak i řešené pouze v představách žáků. Abstraktnější varianty úloh je vhodné zařazovat do výuky geometrie na 2. stupni základních škol či na středních školách. Při jejich implementaci je však třeba brát také zřetel např. na digitální dovednosti žáků. Tj. je zapotřebí, aby v případě řešení úloh ve virtuálním prostředí žáci znali prostředí příslušného 3D geometrického softwaru a uměli v něm pracovat.

Úlohy zaměřené na odvalování různých modelů krychle lze také rozličnými způsoby variovat. Pokud mají žáci řešit úlohy tohoto typu pouze ve svých představách, nabízí se nejen vhodná volba délek tras odvalování, ale také příhodná volba barev či symbolů na stěnách modelu krychle. Trasa odvalování modelu krychle může být žákům zadána, anebo žáci mohou trasu odvalování zaznamenávat dle daných pokynů např. do čtvercové sítě.

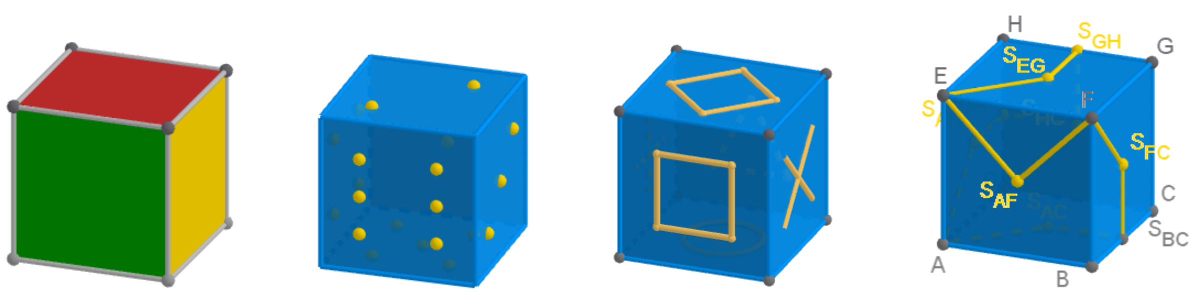
Pro ověření správnosti řešení se nabízí kombinace mentálního způsobu řešení s kontrolou pomocí manipulace s 3D tištěným fyzickým modelem, se sítí modelu krychle či např. pomocí animace v dynamickém appletu vytvořeném v softwaru GeoGebra 3D. Mé dosavadní zkušenosti ukazují, že různé kombinace zmíněných způsobů řešení úloh uvedeného typu jsou pro procvičování geometrického myšlení a trénování prostorové představivosti žáků efektivní. Hegarty a kol. (2018) upozorňují, že různé strategie řešení prostorových úloh mohou mít při učení různou efektivitu, a proto je užitečné je studentům zpřístupnit.

3 Navržená sada úloh

Jak bylo zmíněno výše, geometrické myšlení a prostorovou představivost lze rozvíjet cílenou výukou, manipulativními aktivitami a dynamickými vizualizacemi. Za těmito účely jsme navrhly sadu úloh zaměřených na odvalování různých modelů krychle.

Slovní i grafické zadání úloh zaměřených na odvalování různých modelů krychle jsme zpracovaly v softwaru GeoGebra v podobě dynamických appletů. Přitom pod různými modely krychle (obrázek 1) rozumíme:

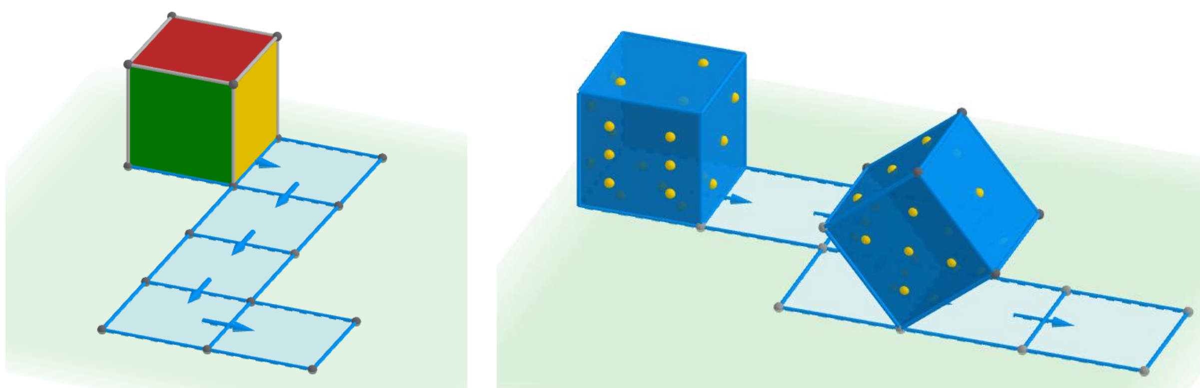
- model šestibarevné krychle (každá stěna krychle je obarvena jinou barvou),
- model hrací kostky (s body 1–6 na jejích stěnách, přitom součet bodů na protějších stěnách hrací kostky je roven sedmi),
- model krychle se symboly na stěnách (na každé stěně krychle je zobrazen jiný symbol, např. čtverec. kruh, symboly „+“ nebo „×“ atd.)
- model krychle s prostorovou lomenou čarou na jejích stěnách.



Obrázek 1: 3D virtuální modely krychle k navrženým úlohám

Vytvořeny byly celkem čtyři sady úloh. V každé sadě úloh byl použit pouze jeden typ modelu krychle a byla zvolena právě jedna trasa odvalování. Navíc každá ze čtyř zvolených tras představovala vždy jeden typ sítě krychle, po kterém se model krychle může odvalovat pouze takovým způsobem, aniž by se v některém ze čtverců sítě musel odvalit zpět na předchozí čtverec. Lze říci, že pohyby odvalování modelů krychle po vybraných čtyřech typech sítě krychle jsou „jednosměrné“.

Úlohy věnované zaznamenávání barev, bodů, symbolů či částí prostorové lomené čáry do jednotlivých čtverců příslušného typu sítě krychle se lišily způsobem zadání příslušných modelů krychle. V první podúloze (a) byly barvy, body, symboly či části prostorové lomené čáry vyskytující se na stěnách příslušného modelu krychle popsány pouze slovně. Ve druhé podúloze (b) přibyl ke slovnímu zadání úlohy i statický model krychle znázorněný ve 3D okně programu GeoGebra. Na jednotlivých statických modelech krychle byly buď všechny stěny obarveny danými barvami, anebo na stěnách byly znázorněny příslušné body, symboly či části lomené prostorové čáry, a to dle příslušného slovního popisu uvedeného v zadání úlohy. Ve třetí podúloze (c) byly slovní zadání a statický model krychle doplněny o dynamický model krychle, jehož stěny byly jednobarevné. Tento jednobarevný dynamický model krychle se po postupném stlačování příslušných tlačítek ve 3D okně softwaru odvaloval krok za krokem. Ve čtvrté podúloze (d) byl navíc dynamický model krychle buď opatřen barevnými stěnami, anebo body, symboly či částmi prostorové lomené čáry zobrazenými na jeho stěnách, a to v každém kroku jeho odvalení.



Obrázek 2: Grafická zadání vybraných dvou navržených úloh

K pátým podúlohám (e) byly 3D vymodelovány a následně 3D vytištěny fyzické modely krychlí a také vytvořeny rovinné plánky tras, po kterých bylo možné 3D tištěné modely krychlí odvalovat. Délky stran čtverců nacházejících se v plánцích jednotlivých tras odpovídaly délkám hran příslušného modelu krychle.

Každá sada úloh byla doplněna ještě dalším typem úlohy. V šesté podúloze (f) nebylo již požadováno zaznamenávání barev, bodů, symbolů nebo částí prostorové lomené čáry do čtverců plánku trasy, ale úkolem bylo zakreslit (např. pomocí nástroje „Pero“ či pomocí dalších nástrojů softwaru GeoGebra) kolmý pohled shora a kolmý pohled zpředu na trajektorii, kterou vykreslí zadaný vrchol modelu krychle při jeho postupném odvalování po trase zakreslené na plánku. V případě, že by úlohu řešili žáci, kteří umí pracovat s nástroji 3D okna softwaru GeoGebra, anebo s nástrojem „Stopa objektu“, mohli by též zkusit vykreslit trajektorii pohybujícího se bodu ve 3D okně s pomocí vhodných nástrojů tohoto softwaru.

Do navržené sady úloh byly tedy zakomponovány úlohy, které přirozeným způsobem cíleně rozvíjejí geometrické myšlení a trénují prostorovou představivost žáků. K jejich vyřešení stačí pouze porozumění principu odvalování modelu krychle po dané trase a způsobu zaznamenávání požadovaných údajů trasy zakreslené v plánku. Grafická zadání úloh byla doplněna dynamickými vizualizacemi. Při řešení pátých a šestých podúloh lze využít manipulativních činností s 3D tištěnými fyzickými modely.

4 Uskutečněná pracovní dílna

Účastníci pracovní dílny měli možnost se vžít do rolí žáků a ve virtuálním prostředí GeoGebra Classroom (https://www.geogebra.org/classroom/waghttyt) řešili postupně podúlohy v jednotlivých výše uvedených sadách úloh. V úplném závěru pracovní dílny pak byli požádáni o vyplnění krátkého dotazníku, který obsahoval položky týkající se jak jimi zvolených způsobů řešení úloh, tak i jejich metakognice.

Věříme, že pracovní dílna poskytla účastníkům praktické zkušenosti jak se samotným řešením úloh zaměřených na odvalování různých modelů krychle, tak i s využitím dynamických appletů vytvořených ve virtuálním online prostředí GeoGebra Classroom a 3D tištěných fyzických modelů krychle ve výuce geometrie. Účastníci měli totiž v GeoGebra Classroom možnost seznámit se s dynamickými vizualizacemi postupných procesů odvalování různých modelů krychle po předem stanovených trasách, ale i se znázorňováním obtisků či vykreslováním trajektorií vybraných vrcholů modelů krychle. Následně si vyzkoušeli i práci s 3D tištěnými fyzickými modely. Manipulace s nimi v rukou jim poskytla jiný, hmatatelný pohled na totéž téma.

Předpokládáme, že účastníci pracovní dílny získali inspiraci, jak obohatit výuku geometrie o atraktivní prvky, které propojují využití digitálních technologií s reálnou zkušeností spojenou s manipulativními dovednostmi.

Na konci pracovní dílny bylo konstatováno, že úlohy z uvedené sady se jeví zajímavé, inspirativní a ve výuce použitelné.

5 Závěr

Lze shrnout, že článek se zaměřuje na problematiku motivace žáků k učení geometrie a zdůrazňuje význam rozvoje geometrického myšlení a prostorové představivosti, které jsou považovány za klíčové kognitivní schopnosti nezbytné nejen pro matematické vzdělávání, ale i pro běžné fungování člověka a řadu profesí. V kontextu redukce učiva geometrie v RVP ZV (2025) je diskutována potřeba volit vhodné typy úloh a didaktické postupy, jež by tyto schopnosti rozvíjely nenásilnou a smysluplnou formou. Zmíněny jsou přitom také poznatky z kognitivní psychologie, didaktiky matematiky i empirických výzkumů, které potvrzují, že prostorové dovednosti jsou cíleným tréninkem rozvíjitelné a mají pozitivní dopad na výkon v matematických a technických oborech.

Jako konkrétní didaktický nástroj je představeno odvalování různých modelů krychle, chápané v duchu Hejného konceptu spontánní stereometrie. Tento typ úloh propojuje manipulaci s fyzickými a virtuálními 3D modely, mentální rotace, práci se sítěmi těles i metakognitivní strategie žáků. Jsou popsány návrh a realizace sady úloh zpracovaných v prostředí softwaru GeoGebra, včetně jejich postupné gradace od konkrétních manipulativních činností až po abstraktnější mentální řešení (v případě řešení sady úloh žáky; v pracovní dílně tomu bylo v případě řešení sady úloh učiteli přesně naopak). Zkušenosti z uskutečněné pracovní dílny naznačují, že kombinace dynamických vizualizací, 3D tištěných fyzických modelů a reflexe vlastních postupů může být pro výuku geometrie inspirativní a efektivní, a to jak z hlediska rozvoje prostorových schopností, tak z hlediska motivace žáků.

Literatura

[1] Bímová, D., Pirklová, P.: *Překlápění krychlových těles*, Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2024, JČMF a Katedra matematiky FAV ZČU, ISBN: 978-80-11-05688-9, p. 25–30, 2024.

[2] *GeoGebra Classroom – Odvalování různých modelů krychle_sborník UPVM 2025* [online]. [cit. 2025-12-13]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/classroom/waghttyt.

[3] Hegarty, M.: *Ability and sex differences in spatial thinking: What does the mental rotation test really measure?* Psychonomic Bulletin & Review, 2018.

[4] Hejný, M.: *Teória vyučovania matematiky 2.* 1. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1989. **ISBN**: 9788008000147

[5] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. Praha: NPI ČR, 2025 [cit. 2025-12-13]. Dostupné z: https://prohlednout.rvp.cz/zakladni-vzdelavani

[6] Sorby, S. A.: *Educational research in developing 3-D spatial skills for engineering students*. International Journal of Science Education, 2009.

[7] [7] Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., & Warren, C.: *The malleability of spatial skills: A meta-analysis of training studies*. Psychological Bulletin, 2013.

Daniela Bímová
Katedra matematiky,
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická, Technická univerzita v Liberci
Studentská 1402/2, 461 17 Liberec 1
e-mail: daniela.bimova@tul.cz

Petra Pirklová
Katedra matematiky,
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická, Technická univerzita v Liberci
Studentská 1402/2, 461 17 Liberec 1
e-mail: petra.pirklova@tul.cz

GEOGEBRA A SYNTETICKÉ ŘEŠENÍ GEOMETRICKÝCH PROBLÉMŮ

Jiří Blažek

Fakulta pedagogická, Technická univerzita v Liberci

Abstrakt: Dynamická Geometrie (DGE) představuje model Euklidovské geometrie, který, díky své názornosti, usnadňuje studentům porozumění. DGE ale také může představovat významnou pomoc při procesu řešení geometrické úlohy. Tento článek prezentuje výzkum, který se zabýval otázkou, jak „náročné“ (s ohledem na studentův důvtip a matematické znalosti) je objevit s pomocí softwaru relevantní fakta. Bylo zjištěno, že u většiny faktů, která studenti objevili, byly nástroje softwaru vedeny konkrétní úvahou a na základě teoretických znalostí

Klíčová slova: GeoGebra, Řešení problémů, Geometrie, Pomoc softwaru

GeoGebra and synthetic justification of geometric problems

Abstract: Dynamic Geometry (DGE) is a model of Euclidean geometry which, thanks to its accuracy, makes understanding easier for students. DGE can also be a significant aid in the process of solving geometric problems. This article presents research that addressed the question of how "difficult"(in terms of student insight and mathematical knowledge) it is to discover relevant facts using software. It was found that for most of the facts that students discovered, the software tools were guided by specific considerations and based on theoretical knowledge.

Key words: GeoGebra, Problem Solving, Geometry, Software Support

Článek je publikován v časopise *South Bohemia Mathematical Letters*, Vol. 33 (2025), No. 1
Dostupné z: https://home.pf.jcu.cz/~sbml

MELODIE NA MILIMETROVÉM PAPÍŘE: VYUŽITÍ POČÍTAČEM GENEROVANÉHO MELODICKÉHO GRAFU K APLIKACI MATEMATIKY

Stanislava Dvořáková[1], Vítězslav Kružík[2]

[1]Vysoká škola polytechnická Jihlava, [2]Gymnázium, Olomouc, Čajkovského 9

Abstrakt: Článek představuje metodu Melodického grafu jako nástroj pro propojení hudby a matematiky. Hudební dílo je v něm transformováno do souřadnicového systému, kde počítač generuje vizuální struktury tvořené vodorovnými úsečkami. Cílem je demonstrovat matematickou podstatu hudby skrze symetrii a kombinatoriku. Příspěvek popisuje implementaci v programovacím prostředí a analyzuje vliv této vizualizace na výuku geometrických transformací, poměrů a diskrétní matematiky. Tato multimodální metoda prokazatelně zvyšuje motivaci a hloubku pochopení u studentů.

Klíčová slova: Melodický graf, geometrické transformace, diskrétní matematika, didaktika matematiky, vizualizace dat, Pitch-Time Plot.

Melody on Graph Paper: Using Computer-Generated Pitch-Time Plots for Mathematical Applications

Abstract: The article introduces the Pitch-Time Plot method as a tool for interconnecting music and mathematics. Within this framework, a musical work is transformed into a coordinate system where a computer generates visual structures consisting of horizontal line segments. The objective is to demonstrate the mathematical essence of music through symmetry and combinatorics. The paper describes the implementation within a programming environment and analyzes the impact of this visualization on teaching geometric transformations, ratios, and discrete mathematics. This multimodal approach demonstrably increases student motivation and the depth of their understanding.

Key words: Pitch-Time Plot, geometric transformations, discrete mathematics, mathematics education, data visualization.

Úvod

Vztah mezi hudbou a matematikou fascinuje lidstvo již od antických dob, kdy Pythagoras zkoumal číselné poměry strun. Od středověkých neum a standardizace linek Guidem z Arezza až po vznik mensurální notace a generálbasu se lidé pokoušeli najít ideální způsob, jak exaktně zachytit hudební myšlenku. V dnešní digitální éře se k těmto tradičním metodám přidávají technologie jako MIDI a pokročilá analýza zvuku, které umožňují nahlížet na tón jako na soubor měřitelných vlastností: výšky, délky, síly a barvy.

Tato práce se zaměřuje na využití tzv. Melodického grafu (Pitch-Time Plot) jako inovativního didaktického nástroje. Transformací melodií (např. lidové písně Ovčáci, čtveráci) do souřadnicového systému za pomoci běžně dostupného softwaru, jako je MS Excel, získáváme unikátní vizuální model. Ten nám umožňuje aplikovat matematické disciplíny – od diskrétních funkcí a identifikace opakujících se vzorů až po statistickou analýzu četnosti tónů, výpočet průměrných hodnot či směrodatné odchylky. Cílem je ukázat, že hudba není pouze uměním, ale i strukturovaným datovým souborem, který nabízí nekonečné možnosti pro praktickou výuku matematiky.

1 Od tónu po číslo – historie notopisu

Propojení matematiky a hudby není moderním vynálezem, ale tvoří základní pilíř západní vzdělanosti již od antiky. Zatímco Pythagoras položil základy zkoumáním číselných poměrů chvějící se struny, středověk přinesl potřebu tuto matematickou harmonii vizualizovat a kodifikovat.

Zlomovým bodem se stal rok 1025, kdy Guido z Arezza zavedl standardizaci do linek. Tím dal hudbě jasný geometrický řád – vertikální poloha začala přesně odpovídat výšce tónu. Na tento vývoj navázala mensurální notace, která do systému vnesla exaktní matematické poměry délek tónů, čímž de facto vytvořila první diskrétní datovou síť v dějinách umění. [3]

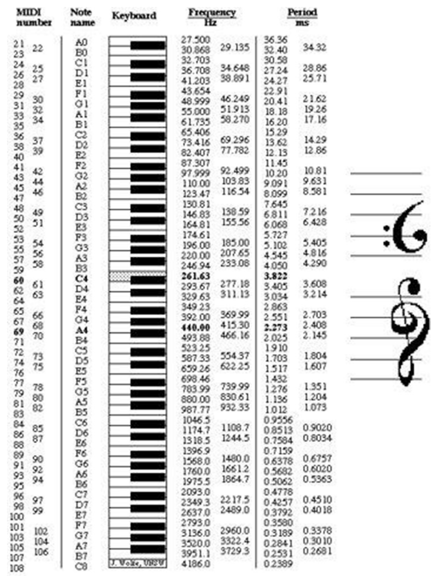
Postupem času se numerické vyjádření hudby stávalo sofistikovanějším. Od čínského číselného notopisu Jianpu přes generálbas (kde čísla pod notovou osnovou definovala akordické obraty) až po moderní akordové značky, byla hudba vždy vnímána jako strukturovaný kód.

V současnosti dochází k dovršení této cesty díky digitalizaci. Standard MIDI, který tónům přiřazuje konkrétní číselné hodnoty (např. komorní $a = 69$), umožňuje nahlížet na hudební skladbu jako na čistě matematický zápis. Tón již není jen estetickým vjemem, ale datovým bodem definovaným čtyřmi exaktními vlastnostmi: frekvencí (výškou), časem (délkou), amplitudou (silou) a spektrálním složením (barvou).

Právě tato historická kontinuita od Guidových linek po dnešní digitální rozhraní tvoří základ pro metodu Melodického grafu. Ten není ničím jiným než moderním završením snahy o matematické zobrazení hudebního pohybu v čase.

1.1 Digitální most mezi hudbou a daty: Technologie MIDI

V procesu transformace hudebního díla do podoby Melodického grafu hraje klíčovou roli technologie MIDI (Musical Instrument Digital Interface; v překladu Digitální rozhraní pro hudební nástroje). Zatímco tradiční notace je určena lidskému interpretovi, protokol MIDI slouží jako univerzální digitální jazyk, který umožňuje matematicky přesný popis hudební události.



Obrázek 1: Převod not do formátu MIDI; zdroj [14]

1.1.1 Historický vývoj a vznik standardu

Rozhraní MIDI vzniklo na počátku 80. let 20. století (oficiálně představeno v roce 1983) jako reakce na potřebu vzájemné komunikace mezi elektronickými nástroji různých výrobců. Před jeho vznikem byly syntezátory vzájemně nekompatibilní. MIDI přineslo revoluci tím, že definovalo jednotný protokol pro přenos dat, nikoliv zvuku. Tato abstrakce – oddělení informace o hře od samotného výsledného zvuku – je právě tím momentem, který umožňuje hudbu analyzovat jako matematický objekt.

Zásadním přínosem MIDI je jeho diskrétní povaha. Na rozdíl od analogového zvukového záznamu, který je spojitou vlnou, je MIDI záznam tvořen posloupností digitálních zpráv. Každá „událost“ (stisk klávesy) je popsána sadou číselných parametrů:

- Note On / Note Off: Binární informace o začátku a konci tónu;
- Note Number (Číslo tónu): Celé číslo v rozsahu 0 až 127;
- Velocity (Dynamika): Informace o síle úhozu, rovněž v rozsahu 0–127.

Tento systém umožňuje například v prostředí MS Excel přiřadit každému tónu jednoznačné souřadnice. Pokud víme, že střední C (C4) má hodnotu 60 a komorní a1 hodnotu 69, můžeme jakoukoli melodii zapsat jako řadu celých čísel.

1.1.2 Matematické a technické vlastnosti

Z hlediska matematické aplikace nabízí MIDI několik klíčových vlastností, které metoda Melodického grafu využívá:

- **Linearizace výšky tónu:** Fyzikální frekvence tónů (v Hertzech) roste logaritmicky. MIDI však tuto stupnici převádí na lineární řadu čísel. To je v didaktice matematiky nesmírně cenné, protože intervaly (vzdálenosti mezi tóny) lze počítat pomocí jednoduchého odčítání (např. čistá kvinta je vždy rozdíl +7 jednotek), což odpovídá operacím v celých číslech;

- **Časová diskretizace:** Čas v MIDI není vnímán jen v sekundách, ale v tzv. „dobách" a jejich částech, které dělí dobu na tisíce malých úseků. To umožňuje přesně definovat rytmické poměry (zlomky) a délky úseček na ose x Melodického grafu;

- **Vícerozměrnost dat:** Každý bod v grafu není jen bodem, ale nositelem dalších informací (vektorů), jako je hlasitost (osa z nebo tloušťka čáry) či barva zvuku (přiřazení kanálu).

Díky MIDI přestává být hudební analýza subjektivním popisem a stává se exaktní disciplínou. Pro studenty matematiky je MIDI bránou k pochopení:

- **Transformací:** Transpozice je prosté přičtení konstanty k ose y. V hudební terminologii mluvíme o transpozici.

- **Statistiky:** Analýza četnosti konkrétních čísel/tónů v skladbě umožňuje výpočet např. modusu, mediánu a aritmetického průměru „výšky" a „délky" skladby.

- **Algoritmizace:** MIDI soubory jsou čitelné pro programovací jazyky, což dovoluje automatizované generování Melodických grafů a jejich následnou matematickou analýzu.

V kontextu této práce je tedy MIDI chápáno jako nezbytný „převodník", který mění uměleckou invenci v měřitelná data, čímž dává vzniknout Melodickému grafu na digitálním milimetrovém papíře.

2 Od notového zápisu k tabulkové analýze

Přechod od tradičního notového zápisu k tabulkové analýze představuje zásadní krok v dešifrování matematické struktury hudby. Tento proces transformace spočívá v nahrazení grafických symbolů v notové osnově (Obrázek 2) exaktními číselnými hodnotami, které definují výšku a délku každého tónu v čase. Jako názorný model pro tento převod nám poslouží lidová píseň Ovčáci, čtveráci, na které demonstrujeme konkrétní postup zápisu melodie v prostředí tabulkového procesoru.

Obrázek 2: Notový zápis písně Ovčáci, čtveráci; zdroj: vlastní zápis Finale 2014

2.1 Melodický graf – Pitch-Time Plot

V procesu transformace hudebního díla do podoby Melodického grafu hraje klíčovou roli technologie MIDI (Musical Instrument Digital Interface). Zatímco tradiční zápis not je určen lidskému interpretovi, protokol MIDI slouží jako univerzální digitální jazyk, který umožňuje matematicky přesný popis hudební události. [7]

Jádrem předkládané metody je transformace hudebního notopisu do podoby diskrétních dat v prostředí tabulkového procesoru (Konkrétně používáme dostupný MS Excel.). Tento proces vyžaduje převod hudebních symbolů (not) na číselné hodnoty, které reprezentují dvě základní dimenze tónu: výšku a čas.

tón	**číslo**
pomlka	-
fis	54
g	55
gis	56
a	57
ais	58
h	59
c1	60
cis1	61
d1	62
dis1	63
e1	64
f1	65
fis1	66
g1	67
gis1	68
a1	69
ais1	70
h1	71
c2	72
cis2	73

Obrázek 3: Převodní tabulka z not na čísla; zdroj: vlastní zpracování

2.1.1 Datová struktura v tabulce

Základem pro tvorbu grafu je tabulka o čtyřech klíčových sloupcích (Obrázek 4), které odpovídají matematickým proměnným v souřadnicovém systému:

- **Délka tónu:** Trvání tónu vyjádřené v desítkové soustavě (např. čtvrťová nota = 1, půlová = 2, osminová = 0,5).
- **Počátek – osa x:** Časová značka vyjadřující, kdy tón začíná od počátku melodie. V didaktické praxi ji vyjadřujeme v počtu dob (např. první doba taktu je 0, druhá 1 atd.).
- **Výška tónu – osa y:** MIDI číslo tónu. Tento krok odstraňuje logaritmickou závislost frekvence a nahrazuje ji lineární řadou (např. c1 = 60, d1 = 62)
- **Pomlky:** pro následné matematické zkoumání melodie je důležité i označení pomlk. Můžeme je značit např. „p“, „-“ nebo prázdnou buňkou. (Hodnotu 0 má velmi hluboký tón c.)

Ovčáci, čtveráci			
Noty	*Délka tónu*	*Počátek*	*Výška tónu*
c1	1	0	60
e1	1	1	64
g1	1	2	67
p	1	3	-
c1	1	4	60
e1	1	5	64
g1	1	6	67
p	1	7	-
e1	0,5	8	64
e1	0,5	8,5	64
d1	0,5	9	62
e1	0,5	9,5	64
f1	0,5	10	65
d1	0,5	10,5	62
e1	0,5	11	64
e1	0,5	11,5	64
d1	0,5	12	62
e1	0,5	12,5	64
f1	0,5	13	65
d1	0,5	13,5	62
e1	1	14	64
d1	1	15	62
c1	2	16	60

Obrázek 4: Převodová tabulka písně Ovčáci, čtveráci; zdroj: vlastní zpracování

2.1.2 Algoritmus převodu do tabulky

Pro převod melodie z notového zápisu do tabulky je zapotřebí nejprve z Obrázku 2 jednotlivé noty a jejich délku přepsat do tabulky (Obrázek 3). Toto jsme udělali ručně. Zkoušeli jsme i použití umělé inteligence, ale výstupy nebyly uspokojivé a jejich kontrola mnohdy trvale déle než samotné ruční přepsání.

Při převodu konkrétní melodie postupujeme následovně:

1. **Analýza rytmu:** Každému tónu přiřadíme jeho pozici na časové ose. Pokud píseň obsahuje pouze čtvrťové noty, hodnoty v sloupci „Počátek“ budou 0, 1, 2, 3...

   Při použití MS Excel použijeme součet délek všech předchozích not a pomlk.

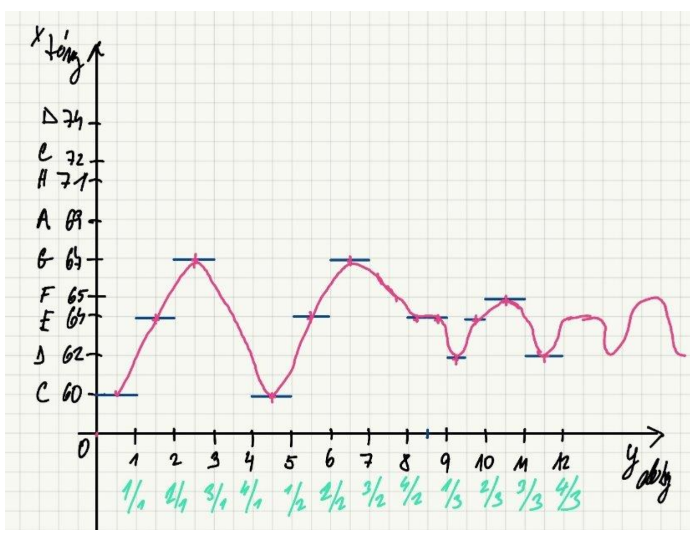
2. **Kódování výšky:** Každou notu v osnově identifikujeme a pomocí převodní tabulky ji změníme na MIDI číslo (Obrázek 2). Tím získáme diskrétní hodnoty pro vertikální polohu.

   Používáme-li k převodu MS Excel, lze dobře využít funkce SVYHLEDAT nebo novější XLOOPUP.

2.1.3 Vytvoření Melodického grafu

Zde si dovolíme malý rozbor postupu vytváření grafů. Musíme brát v úvahu odpovědi na následující otázky: Co je cílem vytvoření Melodického grafu? Chceme studenty procvičit ve vytváření grafů? Jak moc potřebujeme správný Melodický graf k jeho další analýze? Jak jsme zruční (my nebo studenti) v používání SW? Podle odpovědí na tyto otázky volíme metodu tvorby melodického grafu

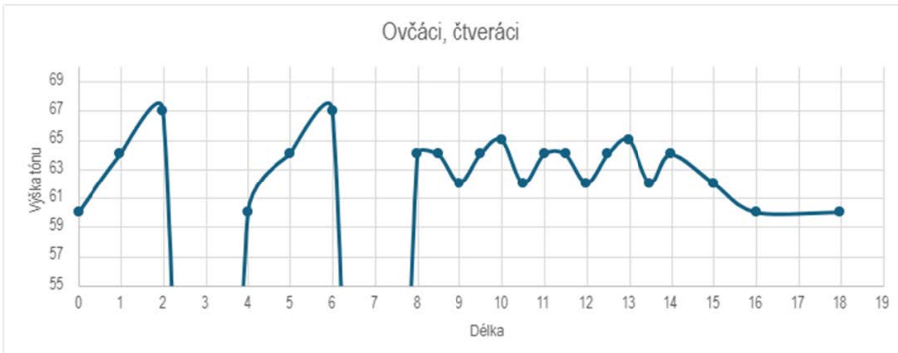
1. **Melodický graf nakreslený ručně**. Použijeme papír a tužku. Vhodný je milimetrový nebo čtverečkovaný list papíru (Obrázek 5).



Obrázek 5: Ručně nakreslený melodický graf; zdroj: vlastní zpracování

2. **2. Jednoduchý základní graf**. Z vytvořené tabulky na Obrázku 4 použijeme sloupce „Počátek” a „Výška tónu” a vytvoříme bodový graf (Obrázek 5). Tento graf neodpovídá hudební realitě. Z grafu nelze vyčíst délku tónu, přesněji jak dlouho zní zvuk, zda zvuky na sebe navazují. Přesto má velkou vypovídající hodnotu. Základní parametry, jako je rozsah a délka, doplňují ty hudební detailní, jako vrchol skladby, nástupy na tóny a celková struktura.

   Z tohoto grafu lze dobře vyčíst nejvyšší a nejnižší tón, rozsah skladby. Dobře lze identifikovat různé opakující se pravidelnosti apod.



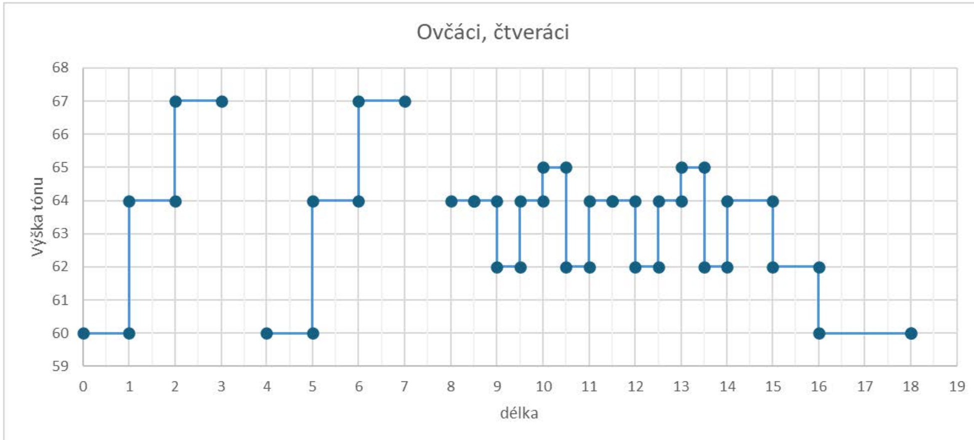
Obrázek 6: Základní bodový graf; zdroj: vlastní zpracování

3. **Schodovitý graf**. Protože tón není pouhý bod, ale má své trvání, v grafu jej reprezentujeme jako vodorovnou úsečku. Tento graf (Obrázek 8) není moc těžké vytvořit. Je zapotřebí tabulku duplikovat a u každého tónu mít označen čas jeho začátku a konce (Obrázek 7).

   V tomto grafu by nás mohly rušit svislé skoky mezi tóny. Nicméně schodovitý tvar Melodického grafu už více odpovídá realitě hudby – s využitím délky znějícího tónu.

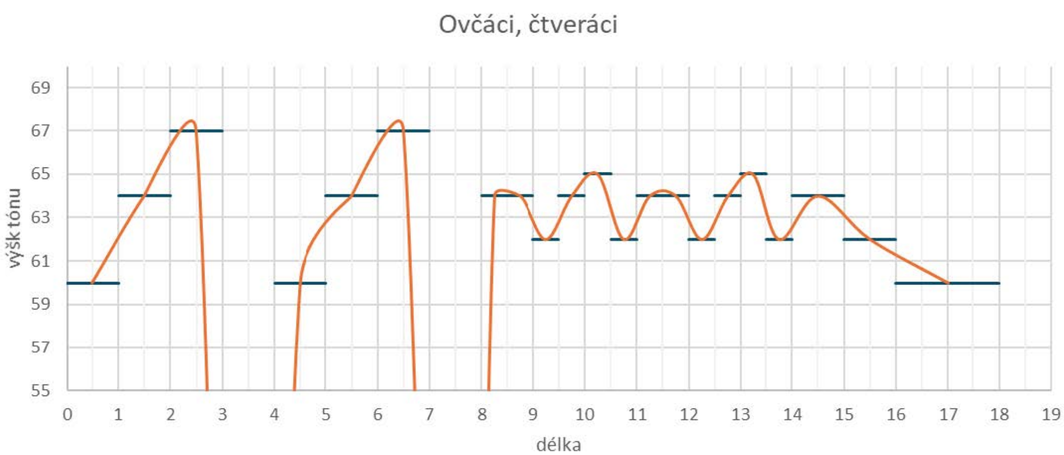
výška tónu	čas	poznámka
60	0	*začátek tónu*
60	1	*konec tónu*
64	1	*začátek tónu*
64	2	*konec tónu*
67	2	*začátek tónu*
67	3	*konec tónu*
	3	*začátek tónu*
	4	*konec tónu*
60	4	*začátek tónu*
60	5	*konec tónu*
64	5	*začátek tónu*
64	6	*konec tónu*

Obrázek 7: Část zdrojové tabulky pro schodovitý graf; zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 8: Schodovitý graf; zdroj: vlastní zpracování

4. **Melodický graf**. Aby v Melodickém grafu nebyly svislé čáry a více odpovídal „ručnímu" nakreslení a vnímání hudby, je potřeba do základní tabulky pro graf přidat i „pauzy", které zruší propojení jednotlivých tónů. Pro další interpretaci do Melodického grafu přidáme i vizuální pomůcku ve formě spojité čáry (Obrázek 9).



Obrázek 9: Melodický graf písně Ovčáci, čtveráci vytvořený v MS Excel; zdroj: vlastní zpracování

2.1.4 Interpretace grafu

Výsledný Pitch-Time Plot vizualizuje hudební strukturu způsobem, který je pro matematickou analýzu mnohem čitelnější než klasický notopis:

- **Vodorovné úsečky:** Jejich délka přímo úměrně odpovídá rytmické hodnotě. Studenti tak vizuálně vnímají poměry mezi zlomky (např. dvě osminové úsečky vedle jedné čtvrťové).

- **Vertikální rozestupy:** Vzdálenost mezi úsečkami na ose y představuje hudební interval. Rozdíl o 12 jednotek značí oktávu, rozdíl o 7 jednotek čistou kvintu.

- **Trajektorie melodie**: Spojením středů úseček vzniká lomená čára – graf funkce, u které lze zkoumat její průběh, extrémy (ambitus písně) a periodicitu (opakování motivů).

Tento způsob zápisu umožňuje studentům „vidět“ matematiku v hudbě. Na rozdíl od pětilinkové osnovy, která používá různé klíče a posuvky (křížky, béčka), je Pitch-Time Plot absolutní a jednotný. Geometrické transformace, jako je osová souměrnost (inverze melodie) nebo posunutí (transpozice), se v tomto grafu stávají naprosto zřejmými a snadno proveditelnými operacemi nad datovou sadou v tabulce. Metoda tak mění pasivní poslech v aktivní analytickou činnost, kde je „milimetrový papír“ digitálním polem pro experimentování s matematickými vlastnostmi uměleckého díla.

3 Od funkcí ke statistickým ukazatelům

Jakmile je melodie transformována do číselné tabulky a vizualizována v podobě Melodického grafu (Pitch-Time Plot), přestáváme o ní uvažovat v estetických kategoriích a začínáme ji vnímat jako matematický objekt. Tento přístup umožňuje studentům aplikovat teoretické znalosti na reálných, auditivně ověřitelných datech.

3.1 Melodie jako diskrétní funkce

V matematickém smyslu můžeme na melodii nahlížet jako na diskrétní funkci $f : x \to y$, kde nezávisle proměnná x (čas v dobách) nabývá hodnot z určitého intervalu.

- **Definiční obor D(f):** Představuje časový rozsah skladby (např. 0 až 16 dob). Zkoumáme, zda je funkce v celém oboru definovaná, nebo zda se vyskytují „pomlky“ (prázdné množiny v definičním oboru).

- **Obor hodnot H(f):** Množina všech použitých tónů (MIDI čísel). Rozdíl mezi maximální a minimální hodnotou oboru hodnot definuje tzv. ambitus (tónový rozsah) písně.

- **Vlastnosti funkce:** Sledujeme, zda je „funkce melodie“ v určitých úsecích rostoucí (stoupající melodie), klesající, nebo konstantní (opakování stejného tónu).

3.2 Statistické zpracování dat

Tabulka MIDI hodnot je ideálním materiálem pro základní statistickou analýzu.

3.2.1 Míry polohy

Tabulka MIDI hodnot umožňuje studentům pochopit rozdíly mezi jednotlivými charakteristikami polohy:

- **Modus:** Nejčastěji se vyskytující tón v melodii. V lidových písních je modus často shodný s tonálním centrem (tónikou), což ukazuje na strukturální ukotvenost skladby.

- **Medián:** Prostřední hodnota v tónové řadě seřazené podle velikosti. Pomáhá určit „střed“ melodie, který není ovlivněn extrémními výkřiky nebo hlubokými tóny (odlehlými hodnotami).

- **Aritmetický průměr:** Průměrná výška tónu. V Melodickém grafu jej lze interpretovat jako vodorovnou přímku, kolem které melodie osciluje.

- **Vážený průměr:** V hudbě má zásadní význam, protože tóny mají různou délku. Vážený průměr bere v úvahu trvání tónu – čtvrťová nota má dvojnásobnou váhu oproti osminové. Tento ukazatel dává mnohem přesnější informaci o „těžišti“ melodie.

3.2.2 Míry variability

Kromě středních hodnot můžeme zkoumat i to, jak moc je melodie „rozlétaná“:

- **Variační rozpětí a směrodatná odchylka:** Tyto hodnoty kvantifikují, jak moc se melodie vzdaluje od svého průměru. Skladby s nízkou odchylkou působí klidně (např. ukolébavky), zatímco vysoká odchylka značí dramatické skoky a dynamiku.

- **Analýza skoků (Diference):** Sledujeme rozdíly mezi sousedními hodnotami výšek tónů. V tabulce tak identifikujeme intervaly (sekundy, tercie, kvinty). Histogram těchto rozdílů ukazuje, jaké intervaly autor preferuje.

3.3 Identifikace vzorů a symetrie (Kombinatorika)

Matematický pohled na tabulku usnadňuje hledání repetitivních struktur. Pomocí logických funkcí v Excelu, případně „pouhým” pozorováním Melodického grafu, lze automaticky vyhledávat shodné sekvence čísel (motivy). Tím se otevírá cesta k pochopení geometrických transformací:

- **Translace (Posunutí):** Přičtení konstanty k ke všem hodnotám y (transpozice). Transpozice je posun celé skladby nebo melodie o určitý interval výše nebo níže. Děláme to nejčastěji proto, aby se píseň lépe odpovídala nástrojovému/hlasovému rozsahu nebo aby ji mohl zahrát nástroj s jiným laděním. Všechny tóny se posunou o stejný počet půltónů. Píseň zní úplně stejně, má stejnou strukturu, jen je v jiné tónině.

- **Osová souměrnost (Inverze):** Proces, kdy melodii „překlopíme“ podle vodorovné osy (podobně jako když se kopec zrcadlí na hladině jezera). V klasické kompozici (např. u J. S. Bacha nebo později v dodekafonii) znamená inverze to, že všechny intervaly v melodii otočíte opačným směrem. Tento princip využívali mistři k budování složitých struktur (fuga, kánon)

Aplikace těchto matematických nástrojů na Melodický graf mění intuitivní vnímání hudby v exaktní analýzu, která je základem pro moderní obory, jako je digitální zpracování signálu nebo algoritmická kompozice.

4 Možnosti využití Melodického grafu v praxi

Využití počítačem generovaného Melodického grafu (Pitch-Time Plot) přesahuje rámec pouhé vizualizace hudby. Díky tomu, že tato metoda převádí estetický vjem na exaktní data, otevírá nové možnosti v několika klíčových oblastech.

4.1 Moderní didaktika matematiky a STEAM vzdělávání

Hlavním přínosem je názornost a hmatatelnost abstraktních matematických pojmů. Metoda umožňuje transformovat matematiku z „černobílých vzorců“ do barevného světa zvukových struktur.

- **Mezipředmětové vztahy:** Je to ideální nástroj pro projektové vyučování propojující matematiku, informatiku (práce v tabulkovém procesoru) a hudební výchovu.
- **Geometrie v praxi:** Žáci mohou přímo v datech tabulky „vypočítat“ transpozici jako vertikální posunutí (translaci) nebo inverzi melodie jako osovou souměrnost. Výsledek své matematické operace si mohou okamžitě ověřit sluchem.
- **Zlomky a poměry:** Na časové ose x žáci vizuálně i početně pracují s délkami tónů jako se zlomky (např. dvě osminové úsečky tvoří délku jedné čtvrťové).

4.2 Etnomuzikologie a strukturní analýza lidových písní

V návaznosti na práci Lubomíra Tyllnera a Zdeňka Vejvody představuje Melodický graf mocný nástroj pro analýzu folklórního materiálu. [8], [9]

- **Typologie a klasifikace:** Pomocí grafů lze vizuálně porovnávat stovky písní a hledat společné strukturní znaky, jako je typický ambitus (tónový rozsah) nebo specifické intervalové skoky typické pro určité regiony.
- **Identifikace autorského stylu:** Matematická analýza dat z Melodického grafu dokáže odhalit skryté vzorce v kompozici, které jsou typické pro konkrétní historické období nebo tvůrčí styl.

4.3 Inkluzivní vzdělávání a speciální pedagogika

Multimodální povaha Melodického grafu (propojení sluchu a zraku) nabízí unikátní uplatnění v inkluzivní výuce:

- **Vizualizace pro sluchově znevýhodněné:** Studenti, kteří nemohou plně vnímat melodii sluchem, mohou její strukturu, rytmickou pravidelnost a gradaci „číst" očima z grafu.
- **Podpora při dyskalkulii:** Práce s tóny, které mají jasnou číselnou hodnotu (MIDI) a vizuální délku, pomáhá budovat lepší představu o čísle, řadě a poměrech u žáků se specifickými poruchami učení.

4.4 Příprava na práci v digitálních hudebních studiích (DAW)

Metoda připravuje studenty na práci s profesionálním softwarem pro produkci hudby (např. Cubase, Ableton, FL Studio). Melodický graf je v podstatě zjednodušenou, matematicky popsanou verzí tzv. Piano Roll editoru. Student, který pochopí matematiku v pozadí tohoto grafu, se mnohem rychleji zorientuje v moderních technologiích pro tvorbu a úpravu hudby.

V digitálním studiu DAW se matematika projevuje na každém kroku. software automaticky „přicvakne" nepřesně zahraný tón k nejbližší matematické mřížce (např. na osminy). Je to v podstatě zaokrouhlování hodnot na ose x. Skladatel/zvukař může kreslit křivky (grafy funkcí), které ovládají hlasitost nebo filtry v reálném čase. Uživatel zjistí, že profesionální producenti v Los Angeles nebo Londýně nekoukají jen do not, ale pracují s úplně stejným grafem, jaký si on vytvořil v hodině matematiky. Práce v DAW vyžaduje stejnou logiku jako práce s daty – pochopení vrstev (stop), sekvencí a matematických vztahů mezi nimi. [4]

4.5 Umělecká vizualizace a dynamická grafika

Jak ukazují moderní trendy v audiovizuálním umění (např. populární vizualizace typu „Music Animation Machine"), Melodický graf slouží i jako estetický prvek. Dynamické zobrazení padajících tónů do souřadnicového systému pomáhá laickému publiku lépe pochopit strukturu složitých polyfonních děl, například skladeb J. S. Bacha, kde je matematická preciznost a symetrie dominantním prvkem.

Lze tedy říci, že využití Melodického grafu vrací matematiku do pozice, kterou měla v antickém quadriviu – jako vědu o číslech, která jsou v hudbě slyšitelná a v geometrii viditelná. Tato metoda tak nenabízí jen novou techniku zápisu, ale především nový způsob myšlení o struktuře informací kolem nás.

4.5.1 Music Animation Machine

V kontextu moderních technologií nelze opomenout průkopnickou práci amerického skladatele a programátora Stephena Malinowského. Jeho projekt Music Animation Machine, který vyvíjí již od 70. let, představuje jeden z nejpropracovanějších způsobů, jak učinit matematickou a geometrickou strukturu hudby viditelnou. [10]

Malinowski nahrazuje tradiční notaci dynamickým grafem, který je v principu shodný s metodou Pitch-Time Plot. Tóny jsou v jeho vizualizacích reprezentovány barevnými geometrickými tvary (obvykle obdélníky nebo kruhy), které se pohybují v souřadnicovém systému. Výška tónu odpovídá vertikální poloze a časová osa horizontálnímu pohybu. V jeho animacích skladeb lze v reálném čase sledovat matematickou dokonalost fug – divák vidí, jak se motivy zrcadlí, převracejí a proplétají, což by při pouhém poslechu mohl laik postřehnout jen stěží. Malinowski často používá barvy k vyjádření harmonických funkcí nebo vztahů v kvintovém kruhu. Tím do grafu přidává další rozměr dat, který pomáhá pochopit logiku hudební teorie. Tato vizualizace „odstraňuje“ bariéru složitého čtení not a umožňuje studentům přímo sledovat trajektorie melodií, hustotu dat (texturu) a repetitivní vzorce. [12]

Práce Stephena Malinowského je jasným důkazem toho, že transformace hudby do grafické podoby není jen technickou pomůckou, ale svébytným druhem umění, které odhaluje skrytou matematickou krásu velkých děl.

5 Závěr – Hudba jako slyšitelná matematika

Předložená metoda „Melodie na milimetrovém papíře“ ukazuje, že hranice mezi exaktní vědou a uměleckou tvorbou je mnohem prostupnější, než se na první pohled zdá. Transformace hudby do podoby Melodického grafu není jen technickým cvičením, ale hlubokou sondou do logické struktury lidského tvoření.

Z pedagogického hlediska přináší tento přístup do školních lavic prvek objevování. Matematika se zde přestává jevit jako soubor izolovaných pouček a stává se klíčem k dešifrování krásy. Pro žáky a studenty, kteří hledají v číslech smysl, představuje analýza písní skrze statistiku, funkce a geometrii fascinující zpestření. Metoda nabízí možnost „nakreslit“ si písničku a následně ji matematicky upravit (např. zrcadlit) vytváří prostor pro kreativní experiment. Zapojení zraku, sluchu i logického uvažování současně vede k hlubšímu ukotvení znalostí (Multimodalitu). Práce s MIDI daty v MS Excel připravuje studenty na realitu digitálního světa, kde jsou data a jejich vizualizace základním komunikačním prostředkem.

Při pohledu na Melodický graf zjistíme, že ti největší skladatelé historie byli v podstatě geniálními matematiky, kteří pracovali s tóny jako s proměnnými v dokonale vyvážených rovnicích.

Johanna Sebastiana Bacha fugy a kánony jsou vrcholem kombinatoriky a symetrie. Bachova práce s tématem, které převrací (inverze), posouvá (translace) nebo zpomaluje (augmentace), je čistou aplikací geometrických transformací.

Hudba Wolfganga Amadea Mozarta vykazuje neuvěřitelnou strukturální rovnováhu a proporčnost, která často odpovídá principům zlatého řezu. Jeho díla jsou považována za estetický vrchol řádu, proporcí a logiky.

V díle Ludwiga van Beethovena můžeme sledovat práci s krátkým motivem (datovým fragmentem), který matematicky rozvíjí a transformuje do obrovských symfonických celků.

Z pohledu statistiky je fascinující, jak vysoké procento celé páté symfonie (Osudová) je vybudováno z pouhých čtyř tónů. Je to hudební ekvivalent fraktálu, kde se malý vzorec opakuje v různých měřítcích a vytváří komplexní celek.

Petr Iljič Čajkovskij – Mistr melodické trajektorie, jehož linie v grafu vykazují fascinující statistickou pravidelnost a emocionální gradaci podloženou pevnou strukturou.

Arnold Schoenberg, zakladatel dodekafonie, který hudbu zcela osvobodil od tonality a nahradil ji přísným matematickým systémem řad (matice tónů), kde každý tón musí mít své přesně určené místo. Schoenberg je často srovnáván s Albertem Einsteinem nejen z pohledu významu práce ve svých oborech, ale i z pohledu osobního života. [2]

Využití počítačem generovaného Melodického grafu je pozvánkou k interdisciplinárnímu dialogu. Ukazuje nám, že v každém akordu se skrývá poměr a v každé melodii matematická funkce. Tento přístup nejenže zvyšuje motivaci studentů, ale vrací nás k antickému ideálu jednoty vzdělání. Hudba je v tomto pojetí matematikou, která promlouvá k našim citům, a matematika je hudbou, která promlouvá k našemu rozumu. Metoda Melodického grafu je cestou, jak oba tyto světy spojit na jednom listu digitálního milimetrového papíře.

Autorská poznámka: Při přípravě příspěvku bylo využito nástrojů umělé inteligence (model Gemini a model ChatGPT) za účelem stylistické úpravy, strukturování textu a překladu abstraktu. Autoři nesou plnou odpovědnost za věcnou správnost a finální podobu obsahu.

Literatura

[1] FLOOD, Raymond; WILSON, Robin J. a FAUVEL, John (ed.), c2003. *Music and mathematics: from Pythagoras to fractals.* Oxford: Oxford University Press. ISBN 01-985-1187-6.

[2] KRUŽÍKOVÁ, Lenka a LUSKA, Jiří, 2022. *Proměny hudební pedagogiky ve výzkumu a aplikacích.* Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého. ISBN 978-80-244-6279-0.

[3] MAOR, Eli, 2020. *Hudba v číslech, čísla v hudbě: od Pythagora k Schoenbergovi.* Aliter (Argo: Dokořán): Dokořán): Dokořán). Praha: Argo. ISBN 978-80-257-2982-3.

[4] MAUCH, Matthias; CANNAM, Chris; BITTNER, Rachel; FAZEKAS, György; SALAMON, Justin et al., 2018. *Computer-Aided Melody Note Transcription Using The Tony Software: Accuracy And Efficiency.*

[5] SHAH, Saloni, 2010. *An Exploration of the Relationship between Mathematics and Music.* MIMS EPrint: 2010.103. ISBN 749-9097.

[6] SYROVÝ, Václav, 2013. *Hudební akustika. 3.*, dopl. vyd. Akustická knihovna Zvukového studia Hudební fakulty AMU. V Praze: Akademie múzických umění. ISBN 978-80-7331-297-8.

[7] TANG, Bing, 2001. *Music Making and Musical Instrument Digital Interface: An Investigation of MIDI and Its Musical Applications.*

[8] TYLLNER, Lubomír a VEJVODA, Zdeněk, 2019. *Česká lidová píseň: historie, analýza, typologie*. [Praha]: Bärenreiter Praha. ISBN 978-80-86385-39-6.

[9] TYLLNER, Lubomír, 1989. *Úvod do studia lidové písně*. České Budějovice: Pedagogická fakulta v Českých Budějovicích. ISBN 80-704-0006-4.

[10] *Computing in musicology*, c1989-. Menlo Park, CA: Center for Computer Assisted Research in the Humanities. ISBN 1057-9478.

[11] MALINOWSKI, Stephen. *smalin - Music Animation Machine* [online]. YouTube, 2006– [cit. 2025-10-22]. Dostupné z: https://www.youtube.com/@smalin

[12] MALINOXSKI, Stephen. *Music Animation Machine*. Online. Musanim.com. Dostupné z: https://musanim.com/. [cit. 2025-11-08].

[13] *MatematikaJeHudba*, 2022. Online. OpenTechLab. Dostupné z: https://www.opentechlab.cz/downloads/. [cit. 2022-07-21].

[14] SCHOOL OF PHYSICS, 2005. *Note names, MIDI numbers and frequencies*. Online. Dostupné z: https://www.phys.unsw.edu.au/jw/notes.html. [cit. 2025-11-08].

[15] UNIVERSITY OF SHEFFIELD, 2023. *Global Notation*. Online. Dostupné z: https://www.globalnotation.org.uk/using-sound-analysis-software

Stanislava Dvořáková
Katedra matematiky
Vysoká škola polytechnická Jihlava
Tolstého 16, 586 01 Jihlava
e-mail: Stanislava.Dvorakova@vspj.cz

Vítězslav Kružík
Gymnázium, Olomouc, Čajkovského 9
Čajkovského 9, 77900 Olomouc
e-mail: vita@kruzik.net

DYNAMICKÁ GEOMETRIE ANEB GEOGEBRA V AKCI

Tomáš Fabián

Gymnázium, Dvůr Králové nad Labem; KMDM PedF UK

Abstrakt: GeoGebra a její dynamické prostředí umožňuje ve škole provádět konstrukce, které by jinak byly proveditelné jen obtížně nebo vůbec. Díky ní je geometrie pro žáky názornější a přístupnější. Je rovněž vhodným nástrojem i pro badatelsky orientovanou výuku. V příspěvku představím vybrané úlohy a modely, které využívám ve své výuce na víceletém gymnáziu: dynamické objevování množin bodů daných vlastností, zkoumání cyklických křivek, konstrukce čtyřrozměrných a fraktálních objektů.

Klíčová slova: dynamická geometrie, GeoGebra, prostorová představivost, 4D geometrie, Apolloniovy úlohy

Dynamic Geometry, or GeoGebra in Action

Abstract: GeoGebra and its dynamic environment make it possible to carry out constructions in school that would otherwise be difficult or impossible to perform. It makes geometry more visual and accessible for students and is also a suitable tool for inquiry-based learning. In this paper, I present selected tasks and models that I use in my teaching at a multi-year grammar school: dynamic exploration of loci, investigation of cyclic curves, and constructions of four-dimensional and fractal objects.

Key words: dynamic geometry, GeoGebra, spatial ability, 4D geometry, Apollonian problems

Úvod

GeoGebra přinesla do školní geometrie možnost pracovat s konstrukcemi, které by v běžných podmínkách byly pouze obtížně realizovatelné nebo zcela mimo dosah tradičních prostředků. Díky dynamickému prostředí mohou žáci sledovat, jak se jednotlivé objekty mění v čase, a postupně si vytvářet přesnější představu o jejich vlastnostech a vzájemných vztazích.

Ukazuje se, že právě tato možnost pozorovat vznikající situace krok za krokem podporuje porozumění, které by se ve statickém prostředí budovalo jen obtížně. Dynamická konstrukce zde neplní roli ilustrace hotového výsledku, ale stává se nástrojem, který žákům umožňuje objevovat, ověřovat a zpřesňovat vlastní geometrické úvahy.

V následujících kapitolách se podíváme na několik oblastí, které dobře ukazují, jak lze dynamické prostředí ve výuce využít. Nejprve se budeme věnovat množinám bodů daných vlastností a jejich vztahu k Apolloniovým úlohám. Ukážeme si, že dynamická konstrukce umožňuje žákům postupně odhalovat tvar hledané množiny a formulovat vlastní závěry. Poté se krátce zastavíme u spirografu a cyklických křivek, jejichž konstrukce je v GeoGebře překvapivě snadná a nabízí řadu příležitostí k experimentování. Třetí část je věnována modelu čtyřrozměrné geometrie, v němž časová souřadnice nahrazuje skutečný čtvrtý rozměr a umožňuje vizualizovat jinak obtížně představitelné situace. V závěrečné kapitole se zaměříme na konstrukce fraktálů a na to, jak lze jejich tvorbu propojit s geometrickými úvahami i s badatelským přístupem žáků.

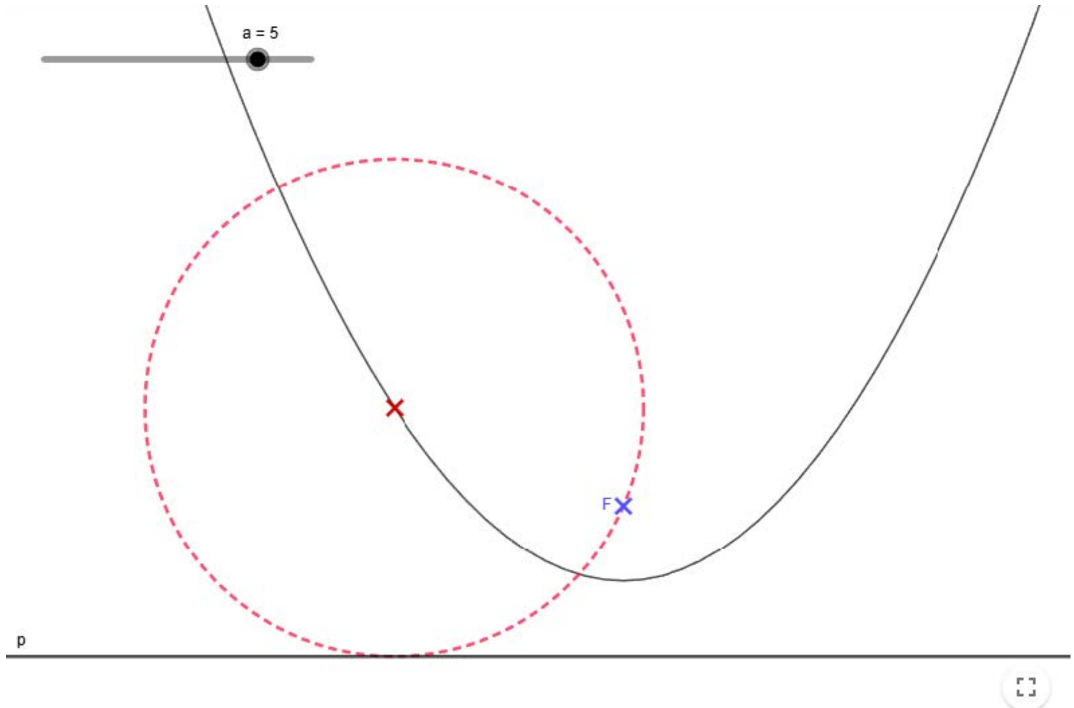
1 Množiny bodů daných vlastností

Množiny bodů daných vlastností představují jednoduchý, ale velmi účinný způsob, jak žákům umožnit objevovat základní geometrické vztahy vlastními silami. V dynamickém prostředí GeoGebry mohou žáci sledovat, jak se mění poloha bodu splňující danou podmínku nebo podmínky, a postupně odhalovat, jak vypadá množina všech takových bodů. Obtížnost zadání pro žáky můžeme snadno upravovat podle komplikovanosti množiny, kterou necháme žáky objevovat.

Jako příklad může posloužit úloha, ve které mají žáci zkoumat středy všech kružnic dotýkajících se zadané přímky a zároveň procházejících zadaným bodem. Pokud bychom po nich chtěli určit tvar této množiny přímo, většinou se ukáže, že bez vizuální opory nedokážou odhadnout ani její hrubou podobu. Necháme proto žáky tuto množinu objevovat v dynamickém prostředí GeoGebry.

Žáci obvykle začínají tím, že se snaží najít alespoň jedno konkrétní řešení. Většina z nich si rychle povšimne, že existuje zvláštní poloha středu, který leží na kolmici k zadané přímce vedené z daného bodu. Tato situace je pro ně dobře představitelná a často je prvním případem, který dokážou bez potíží narýsovat. V další fázi pracují s pevně zvoleným poloměrem: pro danou hodnotu hledají kružnici, která splňuje obě podmínky, a postupně zjišťují, že možných středů není jen jeden. V dalším kroku zavádíme do konstrukce posuvník představující poloměr. Tím umožníme žákům měnit jeho hodnotu plynule a získat větší množství jednotlivých případů, než by bylo možné vytvořit ručně.

Při průběžné změně poloměru mohou žáci sledovat, jak se polohy středů mění, a pomocí nástroje „Stopa zapnuta“ zachytit tuto proměnu graficky. Jakmile je stopa dostatečně hustá, nahradíme ji nástrojem „Množina bodů“, aby byla výsledná křivka jednoznačně patrná. V této chvíli si žáci zpravidla uvědomí, že body leží na hladké křivce, která svým tvarem připomíná parabolu, a začnou formulovat první hypotézu o její povaze. Následuje společná úvaha, proč by tomu tak mělo být: každý ze získaných středů má stejnou vzdálenost od zadané přímky i od zadaného bodu, což přesně odpovídá množinové definici paraboly. Tím žáci nejen rozpoznají tvar vzniklé množiny, ale zároveň pochopí, z jaké podmínky vychází, jak ji mohou sestrojit a jak ji mohou využít při řešení dalších úloh.



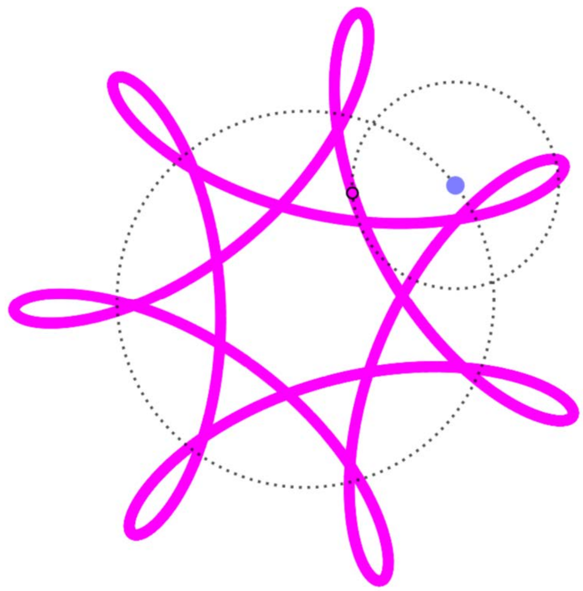
Obrázek 1: Množina středů kružnic dotýkajících se zadané přímky a procházející zadaným bodem

Když si žáci tímto způsobem vyzkouší zkoumání několika různých dvojic objektů, začnou vnímat, že množiny bodů daných vlastností nevznikají nahodile, ale že pro každé zadání existuje určitá charakteristická křivka nebo křivky, které lze v dynamickém prostředí poměrně snadno objevit. Získané zkušenosti pak tvoří přirozený základ i pro práci s Apolloniovými úlohami, které lze i touto metodou, byť ne vždy eukleidovsky, řešit.

2 Spirograf

Spirograf je jednoduchá mechanická pomůcka, která vytváří křivky odvalováním jednoho ozubeného kolečka po druhém. Tím vznikají křivky – cykloidy, které připomínají květy rostlin. Žáci většinou tuto hračku znají nebo dokonce mají i doma. Stejný proces je možné velmi snadno simulovat v GeoGebře: Sestrojíme dvě kružnice s pevným poloměrem, přičemž střed jedné z nich necháme obíhat po té druhé. Na obíhající kružnici umístíme bod, který necháme po této kružnici rovněž obíhat. Postupná poloha tohoto bodu potom vykresluje cykloidy. Vlastnosti vykreslovaných křivek závisí na poměru počtu zubů u ozubených kol spirografu, respektive v simulaci v GeoGebře na poměru rychlostí obíhajícího středu kružnice a obíhajícího bodu. Žáci si mohou nastavovat různé rychlosti oběhu obou bodů, a tak zkoumat vlastnosti vznikajících křivek.

Postupně si všímají, po kolika obězích se počáteční a koncový bod křivky setkají a vytvoří uzavřenou smyčku, a také toho, kolik „ok“ či výběžků křivka má. Při konstrukci si žáci obvykle zapisují své výsledky do jednoduché tabulky, ve které se začnou objevovat různé pravidelnosti. Na jejich základě formulují první hypotézy a ihned je ověřují tvorbou dalších křivek. Některé vztahy jsou pro žáky poměrně snadno vysledovatelné, jiné jsou pro objevení obtížnější. Postupným cílem je dopracovat se k obecnému pravidlu, které umožňuje snadným výpočtem určit obě vlastnosti křivky předem z nastavení rychlostí obou bodů. K tomu se zpravidla vracíme a formulujeme ho až při společné závěrečné diskusi. Nicméně řadu dílčích zákonitostí dokáží žáci odhalit sami během vlastního zkoumání.



Obrázek 2: Cyklická křivka vytvořená simulací spirografu v GeoGebře

Zkušenost se spirografem tak žákům ukazuje, že i zdánlivě složité křivky mohou vznikat z jednoduchého geometrického principu a že jejich vlastnosti lze postupně odhalovat systematickým zkoumáním. GeoGebra zde funguje jako prostředí, které umožňuje rychle vytvářet nové případy, okamžitě je porovnávat a ověřovat vzniklé hypotézy. Při práci se navíc přirozeně propojuje geometrická představa s algebraickým popisem a žáci získávají zkušenost s analytickým pozorováním pravidelností, které by při statickém náčrtu snadno unikly.

3 Čtyřrozměrná geometrie

Čtyřrozměrný prostor je pro nás obtížně představitelný, a to i v situacích, které lze algebraicky popsat poměrně snadno. Typickým příkladem je tvrzení, že dvě roviny ve čtyřrozměrném prostoru se mohou protínat v jediném bodě. Z analytického pohledu na tom není nic zvláštního, ale syntetická představa takové situace žákům obvykle chybí. V dynamickém prostředí GeoGebry však můžeme vytvořit model, který umožňuje zachovat geometrickou intuici i ve čtyřech rozměrech. Stačí přidat do konstrukce čas jako další souřadnici a využít toho, že pohyb objektu v čase lze chápat jako jeho „existenci“ ve čtyřrozměrném prostředí.

V tomto modelu už jednotlivé objekty nepředstavují své běžné trojrozměrné protějšky, ale jejich čtyřrozměrné obdoby. Bod, který v GeoGebře narýsujeme (nepohybující se nebo pohybující se rovnoměrným přímočarým pohybem), odpovídá v tomto modelu ve skutečnosti přímce. Má totiž časové trvání a tím i časový rozměr. Pokud chceme narýsovat skutečně bod, musíme i jeho časové trvání omezit na jeden jediný časový okamžik. Obdobně přímka trvající v čase představuje rovinu a rovina představuje třírozměrný prostor. Časová souřadnice je řízena posuvníkem, a tak lze model zobrazovat krok za krokem. I když se jedná pouze o aproximaci skutečného čtyřrozměrného prostředí, ukazuje se, že pro vizualizaci řady situací je tento přístup překvapivě účinný.

Využití modelu si můžeme ukázat na situaci, která byla původní motivací pro jeho vytvoření. Chceme vizualizovat průnik dvou rovin ve čtyřrozměrném prostoru, tedy úlohu, která se v běžné trojrozměrné představě nedá přímo zobrazit. V modelu nahradíme každou rovinu přímkou, která se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem. Pokud zvolíme pro obě přímky různé směry a různé rychlosti, vzniknou dvě mimoběžné roviny ve čtyřrozměrném prostoru. Jejich průsečík je reprezentován jediným časovým okamžikem, ve kterém se obě přímky protnou v jednom bodě. Tento okamžik lze v průběhu animace snadno zachytit a žáci tak mohou pozorovat jev, který je v analytickém popisu zřejmý, ale synteticky obtížně představitelný. V dynamickém zobrazení je přitom průběh obou přímek přehledný a žáci mohou zkoumat, jak volba parametrů pohybu ovlivňuje polohu a existenci společného bodu.

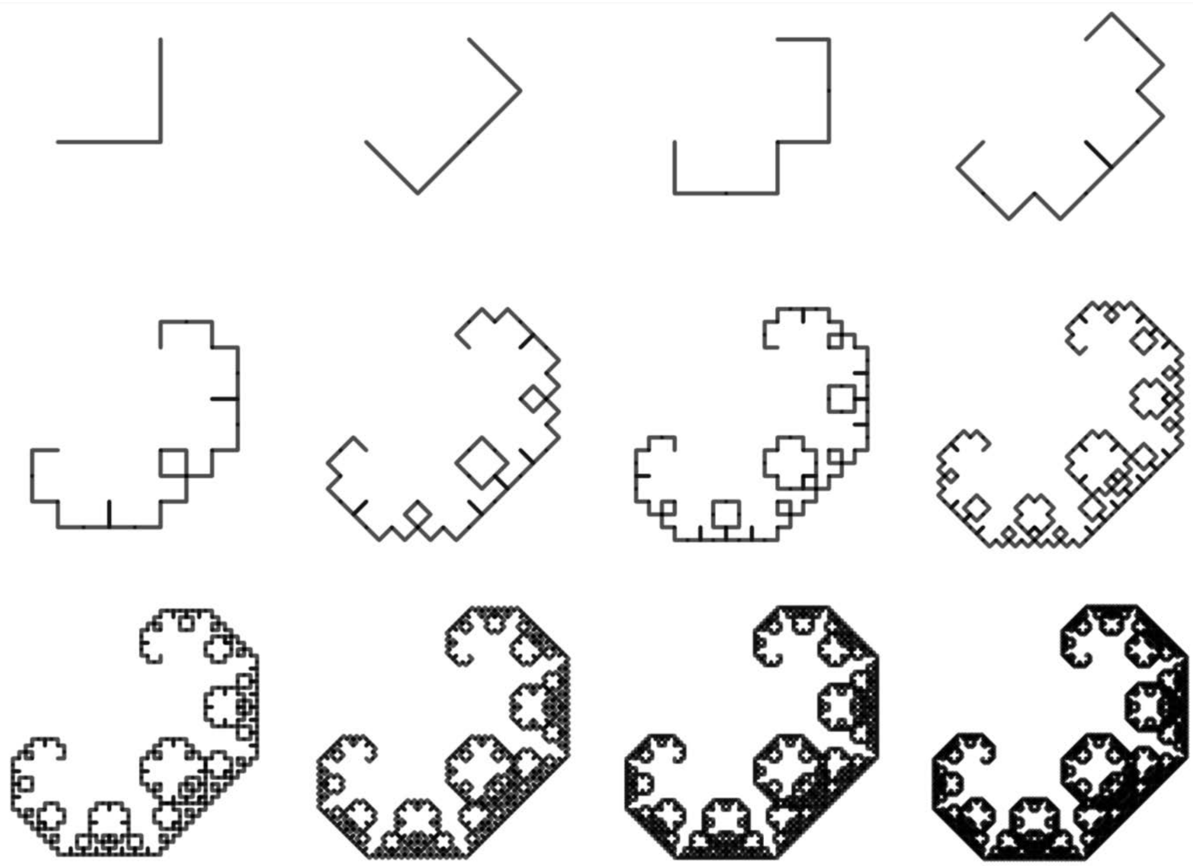
Zkušenost s tímto modelem ukazuje, že i poměrně jednoduchá dynamická konstrukce může žákům výrazně pomoci při vytváření představy o situacích, které by jinak zůstaly pouze v rovině algebraického výpočtu. Při práci s posuvníkem si žáci uvědomují význam jednotlivých parametrů, lépe chápou funkci časové souřadnice a dokážou propojit průběh animace s odpovídajícím analytickým popisem. Model zároveň umožňuje zkoumat i další úlohy a vzájemné polohy objektů ve čtyřrozměrném prostoru, nejen průniky rovin. I když se jedná pouze o přiblížení skutečného čtyřrozměrného prostoru, pro potřeby školní geometrie se ukazuje jako užitečný a pro žáky dobře srozumitelný.

4 Konstrukce fraktálů

Fraktály představují příklady geometrických objektů, které vznikají z velmi jednoduchého pravidla, ale při opakování vedou ke stále složitějším strukturám. Pro žáky jsou atraktivní i proto, že mohou sledovat, jak se obrazec vyvíjí krok za krokem a jak se změna vstupního pravidla projeví na výsledné podobě fraktálu. V dynamickém prostředí GeoGebry lze takové konstrukce realizovat poměrně snadno, bez nutnosti programování nebo práce s pokročilými funkcemi. Existuje řada metod vytváření fraktálů, které lze s žáky využít. Zde si ukážeme dvě z nich: fraktály vznikající odebíráním částí čtverce a konstrukci fraktálních křivek pomocí iniciátoru a generátoru.

První skupina fraktálů vychází z toho, že výchozí čtverec rozdělíme na několik menších částí a některé z nich odstraníme. Stejný postup následně opakujeme se všemi ponechanými čtverci. V GeoGebře si žáci nejprve vytvoří základní rozdělení čtverce na devět stejných dílů a určí, které části se budou v první iteraci odstraňovat. Postupné iterace lze tvořit ručně, efektivnější je však využití vlastních nástrojů, které GeoGebra umožňuje vytvářet. Tím lze rychle dosáhnout vyšších iterací fraktálů, jako je Sierpińského koberec nebo méně známé fraktály vznikající jinou volbou odebíraných částí. Žáci si mohou všimnout, jak rychle narůstá počet prvků konstrukce, jak se mění plošný obsah a kdy vznikne spojitý či nespojitý obraz.

Druhý typ konstrukce využívá iniciátor (úsečku) a generátor (lomenou čáru), který iniciátor v každé iteraci nahrazuje. Žáci si nejprve sami navrhnou jednoduchý generátor a pomocí nástrojů GeoGebry jej aplikují na iniciační úsečku. Každá další iterace vzniká nahrazením všech úseček předchozího kroku zvoleným generátorem. Žáci tak mohou vytvářet různé fraktální křivky – například Kochovu křivku, Lévyho C-křivku nebo dračí křivku – a sledovat, jak se liší tvar výsledného útvaru při změně generátoru nebo orientace lomených úseků. Postupně si všímají soběpodobnosti vznikajících útvarů i toho, že u některých křivek je tato soběpodobnost pouze částečná nebo není na první pohled zřejmá.



Obrázek 3: Postupné iterace Lévyho C-křívky

Zkušenost s konstrukcí fraktálů ukazuje, že jednoduché pravidlo může vést k překvapivě složitému výsledku a že proces postupné stavby obrazu je pro žáky atraktivní a snadno uchopitelný. Práce v GeoGebře umožňuje rychle vytvářet další iterace, porovnávat různé varianty konstrukcí a ověřovat hypotézy, které žáci při práci formulují. Fraktály tak představují přirozené propojení geometrie, algoritmického myšlení a tvořivosti a dobře doplňují další témata dynamické geometrie, o nichž pojednává tento text.

5 Závěr

Představené příklady ilustrují možnosti, které dynamické prostředí GeoGebry nabízí při práci s různými oblastmi geometrie. Ve všech uvedených tématech se ukazuje, že interaktivní konstrukce usnadňují analýzu geometrických vztahů, umožňují systematické ověřování hypotéz a podporují přesnější budování prostorové představy. GeoGebra tím přispívá k propojení algebraického a geometrického popisu a poskytuje rámec, ve kterém lze i složitější situace – například vznik cyklických křivek, model čtyřrozměrného prostoru nebo konstrukci fraktálních objektů – zpracovat přehledným a didakticky využitelným způsobem. Dynamická geometrie se tak jeví jako vhodná součást současné výuky matematiky a jako nástroj, který rozšiřuje možnosti práce s geometrickými pojmy na základních i středních školách.

Literatura

[1] Alabdulaziz, M. S., Aldossary, S. M., Alyahya, S. A., Althubiti, H. M.: The effectiveness of the GeoGebra Programme in the development of academic achievement and survival of the learning impact of mathematics among secondary stage students. *Education and Information Technologies, 26*, 2685–2713, 2021.

[2] Budai, L.: A possible general approach of the Apollonius problem with the help of GeoGebra. *Annales Mathematicae et Informaticae, 40*, 163–173, 2012.

[3] Choate, J., Devaney, R. L., Foster, A.: *Fractals: A Tool Kit of Dynamics Activities*. Key Curriculum Press, 1999.

[4] Cibien, M. C., Del Zozzo, A., Rogora, E.: The use of GeoGebra for exploring some constructions of Euclid, Archimedes, and Apollonius. In: *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME13), Alfréd Rényi Institute of Mathematics; ERME, 2023.

[5] Court, N. A.: Historically speaking: The problem of Apollonius. *Mathematics Teacher, 54*(6), 444–452, 1961.

[6] Divišová, B.: Fraktály a jak o nich učit. *Učitel matematiky, 21*(3), 144–158, 2013.

[7] Falconer, K.: *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, 2014.

[8] Ibáñez Torres, R.: *Čtvrtý rozměr: je náš svět jen stínem jiného světa?* Dokořán, Praha, 2017.

[9] Jones, K., Mackrell, K., Stevenson, I.: Designing digital technologies and learning activities for different geometries. In: Hoyles, C., Lagrange, J. (Eds.), M*athematics Education and Technology – Rethinking the Terrain*, Springer, 47–60, 2009.

[10] Lesmoir-Gordon, N., Rood, W., Edney, R.: *Introducing: Fractal Geometry*. Icon Books, 2006.

[11] Linton, O.: *Fraktály: Na hraně chaosu*. Dokořán, Praha, 2021.

[12] Mandelbrot, B. B.: *The Fractal Geometry of Nature*. Echo Point Books & Media, 2022.

[13] Muirhead, R. F.: On the number and nature of the solutions of the Apollonian contact problem. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 14*, 135–147, 1895.

[14] Nocar, D., Dofková, R.: Apollonius' problems in secondary education using ICT. In: *EDULEARN20 Proceedings*, IATED, 3572–3580, 2020.

[15] Peitgen, H., Jürgens, H., Saupe, D.: *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. Springer-Verlag, 1992.

[16] Peitgen, H., Jürgens, H., Saupe, D., Maletsky, E., Perciante, T., Yunker, L.: F*ractals for the Classroom: Strategic Activities Volume One*. Springer-Verlag, 1993.

[17] Sklenáriková, Z.: K metódam riešenia Apolloniovej úlohy. *Matematika v proměnách věků, III*, 45–55, 2004.

Tomáš Fabián
Gymnázium, Dvůr Králové nad Labem;
KMDM PedF UK
Náměstí Odboje 304, Dvůr Králové nad
Labem
e-mail: fabian@gym-dk.cz

PERSPEKTÍVA VÝUČBY MATEMATIKY NA VYSOKÝCH ŠKOLÁCH TECHNICKÉHO SMERU

Jana Gabková, Štefan Guželа, Martin Halaj

Strojnícka fakulta STU v Bratislave

Abstrakt: Neúspešné absolvovanie skúšok z predmetov zameraných na matematiku predstavuje v súčasnosti na vysokých školách technického smeru jeden z hlavných dôvodov predčasného ukončenia bakalárskeho stupňa štúdia, čo potvrdzujú aj štatistiky na Strojníckej fakulte STU. Existuje viacero opatrení na zvrátenie nepriaznivého stavu, ktoré reagujú na súčasný stav. Treba sa zamyslieť, akým spôsobom by sa dalo výučba matematiky inovovať, aby sa prispôsobila súčasným podmienkam a zároveň naplnila požadované ciele vzdelávania.

Klíčová slova: vyučovanie matematiky, technické vzdelávanie, vysoké školy, úbytok študentov

Perspective of teaching mathematics at technical universities

Abstract: Failure to pass exams in mathematics-focused courses is currently one of the main reasons for early completion of bachelor's degree studies at technical universities, which is also confirmed by statistics at the Faculty of Mechanical Engineering of the Slovak University of Technology. Several measures exist to reverse the unfavorable situation that respond to the current situation. It is necessary to think about how mathematics teaching could be innovated to adapt to current conditions and at the same time fulfill the desired educational goals.

Key words: mathematics teaching, engineering education, universities, student drop-out

Úvod

Problematike vyučovania matematiky na technických vysokých školách sa už venovalo mnoho pozornosti a nepochybne ostane táto téma aktuálna aj v budúcnosti. Je to pochopiteľné, matematika predstavuje jeden zo základných pilierov na zvládnutie odborných predmetov. Znalosť matematických postupov, princípov, metód a aplikácia matematického rozmýšľania sa vyžaduje na všetkých stupňoch vysokoškolského vzdelávania. Čoraz viac sa však predstavuje rozpor medzi pripravenosťou absolventov stredných škôl zvládnuť požiadavky vysokoškolskej matematiky na technických vysokých školách, očakávaniami a nárokmi týchto škôl, schopnosťami študentov zvládať študijné požiadavky, ako aj postupmi a prístupmi, ako pomôcť študentom prekonať nástrahy vysokoškolskej matematiky. Hovoríme tu najmä o študentoch bakalárskeho stupňa štúdia, kde sa najviac prejavuje tento rozpor a má za následok veľmi neželaný jav – úbytok (tzv. drop-out) študentov bakalárskeho štúdia. Na príklade Strojníckej fakulty STU v Bratislave sa snažíme poukázať na fakt, že aj keď fakulta prijíma rôzne druhy opatrení na zvýšenie priechodnosti študentov cez matematické predmety v bakalárskom štúdiu, interné možnosti fakulty sú obmedzené a nedokážu úplne kompenzovať potrebu opatrení zo strany štátu, ani dostatočne pružne reagovať na meniace sa externé vplyvy na vedomosti a schopnosti uchádzačov o štúdium na technických vysokých školách.

1 Uchádzači o štúdium na technických vysokých školách

V súčasnosti každý piaty slovenský vysokoškolák študuje v zahraničí. Od roku 2017 sa počet našich vysokoškolákov v zahraničí drží zhruba na rovnakej úrovni okolo 32-tisíc študentov. Približne 70 percent študentov, ktorí odchádzajú do zahraničia, študujú v Česku [1].

Na odchod do zahraničia vplývajú individuálne faktory, medzi ktoré patrí navštevovaná stredná škola aj výsledky v externej časti maturitnej skúšky. Študovať do zahraničia najviac odchádzajú absolventi tzv. výberových škôl, ako sa často označujú, teda osemročných gymnázií a bilingválnych gymnázií.

Patria sem aj štandardné socioekonomické dôvody, medzi ktoré patrí vzdelanie rodičov a príjem domácností. Pravdepodobnosť štúdia slovenských maturantov na vysokej škole v zahraničí prudko narastá od určitej hranice rodinného príjmu. Dosahuje viac ako 23 % u maturantov s rodinným príjmom z 5 % najlepšie zarábajúcich domácností. Vyššie vzdelanie rodičov maturantov je spojené s vyššou pravdepodobnosťou štúdia na vysokej škole v SR aj s vyššou pravdepodobnosťou štúdia v zahraničí. Najvyšší podiel študujúcich na vysokých školách v zahraničí (19 %) dosahujú maturanti, ktorí majú aspoň jedného rodiča s vysokoškolským vzdelaním.

Do zahraničia odchádzajú študovať najmä vysoko motivovaní študenti s nadpriemernými socioekonomickými predpokladmi. Inak povedané, do zahraničia často odchádzajú študenti s nadpriemernými výsledkami na strednej škole, čo sa nutne musí prejaviť na celkovej úrovni študijných predpokladov študentov bakalárskeho stupňa štúdia, ktorí ostávajú študovať na Slovensku [2].

Približne polovica absolventov slovenských stredných škôl, ktorí sa rozhodnú študovať na slovenskej vysokej škole, preferuje štúdium spoločenských vied. Ako vidno z údajov z prijímacieho konania na vysoké školy na akademický rok 2023/2024, iba približne 11,5 %

zo všetkých prijatých uchádzačov mieni študovať na vysokej škole technické vedy (pozri tabuľku 1). Z nich prevažná väčšina má záujem študovať informatiku.

Skupina študijných odborov	Podiel prihlášok / %	Podiel prijatých / %
Umelecké vedy a vedy o umení	2,5	1,5
Prírodné, matematické, informatické a kybernetické vedy	14	15
Technické vedy	8,5	11,5
Lekárske a zdravotnícke vedy	18	12,5
Poľnohospodárske, lesnícke a veterinárske vedy	3	3,5
Spoločenské vedy	49	51
Humanitné vedy	5	5

Tabulka 1: Podiel prihlášok a prijatí podľa skupiny študijných odborov na akademický rok 2023/2024 [3]

Tabuľka 2 ilustruje počet uchádzačov a potom aj študentov, ktorí prichádzajú na Slovenskú technickú univerzitu a jej Strojnícku fakultu. Ako vidno z tabuľky, len približne štyri pätiny prijatých študentov sa naozaj aj zapíšu na štúdium. Tabuľka 3 uvádza skladbu študentov, ktorí začali študovať na SjF STU v akademickom roku 2023/2024, podľa typu strednej školy, z ktorej prišli. Vidíme, že v tom akademickom roku začalo na fakulte študovať 37,2% absolventov gymnázií a 61,8% absolventov stredných odborných škôl. V tej istej tabuľke sa ale uvádza aj veľmi nepriaznivý fakt, že po prvom ročníku zanechalo štúdium na fakulte 40,2% absolventov gymnázií a až 62,5% absolventov stredných odborných škôl. V obidvoch prípadoch je to alarmujúce číslo, ktoré sa však približne opakuje takmer celú ostatnú dekádu, rovnako ako pomer zanechaní štúdia podľa typu strednej školy, na ktorej študovali. Hlavným dôvodom zanechania štúdia je pritom nezvládnutie matematiky v predmetoch prvého ročníka bakalárskeho stupňa štúdia (pozri časť 3).

	STU v Bratislave	Strojnícka fakulta STU
Plán	4680	530
Prihlásení	4193	331
Prijatí	3207	257
Zapísaní	2476	211
Zapísaní / prijatí	0,77	0,82

Tabulka 2: Počet uchádzačov a zapísaných študentov na Strojníckej fakulte STU v Bratislave na akademický rok 2023/2024 [3]

	Gymnázium	Stredná odborná škola	Iný typ školy	Spolu
Počet začatých štúdií	82	136	2	220
Úbytok po 1. semestri	12	57	2	71
Úbytok po 2. semestri	21	28	-	49
Drop-out po prvom ročníku / %	40,2	62,5	100	54,5

Tabulka 3: Úspešnosť štúdia na SjF STU v akademickom roku 2023/2024

Pozrime sa teda bližšie na problematiku slabej znalosti matematiky uchádzačov o štúdium na technických vysokých školách, ktorá sa prejavuje na vysokom úbytku študentov v prvom ročníku bakalárskeho štúdia. Túto problematiku budeme demonštrovať na situácii so študentami na Strojníckej fakulte STU v Bratislave.

2 Znalosť matematiky uchádzačov o štúdium na VŠ

Už v roku 2019 sa na Slovensku realizoval prieskum o požiadavkách vysokých škôl na matematické vedomosti a zručnosti uchádzačov o štúdium [4]. V sumáre sa od nich požaduje:

1. vedieť podstatu matematického poznatku - porozumenie je dôležitejšie ako formálne osvojenie učiva,
2. používať jazyk matematiky k zrozumiteľnému a logickému vyjadrovaniu matematických myšlienok,
3. ovládať postupy a stratégie riešenia úloh a matematických problémov,
4. poznať význam, aplikáciu konkrétneho matematického učiva mimo matematiky,
5. vedieť argumentovať a mať schopnosť odôvodňovať pravdivosť tvrdení na konkrétnych príkladoch,
6. mať presvedčenie, že matematika je všeobecná činnosť, potrebná na rozvoj spoločnosti.

2.1 Časová dotácia výučby matematiky na strednej škole

Štátny vzdelávací plán pre gymnázia predpisuje za celé štúdium odučiť (týždenne) 12 hodín matematiky. Na gymnáziu si žiak v treťom a štvrtom ročníku môže v rámci disponibilných hodín pridať ďalšie hodiny matematiky a poslednom ročníku seminár z matematiky. Teda existuje priestor pripraviť žiakov na maturitu z matematiky.

Na *stredných odborných školách* je len 6 hodín matematiky a informatiky týždenne spolu za 4 roky, ďalšie hodiny sa môže pridať z 28 disponibilných hodín. Tie sa ale primárne využívajú na inú výučbu, nie na výučbu matematiky. Tu nie je priestor na prípravu k dobrovoľnej maturite z matematiky, takže aj keď sa žiaci prihlásia na dobrovoľnú maturitnú skúšku z matematiky, pred samotnou skúškou to vzdajú. Čo sa týka prípravy na maturitu z matematiky, tá je iba na samotnom žiakovi. Finančné prostriedky škola nedostane na to, aby zaviedla napríklad nepovinný predmet na prípravu z matematiky. A tu nastáva problém. Žiak chce ísť študovať na vysokú školu, ale obsah a rozsah vyučovania matematiky nezodpovedá príprave na vysokú školu, ani nemôže, lebo štúdium má byť prípravou pre prax. Tento žiak ale je na vysokú školu prijatý, pretože úspešne zložil maturitu, technické vysoké školy zvyčajne nerobia prijímacie skúšky a potom nastáva problém pre vysokú školu.

2.2 Maturitná skúška z matematiky

Maturita z matematiky samozrejme nie je jediným kritériom, podľa ktorého sa dajú charakterizovať predpoklady študenta na úspešné absolvovanie matematiky na technickej vysokej škole v bakalárskom stupni štúdia. Poskytuje však veľmi jednoznačný náhľad na to, aká je matematika populárna medzi absolventami stredných škôl a koľkí z nich si trúfnu zložiť z nej skúšku, osvedčujúcu ich nadobudnuté vedomosti.

Maturita na Slovensku pozostáva zo štyroch predmetov. Žiak strednej školy môže konať maturitnú skúšku z matematiky ako voliteľný predmet (vykoná externú aj internú časť) alebo ako dobrovoľný predmet (absolvuje iba externú alebo internú časť). Žiak všeobecného alebo športového gymnázia vykoná maturitnú skúšku z matematiky ako voliteľný predmet alebo ako dobrovoľný predmet. Žiak strednej odbornej školy vykoná maturitnú skúšku z matematiky ako dobrovoľný predmet. Externú časť maturitnej skúšky z matematiky tvorí test, interná časť maturitnej skúšky je ústna. Preverované vedomosti sa dajú združiť do niekoľkých väčších skupín – základy matematiky; funkcie; planimetria; stereometria; kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika. [5]

Minister školstva v roku 2025 avizoval, že rezort chce zaviesť povinnú maturitu z matematiky okrem matematických gymnázií aj na gymnáziá s informatickým zameraním. Časom to plánuje rozšíriť aj na všetky gymnáziá, stredné priemyselné školy a technické odborné školy. Keďže na povinnú maturitu sú naviazané aj ďalšie opatrenia, očakávaný časový rámec zavedenia povinnej maturity z matematiky je približne 10 rokov. [6]

Podľa [7], v roku 2024 testy externej časti maturitnej skúšky písalo spolu 40 950 žiakov zo 688 stredných škôl. Z celkového počtu testovaných žiakov bolo 36,8% žiakov z gymnázií, 57,8% žiakov zo stredných odborných škôl, zvyšok z iných typov škôl.

Test externej časti maturitnej skúšky z matematiky riešilo 4 779 žiakov z 343 škôl, čo je iba 11,7 % zo všetkých maturantov. Z týchto žiakov bolo 74,2 % žiakov z gymnázií, 24,8 % žiakov zo stredných odborných škôl, zvyšok z iných typov škôl.

Analýzou výsledkov maturity z matematiky v roku 2024 sa zistilo, že na úrovni silnej vecnej významnosti

a. žiaci gymnázií dosiahli lepšie výsledky ako žiaci stredných odborných škôl,

b. žiaci maturujúci z matematiky ako voliteľného predmetu dosiahli lepšie výsledky ako žiaci maturujúci dobrovoľne.

Na porovnanie, v roku 2009 riešilo testy externej časti maturitnej skúšky z matematiky

9250 žiakov z 393 škôl, čo je približne 15,2 % zo všetkých 60 732 maturujúcich žiakov. Pritom žiaci gymnázií dosiahli lepšie výsledky ako žiaci ostatných stredných škôl na strednej úrovni vecnej významnosti.

Ak by sme zhrnuli uvedené informácie z rokov 2009 a 2024 (čo je časové rozpätie 15 rokov) v súčasnosti maturuje z matematiky iba polovica žiakov ako pred pätnástimi rokmi (v absolútnych číslach), pričom sa zároveň v súčasnosti významne zvýšil rozdiel dosahovaných výsledkov medzi žiakmi z gymnázií a stredných odborných škôl, než ako to bolo pred pätnástimi rokmi. Treba pritom brať do úvahy, že v súčasnosti maturuje spolu približne iba 67,4% žiakov ako pred pätnástimi rokmi.

3 Výučba matematiky na Strojníckej fakulte STU v Bratislave

Na Strojníckej fakulte STU sa v bakalárskom stupni štúdia vyučuje 12 predmetov, ktoré sa týkajú matematiky (pozri Tab. 4). Spolu ide za celé štúdium o 27 hodín týždenne v prípade povinných a povinne voliteľných predmetov a 14 hodín týždenne v prípade výberových predmetov. Majú rôznu časovú dotáciu, za ich absolvovanie sa získa rôzny počet kreditov. V každom prípade ten najväčší problém pre študentov bakalárskeho štúdia na Strojníckej fakulte STU je absolvovanie dvoch základných predmetov v prvom ročníku – Matematika I (zimný semester) a Matematika II (letný semester). Obsahovo tieto dva predmety na seba nadväzujú.

Predmet Matematika I v zimnom semestri je povinný predmet pre všetkých študentov prvého ročníka bakalárskeho stupňa štúdia. Obsahovo sa zameriava na sústavy lineárnych rovníc; matice a determinanty a ich využitie pri riešení systémov lineárnych rovníc; postupnosti – definícia a vlastnosti, graf a limita postupnosti; číselné rady, vlastnosti a kritériá konvergencie číselných radov; reálna funkcia reálnej premennej – definícia, obory, graf, limita a spojitosť funkcie; derivácia funkcie, pravidlá derivovania, fyzikálna a geometrická interpretácia derivácie; derivácie vyšších rádov, použitie derivácií na vyšetrovanie priebehu a vlastností funkcií, optimalizačné úlohy; neurčitý integrál, základné metódy integrovania – per partes, substitučná metóda; určitý integrál, aplikácie určitého integrálu, nevlastný integrál; mocninové rady, definícia a vlastnosti, polomer a interval konvergencie; rozvoj funkcií do mocninových radov, Taylorovho a McLaurinovho radu.

Preberané učivo má priamy súvis s okruhmi maturitnej skúšky z matematiky. Sylaby predmetu Matematika I preto predpokladajú určitú úroveň vstupných vedomostí, na ktorých stavajú a na základe ktorých sa preberá nové učivo. Úspešnosť absolvovania predmetu Matematika I teda priamo koreluje s úrovňou vedomostí, ktoré si prinášajú študenti z predchádzajúceho štúdia na strednej škole.

V letnom semestri sa vyučuje povinný predmet Matematika II. V rámci neho sylaby uvádzajú obyčajné diferenciálne rovnice; Euklidovský priestor; významné množiny n-rozmerného euklidovského priestoru, špeciálne body množín; funkcia dvoch a viacerých premenných a ich extrémy; množné integrály; zobrazenia euklidovskej roviny a euklidovského priestoru; výpočet dvojných a trojných integrálov transformáciou. Predmet Matematika II teda predstavuje nadstavbu predmetu Matematika I a priamo naň nadväzuje. Keďže sa preberajú témy, ktoré nemajú oporu vo vstupných vedomostiach zo stredných škôl, determinujúcim faktorom úspešného zvládnutia tohto predmetu je práve úspešné absolvovanie predchádzajúceho predmetu Matematika I.

Ako vyplýva zo štatistík študijných výsledkov, študenti nemajú zásadné problémy s absolvovaním ostatných predmetov z oblasti matematiky, ktoré sú uvedené v Tab. 4. Preto sa aj celé úsilie, súvisiace so zvýšením priechodnosti študentov do ďalšieho ročníka, v značnej miere zameriava na úspešné zvládnutie predmetov Matematika I a Matematika II.

Semester	Názov predmetu	Typ predmetu	Ukončenie	Kredity	Hodiny*
1	Matematika I	Povinný	Skúška	10	4/4
1	Doplnkové cvičenia z Matematiky I	Výberový	Zápočet	1	0/2
2	Matematika II	Povinný	Skúška	6	3/3
2	Doplnkové cvičenia z Matematiky II	Výberový	Zápočet	1	0/2
3	Numerická matematika	Povinne voliteľný**	Skúška	6	3/2
3	Zaujímavá matematika a fyzika	Výberový	Zápočet	2	2/0
4	Konštrukčná geometria	Povinne voliteľný**	Skúška	5	2/2
4	Základy štatistickej analýzy	Povinne voliteľný**	Skúška	5	2/2
4	Diferenciálne rovnice	Výberový	Zápočet	2	2/0
4	Matematika III	Výberový	Zápočet	2	2/0
5	Lineárna algebra	Výberový	Zápočet	2	2/0
6	Numerická matematika v Matlabe	Výberový	Zápočet	2	2/0

* Počet hodín prednášok / cvičení v každom týždni semestra

** Volí sa jeden predmet zo zoznamu predmetov

Tabulka 4: Zoznam predmetov bakalárskeho štúdia z oblasti matematiky

Uveďme na ilustráciu situáciu s absolvovaním predmetu Matematika I v prvom semestri bakalárskeho štúdia v akademickom roku 2024/2025. Z 314 študentov, ktorí začali študovať na začiatku prvého ročníka bakalárskeho štúdia, iba 158 študentov (50,3%) splnilo na konci semestra predpoklady na vykonanie skúšky z predmetu Matematika I, 139 študentov (44,3%) nesplnilo predpoklady na vykonanie skúšky a 17 študentov zanechalo štúdium počas semestra (5,4%). Zo 158 študentov, ktorí splnili predpoklady na vykonanie skúšky, úspešne absolvovalo skúšku 81 študentov (51,2%), 32 študentov (20,3%) na troch termínoch skúšok neuspelo, 30 študentov (19%) nevyužilo všetky opravné termíny a 15 študentov (9,5%) má povolený ešte dodatočný opravný termín. To znamená, že v riadnom skúšobnom termíne absolvovalo predmet Matematika I iba 25,8% percenta študentov, ktorí nastúpili na začiatku semestra na štúdium.

4 Vplyvy a opatrenia na úspešné zvládnutie matematiky

4.1 Vplyvy na úspešné zvládnutie matematiky

Sumarizujme tu jednotlivé vplyvy, ktoré sa prejavujú na schopnosti absolventov stredných škôl úspešne absolvovať štúdium matematických predmetov v bakalárskom stupni štúdia vysokých škôl technického smeru:

a. Absolventi stredných škôl s najlepšími študijnými predpokladmi často odchádzajú do zahraničia

b. Nízky záujem o štúdium technických odborov na vysokých školách bráni dôslednému prevereniu vstupných vedomostí a vytriedeniu uchádzačov s nedostatočnými študijnými predpokladmi. Veľká väčšina technických fakúlt nerobí prijímacie skúšky a prijíma všetkých uchádzačov o štúdium

c. Na vysoké školy technického smeru sa väčšinovo hlásia absolventi stredných odborných škôl, na ktorých je veľmi nízka hodinová dotácia vyučovania matematiky. Absolventov gymnázií je menej ako v minulosti

d. Maturitu z matematiky absolvuje nízke percento absolventov stredných škôl, navyše je veľký rozdiel v dosiahnutých výsledkoch medzi absolventami gymnázií a stredných odborných škôl

e. Špecifický vplyv predstavuje dištančné vzdelávanie počas pandémie COVIDU 19, pričom sa tento vplyv kontinuálne prejavuje na študentoch nastupujúcich na vysoké školy. Okrem iných obmedzení bola v tomto čase zrušená aj maturita absolventov stredných škôl.

K nim sa pridávajú aj objektívne existujúce všeobecné vplyvy na študentov, ktoré prináša meniaca sa doba. Tie sa potom prejavujú aj v ich horšej schopnosti zvládnutia učiva z matematiky:

a. Dostupné technické prostriedky – v súčasnosti majú študenti prvotný impulz všetky informácie a riešenia hľadať na internete, prípadne na riešenie problémov využívať umelú inteligenciu. Preto sa napríklad uvažuje o zrušení záverečných prác. Prvým impulzom nie je snaha zamyslieť sa, ale snaha využiť s čo najmenšou námahou existujúce riešenia, tzv. „pozrieť sa na Internet"

b. Znížený počet priamej výučby týždenne – v minulosti bolo na fakulte približne 30 hodín priamej výučby týždenne, teraz je to približne 20 hodín priamej výučby týždenne. Dôraz sa presúva z priamej výučby na nepriamu výučbu, čo pri evidentných problémoch časti študentov s učením sa ďalej prehlbuje problémy veľkej skupiny študentov s plnením požiadaviek vyučujúcich

c. Študenti sa nevedia učiť. Po prechode zo strednej na vysokú školu majú problémy s organizáciou štúdia, dodržiavaním pravidelného rozvrhu nepriamej výučby, inými nárokmi na vysokej škole, vyšším tempom preberania vedomostí a dôrazom na samostatné štúdium

d. Znížená schopnosť študentov samostatne riešiť problémy, čítať s porozumením a formulovať všeobecné úlohy pomocou matematických prostriedkov. Tá sa prejavuje najmä v nadväzujúcich odborných predmetoch, ktoré si vyžadujú od študentov vlastné riešenia a formalizovanie všeobecných zadaní do matematicky riešiteľného tvaru

e. Znížená schopnosť študentov syntetizovať poznatky z viacerých preberaných oblastí a zároveň ich preniesť v rámci matematiky alebo mimo matematiky. S tým súvisí aj nízka schopnosť využiť skôr preberané učivo v neskorších fázach semestra.

Problém je však často aj na strane vysokej školy:

a. Nedostatočne pružná adaptácia na meniacu sa skladbu prichádzajúcich študentov, úroveň ich vstupných vedomostí, študijných predpokladov a schopností

b. Nejednoznačné definovanie obsahu štúdia matematiky na bakalárskom stupni. Študenti z bakalárskeho stupňa takmer všetci pokračujú na inžinierske štúdium, takže vo vyšších ročníkoch sa požaduje iné zloženie zvládnutých poznatkov z matematiky ako keď študenti ukončia štúdium po bakalárskom stupni.

4.2 Čo môže a aj robí fakulta?

Problematika nízkeho počtu študentov, ktorí úspešne absolvujú matematiku v prvom ročníku štúdia, sa pravidelne a často objavuje na rokovaní rôznych orgánov fakulty. Vedenie fakulty dlhodobo venuje tomuto problému náležitú pozornosť a snaží sa definovať opatrenia na zvládnutie nepriaznivého stavu. Pravidelne prebiehajú konzultácie s vyučujúcimi matematiky, ale aj so študentami, pričom sa stále hľadajú vhodné formy podpory študentov pre absolvovanie predmetov z matematiky. Neustále sa pritom zdôrazňuje princíp dodržania stanovenej úrovne vedomostí študentov a neznižovania kvalitatívnych požiadaviek, hľadajú sa podporné mechanizmy, ktoré pomôžu študentom zvládnuť tieto nároky.

V akademickom roku 2023/2024 začali platiť opatrenia, ktoré sa využívajú aj v súčasnosti:

a. Súbežne s predmetmi Matematika I a II sa vyučujú výberové predmety Doplnkové cvičenie z matematiky I a II. Cieľom je doplnenie prípadných nedostatkov zo strednej školy, prehĺbenie pochopenia preberaného učiva, príprava na skúšku z matematiky. Tieto výberové predmety boli v minulosti povinné pre študentov so známou z matematiky na strednej škole horšou ako dva, v súčasnosti je to už výberový predmet.

b. V septembri, pred nástupom na štúdium, fakulta ponúka týždňový kurz stredoškolskej matematiky v rozsahu päť hodín denne. Študenti si účasť platili sami (50 eur za týždeň), opakovala sa stredoškolská matematika. Na kurz boli vo všeobecnosti kladné odozvy, problém predstavuje fakt, že vo viacerých prípadoch sa ho zúčastnili študenti, ktorí to tzv. nepotrebovali, ale bolo menej študentov, ktorí takýto kurz potrebovali.

c. Okrem spomínaných výberových predmetov sa organizuje neformálne doučovanie z matematiky, na ktoré začalo chodiť veľa študentov. Toto doučovanie vedie vysokoškolský učiteľ matematiky, pričom nie je zaradené do oficiálnych študijných plánov.

d. Vo vyučovaní matematiky sa široko zavádzajú aktivizujúce metódy výučby (najmä EduScrum, problem-based learning). Týmto metódam sa venuje aj viacero riešených grantových projektov na fakulte, pričom sa pracovníci fakulty úspešne zapájajú aj do medzinárodných riešiteľských kolektívov v tejto oblasti.

Budúce opatrenia zahŕňajú:

a. Zavedenie/posilnenie vstupného seminára z matematiky pred začiatkom štúdia.

b. V pripravovanej novej štruktúre študijných programov sa učivo z matematiky rozdelí na viacej semestrov ako teraz, pričom sa v prvom semestri majú zjednotiť vstupné vedomosti študentov z matematiky a na druhý semester sa posunie začiatok výučby nových tém z matematiky.

c. Zavedie sa triedenie študentov podľa vstupného testu z matematiky, študenti so slabšími výsledkami budú mať povinne určité vyučovanie matematiky naviac.

d. Aktualizuje sa obsah vyučovanej látky, aby efektívnejšie zodpovedal meniacim sa požiadavkám odborných predmetov vo vyšších ročníkoch.

e. Ďalej sa podporí široké aplikovanie moderných metód výučby.

f. Plánujú sa konzultácie s učiteľmi matematiky na stredných školách, aby sa lepšie prepojili požiadavky vysokých škôl s možnosťami stredných škôl.

4.3 Prejavilo sa už nejaké zlepšenie?

Zavedené opatrenia sa len začínajú prejavovať a ešte výrazne nezmenili nepriaznivé percento študentov, ktorí úspešne absolvovali predmety z matematiky v prvom ročníku štúdia. Náznaky zlepšenia sa dajú sledovať skôr v pozitívnejšom prístupe študentov a zvýšení ich pozitívnej motivácie:

a. V prípade študentov, ktorí úspešne absolvovali skúšku z matematiky sa zlepšili ich známky

b. Študenti vo väčšej miere chodia na doplnkové cvičenia z matematiky, ale aj chodia viac na konzultácie, chodia na neformálne vzdelávanie z matematiky. Čo je podstatné, uvedomili si, že musia riešiť príklady, aby nadobudli špecifické zručnosti.

c. Zlepšila sa samostatná práca študentov na cvičeniach z matematiky.

d. Širšie sa využívajú aktivizujúcich metódy výučby. EduScrum je skupinová metóda, pri ktorej si študenti zvykli na skupinové riešenie problémov, takže sa teraz viac združujú do skupiniek a viac si navzájom pomáhajú s riešením príkladov pred skúškou a pripravujú sa na skúšku spolu.

e. Študenti už nemajú problém sa spýtať učiteľa, keď niečo nevedia, napríklad zo strednej školy, alebo niečomu nerozumejú. Čo vyzerá ako triviálne zlepšenie, ale bol to vážny problém, brániaci vyššej efektívnosti vyučovania.

f. Študenti majú v univerzitnom akademickom informačnom systéme k dispozícii množstvo podporných materiálov, ktoré vo zvýšenej miere využívajú na samostatné štúdium.

4.4 Čo by mal urobiť štát?

Opäť, už v materiáli [4] z roku 2019 sa uvádza, že pri výučbe matematiky treba definovať, prijať a implementovať systematické opatrenia zamerané na

a) učiteľov všetkých stupňov škôl (vzdelávanie učiteľov a zvýšenie ich počtu);

b) vyučovanie matematiky (moderné postupy, zvyšovanie efektívnosti vzdelávania);

c) žiakov (podpora zlepšenia študijných výsledkov);

d) legislatívny rámec (zvýšenie hodinovej dotácie na stredných odborných školách, povinná maturita z matematiky).

Toto sú aj opatrenia, po ktorých najviac volajú zástupcovia technických vysokých škôl spolu s riaditeľmi stredných odborných škôl aj v súčasnosti. Ide najmä o bod 4, ktorý ma v plne v rukách politická reprezentácia. Nemalým problémom začína byť aj získavanie učiteľov matematiky na vysokých školách.

Nedá sa konštatovať, že by sa od roku 2019 situácia s vedomosťami absolventov stredných škôl, uchádzajúcich sa o štúdium na technických vysokých školách, výrazne zlepšila. Zásadným problémom je celkovo nedostatočný akcent štátu na podporu technického vzdelávania. Napriek tomu, že sa k pripravenosti absolventov stredných škôl na štúdium na technických vysokých školách pravidelne vyjadrujú vysoké školy, vyjadrujú sa zamestnávatelia, ktorí definujú svoje požiadavky, hľadajú a navrhujú riešenia. situácia sa nemení.

5 Záver

Článok opisuje situáciu s problémom nízkej priechodnosti študentov bakalárskeho štúdia na Strojníckej fakulte STU v Bratislave (Slovensko) cez predmety z oblasti matematiky. Meniace sa vstupné predpoklady (vedomosti a schopnosti študentov, skladba uchádzačov o štúdium), vonkajšie vplyvy (hodinová dotácia výučby matematiky, požadované vedomosti a schopnosti), technický pokrok (dostupné softvérové nástroje, umelá inteligencia), toto všetko nutne ovplyvňuje prístup učiteľov a vedenia fakulty k vyučovaniu matematiky a vyžaduje vysokú mieru flexibility učiteľov na fakulte, aby sa s týmito zmenami (nielen v matematike) vyrovnali. Zároveň platí, že ani vysoká miera flexibility fakulty nedokáže suplovať niektoré potrebné zásahy štátu (dotácia hodín matematiky na stredných školách, maturita z matematiky), takže neobstojí argument o nedostatočnej prispôsobivosti vysokých škôl meniacim sa podmienkam, v ktorých pôsobia.

Aj problémy s absolvovaním predmetov z matematiky v bakalárskom stupni štúdia na Strojníckej fakulte STU potvrdzujú všeobecne platný záver, formulovaný v [8] - kvalitu vysokého školstva nebude v najbližších rokoch určovať kvalita prichádzajúcich študentov, ale jeho schopnosť prispôsobiť sa novým podmienkach tak, aby boli vysoké školy schopné poskytovať kvalitné vzdelanie, a zároveň slúžili čoraz rôznorodejšej skupine študentov. Toto je základná premisa pre ďalšie pôsobenie slovenských technických vysokých škôl.

Poďakovanie

Tento článok vznikol s podporou Kultúrnej a edukačnej grantovej agentúry (KEGA), granty číslo 025STU-4/2024 a 016STU-4/2025.

Literatura

[1] Škvarenina, O. 20 rokov odlivu mozgov: V Česku vyštudovalo medicínu už 5 tisíc Slovákov. Odchádza aj vela študentov sociálnych a ekonomických odborov. *Inštitút vzdelávacej politiky.* 2023. [Online]. Citované 1. októbra 2025. Dostupné na https://dennikn.sk/blog/3372428/20-rokov-odlivu-mozgov-v-cesku-vystudovalo-medicinu-uz-5-tisic-slovakov-odchadza-aj-vela-studentov-socialnych-a-ekonomickych-odborov/

[2] Martinák, D, Varsik, S. Odliv mozgov II: Za siedmimi horami. *Inštitút vzdelávacej politiky.* 2021. [Online]. Citované 1. októbra 2025. Dostupné na www.minedu.sk/data/att/e98/21396.cf6fbf.pdf

[3] Antalíková, Š. Prijímacie konanie na vysoké školy na akademický rok 2023/2024 v číslach a grafoch. *Centrum vedecko-technických informácií SR.* 2024. [Online]. Citované 1. októbra 2025. Dostupné na www.cvtisr.sk/buxus/docs//PKvs/Statista/r2023pk1.pdf

[4] Bederka, A., et al. Koncepcia skvalitnenia matematického vzdelávania na základných a stredných školách v SR. *Štátny pedagogický ústav*. 2019. [Online]. Citované 1. októbra 2025. Dostupné na www.statpedu.sk/files/sk/pre-verejnost/verejne-pripomienkovanie/koncepcia-skvalitnenia-matematickeho-vzdelavania/koncepcia_navrh.pdf

[5] Čipková Hamplová, L. et al. (2024). Maturita z matematiky – všetko, čo potrebujete vedieť k maturite z matematiky. *Národný inštitút vzdelávania a mládeže*. 2024. [Online]. Citované 1. októbra 2025. Dostupné na https://nivam.sk/wp-content/uploads/2024/08/MP-NIVaM_Maturita-z-matematiky_FINAL.pdf

[6] Ministerstvo školstva, výskumu, vývoja a mládeže SR. Z matematiky maturuje 5-tisíc žiakov, časom ich má byť viac. *Tlačová agentúra SR*. 2025. [Online]. Citované 1. októbra 2025. Dostupné na https://domov.sme.sk/c/23462700/z-matematiky-maturuje-5-tisic-ziakov-casom-ich-ma-byt-viac.html?_gl=1*16uhdzu*_ga*OTE5MDc3NTA1LjE2ODk4NjAxODI.*_ga_G700V8QCTX*MTc0MTg2MjA0My40NjguMS4xNzQxODYyMDk3LjAuMC4w&ref=mnt

[7] Národný ústav certifikovaných meraní. Maturita. Školský rok 2023/2024. *Národný inštitút vzdelávania a mládeže*. 2025. [Online]. Citované 1. októbra 2025. Dostupné na https://www2.nucem.sk/sk/merania/narodne-merania/maturita/roky/2023-2024

[8] Vančíková, K. Analýza zistení o stave školstva na Slovensku. *MESA 10*. 2020. [Online]. Citované 1. októbra 2025. Dostupné na https://analyza.todarozum.sk/docs/432871001mr1a/

RNDr. Jana Gabková, PhD.
Ústav matematiky a fyziky
Nám. Slobody 17
812 31 Bratislava
Slovenská republika
e-mail: jana.gabkova@stuba.sk

doc. Ing. Štefan Gužela, PhD.
Ústav procesného inžinierstva
Nám. Slobody 17
812 31 Bratislava
Slovenská republika
e-mail: stefan.guzela@stuba.sk

doc. Ing. Martin Halaj, PhD.
Ústav automatizácie, informatizácie a merania
Nám. Slobody 17
812 31 Bratislava
Slovenská republika
e-mail: martin.halaj@stuba.sk

INDICKÝ MATEMATICKÝ GÉNIUS SRINIVASA AIYANGAR RAMANUJAN

doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.,
Mgr. et Mgr. Soňa Königsmarková, Ph.D.

Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy
Fakulta pedagogická Západočeské univerzity v Plzni

Abstrakt: V příspěvku jsou popsány životní osudy a některé matematické výsledky indického matematika S. Ramanujana. Zaměřuje se na ty, které mají souvislost s programy počítačové algebry či školskou matematikou a mohou být předvedeny žákům či studentům, kteří mají zájem o matematiku či historii matematiky. Je zde prezentován návrh motivačních a rozvíjejících úloh inspirovaných Ramanujanovým dílem, které podporují u žáků tvořivé a logické myšlení, vytrvalost při řešení problémů a pozitivní vztah k matematice. Cílem příspěvku je ukázat, že propojení historie matematiky, moderní pedagogiky a digitálních technologií může být silným nástrojem pro rozvoj matematického nadání a zájmu o obor.

Klíčová slova: Srinivasa Aiyangar Ramanujan, životopis, objevy, úlohy pro nadané žáky, digitální technologie, GeoGebra, Excel

Indian Mathematical Genius Srinivasa Aiyangar Ramanujan

Abstract: The article describes the life and some mathematical results of the Indian mathematician S. Ramanujan. It focused on those that are related to computer algebra programs or school mathematics and can be demonstrated to pupils or students who are interested in mathematics or the history of mathematics. We present a proposal for motivating and developing tasks inspired by Ramanujan's work, which support pupils' creative and logical thinking, perseverance in solving problems and a positive attitude towards mathematics. The aim of the article is to show that the connection of the history of mathematics, modern pedagogy and digital technologies can be a powerful tool for the development of mathematical talent and interest in the field.

Keywords: Srinivasa Aiyangar Ramanujan, biography, discoveries, tasks for gifted students, digital technologies, GeoGebra, Excel

Úvod

Srinivasa Aiynangar Ramanujan byl v matematice samoukem, přesto však proslul neobyčejnou tvořivostí a originalitou myšlení. Jeho příběh je pozoruhodnou kapitolou v historii matematiky. Srinivasa Ramanujan se narodil v jihoindickém městě Erode 22. 12. 1887 do velice chudé bráhmanské rodiny, měl 3 sourozence, otec byl účetní.

Ramanujan projevoval neobyčejný zájem a nadání pro matematiku. Již ve čtvrtém ročníku na základní škole okamžitě odpověděl staršímu spolužákovi, že soustava rovnic $\sqrt{x} + y = 7$, $\sqrt{y} + x = 11$ má řešení $x = 9$, $y = 4$.

V listopadu 1897 při oblastních zkouškách základních škol byl Ramanujan nejúspěšnějším žákem a díky tomu mohl začít studovat na městské střední škole v Kumbakonamu. Ve 12 letech si vypůjčil od spolužáka sbírku „Plane trigonometry“ (Trigonometrie v rovině) od S. L. Loneyho a vyřešil problémy v této sbírce bez pomoci (neobyčejné nadání v mnoha oblastech matematiky, např. aritmetice, algebře, geometrii, teorii čísel a trigonometrii). V r. 1903 úspěšně vykonal maturitní zkoušku.

Následné studium na univerzitě v Mádrasu však již skončilo neúspěchem. Ramanujan se soustředil jen na matematiku a zanedbával studium ostatních předmětů. V roce 1909 se oženil s Janaki (9 let), byl to domluvený sňatek.

V roce 1910 se setkal se zakladatelem indické matematické společnosti Ramaswamy Aiyerem (1871-1936) a ukázal mu své poznámky (Ramanujan's Notebooks). Ramaswamy poznal talent Ramanujana a napsal mu doporučující dopis pro profesora P. V. Seshu Aiyera. Ramanujan se s ním setkal již na univerzitě a profesor byl ohromen obsahem Ramanujan's Notebooks a s dalším doporučujícím dopisem poslal Ramanujana za Diwan Bahadur R. Ramachandrem Rao, nejuznávanějším matematikem v té době v Indii. Nějakou dobu byl Ramanujan podporován sympatizujícími indickými matematiky a v r. 1912 přijal místo účetního společnosti Madras Port Trust.

1 Dopis do Cambridge

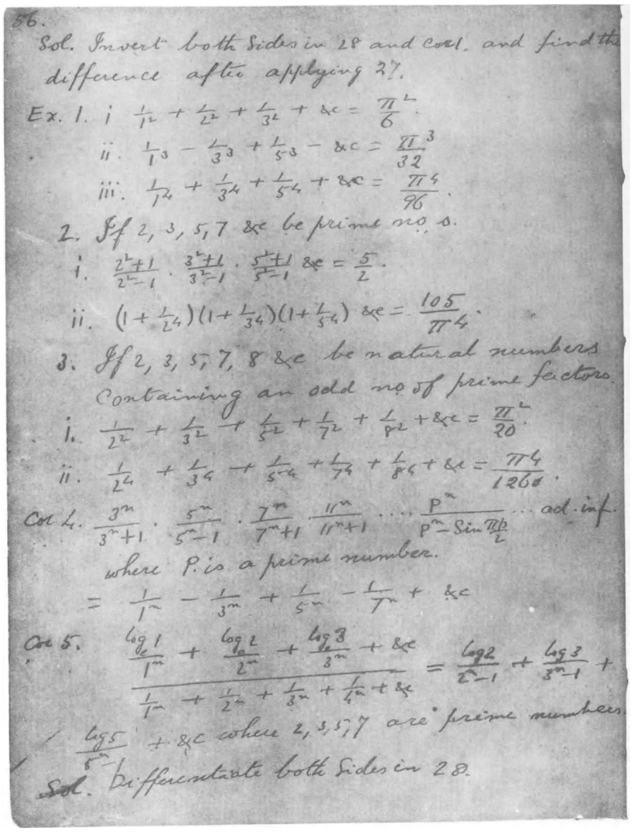
Ramanujan byl čím dál více uznávaným matematikem. V roce 1913 obdržel **Godfrey Harold Hardy** (1877–1947), profesor na univerzitě v Cambridge, známý svými pracemi v matematické analýze a teorii čísel, dopis odeslaný z Madrásu v Indii. Odesílatelem byl S. Ramanujan - mladý muž, pracující jako účetní v tamním přístavu, nemající ani univerzitní vzdělání, který „věnuje veškerý volný čas matematice“, v níž si našel „svou vlastní cestu“. Žádal o posouzení dodatku k dopisu – několika listů s asi 120 formulemi a větami bez důkazů.

První reakce slavného Hardyho byla dopis ignorovat. Naštěstí ještě týž den po večeři prostudoval spolu se svým přítelem **Johnem Edensorem Littlewoodem** (1885–1977) onen dodatek. Po několika hodinách oba konstatovali, že nejde o práci ztřeštěnce, ale génia.

Po seznámení s Ramanujanovým dopisem se Hardy snažil zajistit jeho cestu do Anglie. Námitky Ramanujanovy matky naštěstí ustaly v době, kdy prý ve snu viděla syna ve skupině Evropanů, přičemž jí bohyně Námagiri poručila, aby se cestě nevzpírala. Ramanujan nakonec v březnu 1914 vskutku do Cambridge odcestoval a začal pracovat v Trinity College. Začala tak jeho přímá spolupráce s Hardym, která vyústila v řadu článků, věnovaných teorii čísel. Bohužel se u Ramanujana na jaře roku 1917 objevila nevyléčitelná nemoc. Ramanujan byl v témže roce zvolen za člena Královské společnosti v Londýně a také se jako první indický vědec stal členem Trinity Fellowship. Střídavě však již pobýval v sanatoriích a mimo ně. Při jedné z návštěv v nemocnici mu Hardy řekl, že přijel v taxi s číslem 1729, jež je nezajímavé ($1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$ – to je nudný rozklad v součin prvočísel). Ramanujan okamžitě odpověděl, že je to naopak číslo pozoruhodné – je totiž nejmenším přirozeným číslem, které jde zapsat dvěma způsoby jako součet třetích mocnin ($1729 = 9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3$). O Ramanujanovi se říká, že „každé přirozené číslo bylo jeho osobním přítelem“. Do vlasti se vrátil až v únoru 1919, když po skončení světové války byla lodní doprava zase bezpečná, avšak přes veškerou péči zemřel 26. 4. 1920 na nemoc, diagnostikovanou jako tuberkulóza. Dnes se však soudí, že mohlo jít o nedostatek několika vitamínů.

2 Ramanujanovy zápisníky

I když Ramanujanovy zápisníky vyšly v roce 1957 a jeden „ztracený“ v r. 1979, bylo nutno vykonat obrovskou práci spojenou s jejich „rozluštěním“ (Ramanujan užíval vlastní značení), doplněním komentářů a chybějících důkazů. Tuto práci vykonal Bruce C. Berndt z Univerzity Illinois v Urbana-Champign. Některé z Ramanujanových výsledků nalezly uplatnění v teoretické fyzice. Kupř. nositel Nobelovy ceny za fyziku z r. 1979 S. Weinberg vzpomínal, jak se při studiu teorie strun v sedmdesátých letech minulého století setkal s matematickým problémem, při jehož studiu zjistil, že potřebné vzorce nalezl Ramanujan v r. 1918.



56.

Sol. Invert both sides in 28 and cor. and find the difference after applying 27.

Ex. 1. i $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\&c=\frac{\pi^2}{6}$.

ii. $\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\&c=\frac{\pi^3}{32}$

iii. $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\&c=\frac{\pi^4}{96}$.

2. If 2, 3, 5, 7 &c be prime no s.

i. $\frac{2^2+1}{2^2-1}\cdot\frac{3^2+1}{3^2-1}\cdot\frac{5^2+1}{5^2-1}\&c=\frac{5}{2}$.

ii. $(1+\frac{1}{2^4})(1+\frac{1}{3^4})(1+\frac{1}{5^4})\&c=\frac{105}{\pi^4}$.

3. If 2, 3, 5, 7, 8 &c be natural numbers containing an odd no of prime factors.

i. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\&c=\frac{\pi^2}{20}$.

ii. $\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{8^4}+\&c=\frac{\pi^4}{1260}$.

Cor 4. $\frac{3^n}{3^n+1}\cdot\frac{5^n}{5^n-1}\cdot\frac{7^n}{7^n+1}\,\frac{11^n}{11^n+1}\cdots\frac{p^n}{p^n-\sin\frac{\pi p}{2}}\cdots$ ad inf. where p is a prime number.

$=\frac{1}{1^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}+\&c$

Cor 5. $\dfrac{\frac{\log 1}{1^n}+\frac{\log 2}{2^n}+\frac{\log 3}{3^n}+\&c}{\frac{1}{1^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\&c}=\frac{\log 2}{2^n-1}+\frac{\log 3}{3^n-1}+\frac{\log 5}{5^n-1}+\&c$ where 2, 3, 5, 7 are prime numbers.

Sol. Differentiate both sides in 28.

Obrázek 1: Jedna strana z Ramanujanových zápisníků (Notebooks)

3 Některé Ramanujanovy objevy

Zmíníme některé Ramanujanovy objevy:

- Aproximace čísla π
- Modulární funkce a aproximace π
- Highly composite numbers
- Ramanujanova prvočísla
- Čísla typu taxicab
- Mock-theta funkce
- Magické čtverce
- Funkce rozklad čísel a Ramanujanovy kongruence

O některých jeho objevech se zmíníme podrobněji.

Většina Ramanujanových formulí zachycuje vztahy mezi čísly s nekonečným rozvojem, nekonečnými součty či součiny a řetězovými zlomky. Jiné formule se týkají teorie čísel, algebraických identit atd. Některé jeho vzorce obsahují řady rychle konvergující k převrácené hodnotě čísla π, které mohly být v moderní době využity k jeho výpočtu na dříve naprosto nemyslitelný počet desetinných míst, resp. byly inspirací pro hledání obdobných formulí počítačovými metodami. Dnes, kdy je vybavení škol počítači a software provádějícím algebraické manipulace již samozřejmostí, je možné se seznámit s některými Ramanujanovými aproximacemi čísla π.

Aproximace čísla π

Již první z elementárních školních ukázek, které uvedeme, $\pi = \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{\frac{1}{4}}$, poskytuje přibližné vyjádření čísla π na 9 desetinných míst. Kalkulačka s obvykle osmimístným displejem bude tedy „málo“. Lze však využít matematické programy, např. MATHEMATICA.

Prověřme dále, že Ramanujanovy aproximace

$$\pi \approx \frac{63}{25} \cdot \frac{17 + 15\sqrt{5}}{7 + 15\sqrt{5}},$$

resp. $\pi \approx \frac{12}{\sqrt{130}} \ln \frac{(2+\sqrt{5})(3+\sqrt{13})}{\sqrt{2}}$ dávají správně prvních 9, resp. 14 desetinných míst čísla π.

Všechna dosud uvedená přibližná vyjádření čísla π jsou však „statická“, neumožňují toto číslo počítat s libovolnou přesností. Ramanujan objevil asi patnáct číselných řad, konvergujících relativně rychle nikoliv k číslu π, ale k převrácené hodnotě tohoto čísla. Zde je jedna z nich:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n}^{\infty} \frac{(4n!)}{(n!)^4} \frac{[1103 + 26390n]}{396^{4n}}$$

.

Highly composite numbers

Prvočíslo je číslo, které je dělitelné pouze číslem 1 a samo sebou, např. $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \ldots$.

Počtem prvočísel menších než jakékoliv zvolené číslo se zabýval již francouzský matematik Adrien-Marie Legendre (1752–1833) nebo německý matematik a fyzik Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855). Všechny poznatky vedly ke vzniku prvočíselné věty, která uvádí $\pi(n) = \frac{n}{\log n}$, kde $\pi(n)$ označuje právě počet prvočísel menších než číslo n. Každé kladné celé číslo je navíc možné vyjádřit jako součin mocnin prvočísel. Termín **highly composite numbers** lze přeložit jako velmi složená čísla.

Definice 1
Highly composite number je kladné celé číslo, které má více dělitelů než všechna menší kladná celá čísla.

Ramanujan uváděl, že počet dělitelů kladného čísla N je extrémně nepravidelný pro N blížící se k nekonečnu. V závislosti na tvaru čísla N se v části případů tento počet blíží k nekonečnu a v druhé části zůstává tento počet nízký. Ve svém díle **Highly composite numbers** uvedl seznam prvních 102 takových čísel ze seznamu. Ramanujan navíc z množiny highly composite numbers určil ještě podmnožinu čísel, kterou nazval superior highly composite numbers (např. $2, 6, 12, 60, 120, 360, 2520, \ldots$).

Ramanujanova prvočísla

Zkoumání prvočísel bylo jedním z velkých Ramanujanových zájmů.

Definice 2
Pro $n \geq 1$ je n-té Ramanujanovo prvočíslo nejmenší kladné celé číslo R_n takové, že pokud je $x \geq R_n$, potom platí $\pi(x) - \pi\left(\frac{1}{2}x\right) \geq n$.

Čísla typu taxicab

Ramanujan pobýval v Anglii a během posledních měsíců zde byl z důvodu své nemoci v různých sanatoriích. Jak již bylo uvedeno, jeho přítel Hardy jej v jednom sanatoriu navštívil a zmínil se, že přijel taxíkem s nezajímavým číslem 1729. Ramanujan naopak číslo 1729 považoval za velmi zajímavé:

Je to nejmenší možné číslo, které lze vyjádřit pomocí dvou různých součtů třetích mocnin čísel: $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$. Číslo 1729 je jedním ze skupiny čísel, které mají stejnou vlastnost. Na základě výše uvedeného dostala tato skupina speciální název **taxicab numbers** - tzv. taxíková čísla.

Definice 3 (Taxicab čísla)
N-té číslo typu taxicab Ta(n) je nejmenší číslo, které lze vyjádřit pomocí n způsobů jako součet třetích mocnin dvou kladných čísel.

Ramanujanovo číslo 1729 je až druhým číslem typu taxicab, prvním je $\mathrm{Ta}(1) = 2 = 1^3 + 1^3$.

V dnešní době známe 6 čísel, která patří do této skupiny.

Cabtaxi čísla

Pojem **cabtaxi** čísla vznikl jako **inverze původního pojmu taxicab** čísla.

Definice 4 (Cabtaxi čísla)
N-té číslo typu cabtaxi je nejmenší číslo, které lze vyjádřit pomocí n způsobů jako součet třetích mocnin dvou celých čísel, která nemusí být kladná.

Např. $1 = 1^3 + 0^3$

$91 = 6^3 - 5^3 = 3^3 + 4^3$

Příběh čísla 1729 ukazuje, jak i zdánlivě obyčejná čísla v sobě mohou skrývat zajímavé matematické vlastnosti.

Magické čtverce

Magickým čtvercům je věnována jedna z kapitol v prvním Ramanujan's Notebook. Zpočátku pracoval s magickými čtverci 3×3 nebo 4×4, končil se čtverci 8×8.

Definice 5 (Magické čtverce)
Magický čtverec je čtvercové pole obsahující kladná celá čísla. Pro tato čísla platí, že pokud sečteme čísla v každém řádku, sloupci i na obou diagonálách, dostaneme jako součet stejné číslo. Toto číslo nazýváme magická konstanta.

Ramanujanovy známé čtverce jsou s jeho datem narození v první řádce, viz obrázek.

22	12	18	87
62	20	31	26
41	7	81	10
14	100	9	16

22	12	18	87
88	17	9	25
10	24	89	16
19	86	23	11

Obrázek 2: Magické čtverce

Lze sestavit i obecné řešení tohoto problému pro libovolné datum. Pokud den označíme jako D, měsíc jako M, počáteční dvě čísla letopočtu jako P a koncová dvě čísla letopočtu jako K, můžeme ke tvorbě magického čtverce pro konkrétní datum použít následující schéma:

D	M	P	K
K+1	P-1	M-3	D+3
M-2	D+2	K+2	P-2
P+1	K-1	D+1	M-1

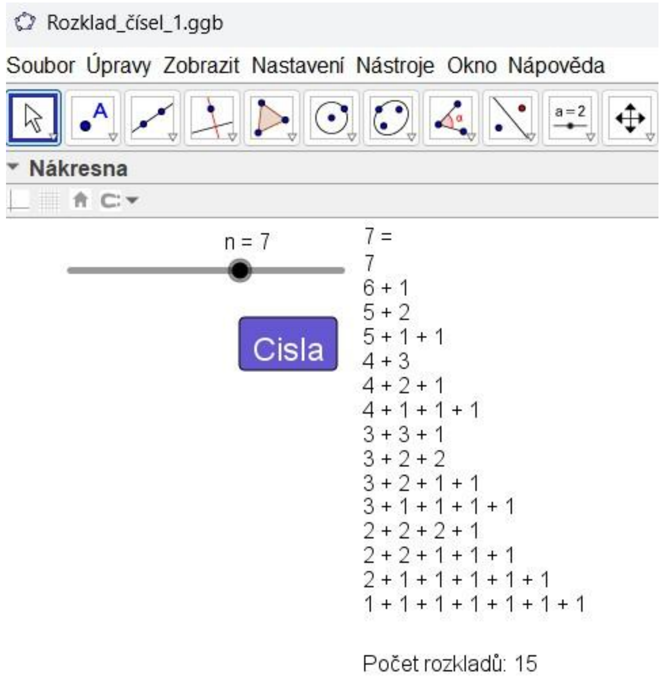
Obrázek 3: Magický čtverec - schéma

4 Úlohy pro nadané žáky

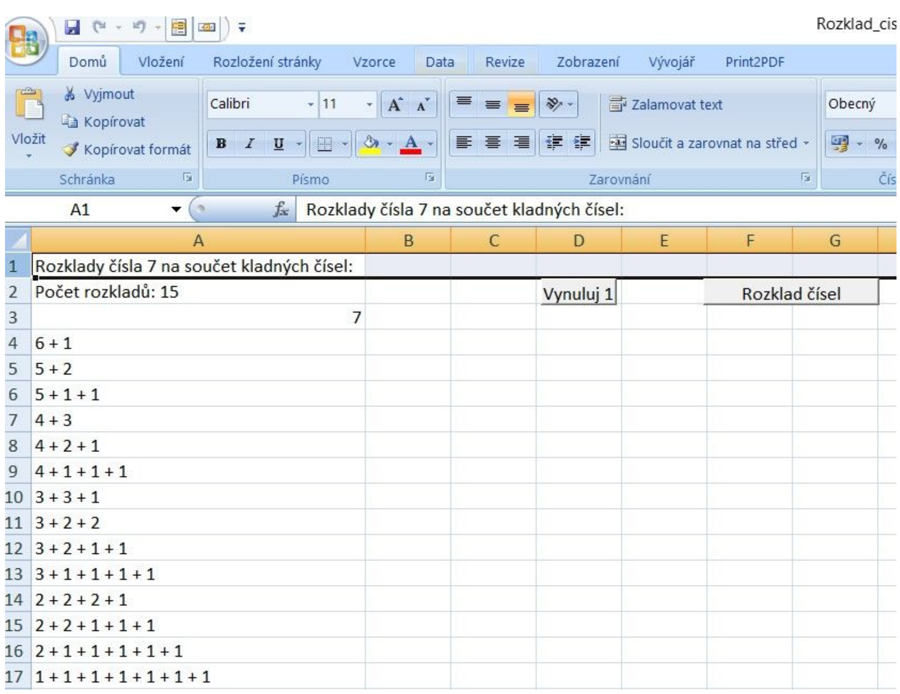
Na základě Ramanujanových objevů jsme vytvořili úlohy pro nadané žáky.

Úloha 1 - Kolika způsoby lze rozložit číslo 7?

Zjistěte, kolika různými způsoby lze rozložit číslo 7 na součet kladných celých čísel. V součtech nezáleží na pořadí sčítanců. Např. rozklady: $4 = 2 + 1 + 1$, $4 = 1 + 2 + 1$, $4 = 1 + 1 + 2$ jsou považovány za jeden totožný rozklad.
Komentář: Žáci mají k dispozici programy v GeoGebře a v Excelu, kde si své výsledky mohou zkontrolovat.



Obrázek 4: **Rozklad čísla v GeoGebře**

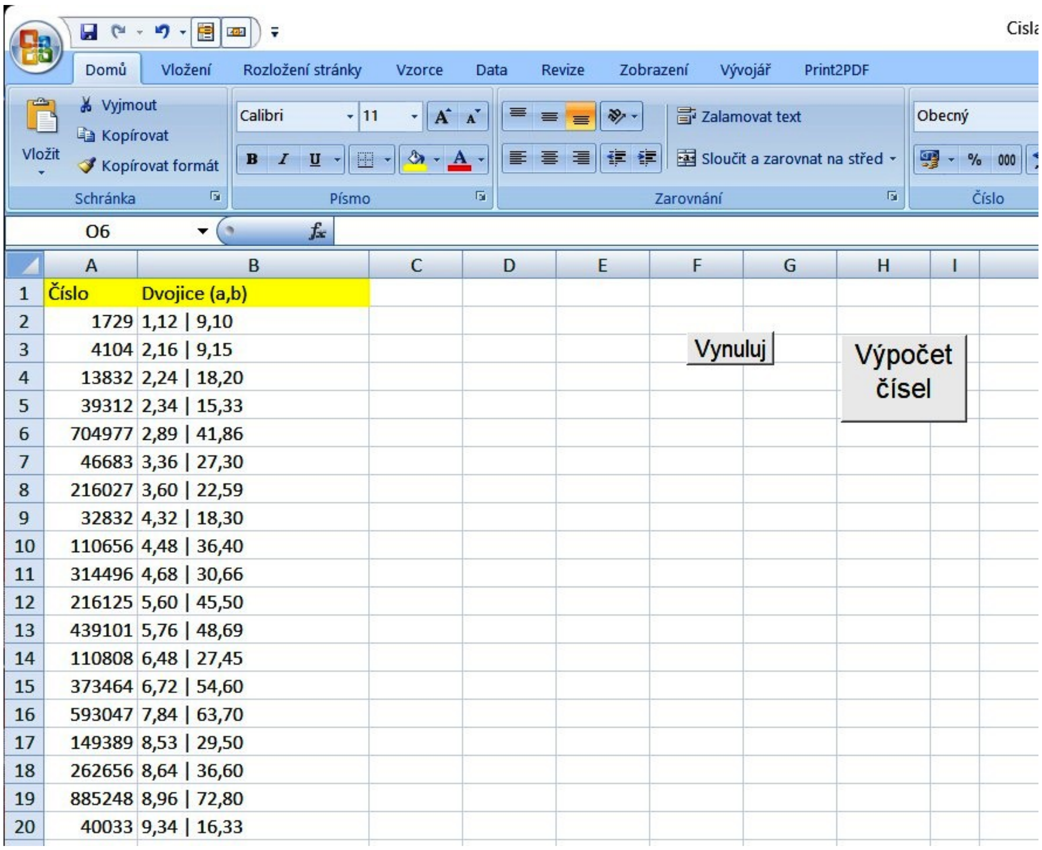


Obrázek 5: **Rozklad čísla v Excelu**

Úloha 2 - Ramanujanovo taxicab číslo

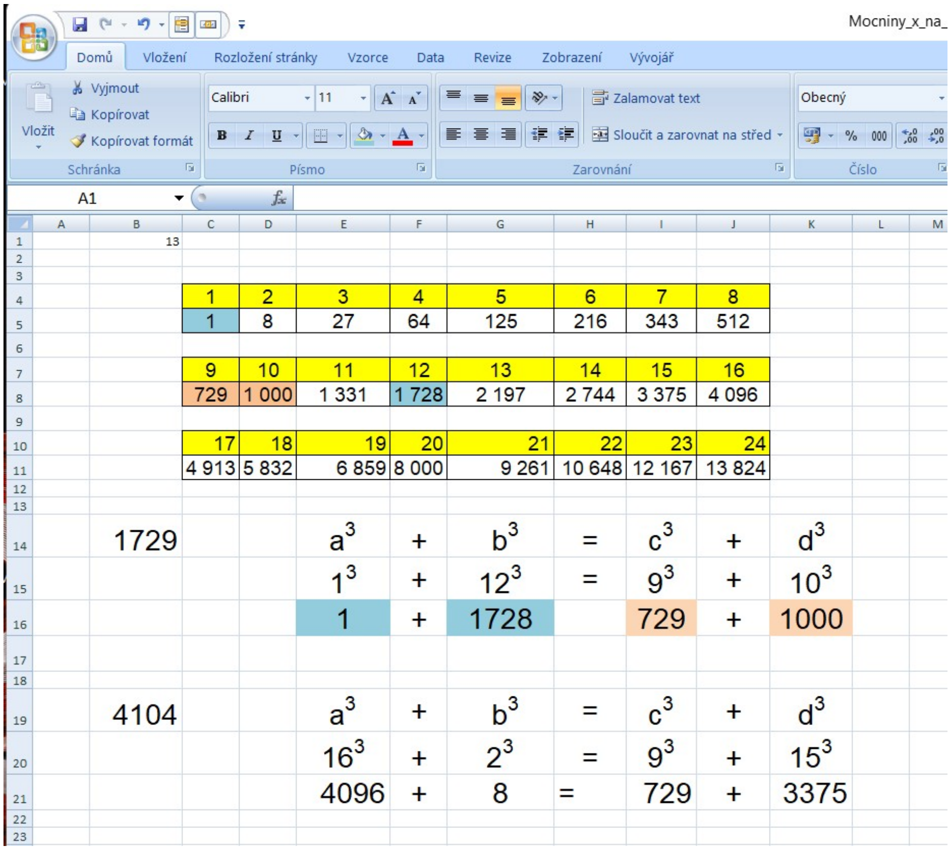
Slavný matematik Hardy jednoho dne šel navštívit svého nemocného přítele S. Ramanujana do sanatoria. A protože se oba velmi zajímali o čísla, Hardy při jejich setkání konstatoval, že taxík, kterým přijel, měl nezajímavé číslo 1729. Ramanujan s tím ale nesouhlasil, podle něj bylo číslo 1729 velmi zajímavé.

Najděte čísla, jejichž součet třetích mocnin dá číslo 1729: $(1729 = a^3 + b^3 = c^3 + d^3)$.
Komentář: Pomocí programů v Excelu mohou žáci zjistit příslušný rozklad, nebo mohou najít další čísla se stejnou vlastností.



Číslo	Dvojice (a,b)
1729	1,12 | 9,10
4104	2,16 | 9,15
13832	2,24 | 18,20
39312	2,34 | 15,33
704977	2,89 | 41,86
46683	3,36 | 27,30
216027	3,60 | 22,59
32832	4,32 | 18,30
110656	4,48 | 36,40
314496	4,68 | 30,66
216125	5,60 | 45,50
439101	5,76 | 48,69
110808	6,48 | 27,45
373464	6,72 | 54,60
593047	7,84 | 63,70
149389	8,53 | 29,50
262656	8,64 | 36,60
885248	8,96 | 72,80
40033	9,34 | 16,33

Obrázek 6: **Taxicab čísla v Excelu 1**



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		13									
4			1	2	3	4	5	6	7	8	
5			1	8	27	64	125	216	343	512	
7			9	10	11	12	13	14	15	16	
8			729	1 000	1 331	1 728	2 197	2 744	3 375	4 096	
10			17	18	19	20	21	22	23	24	
11			4 913	5 832	6 859	8 000	9 261	10 648	12 167	13 824	
14		1729			a^3	+	b^3	=	c^3	+	d^3
15					1^3	+	12^3	=	9^3	+	10^3
16					1	+	1728		729	+	1000
19		4104			a^3	+	b^3	=	c^3	+	d^3
20					16^3	+	2^3	=	9^3	+	15^3
21					4096	+	8	=	729	+	3375

Obrázek 7: **Taxicab čísla v Excelu 2**

Úlohu je možno zjednodušit. Žáci mohou hledat jen čísla, která lze zapsat jako součet druhých mocnin.

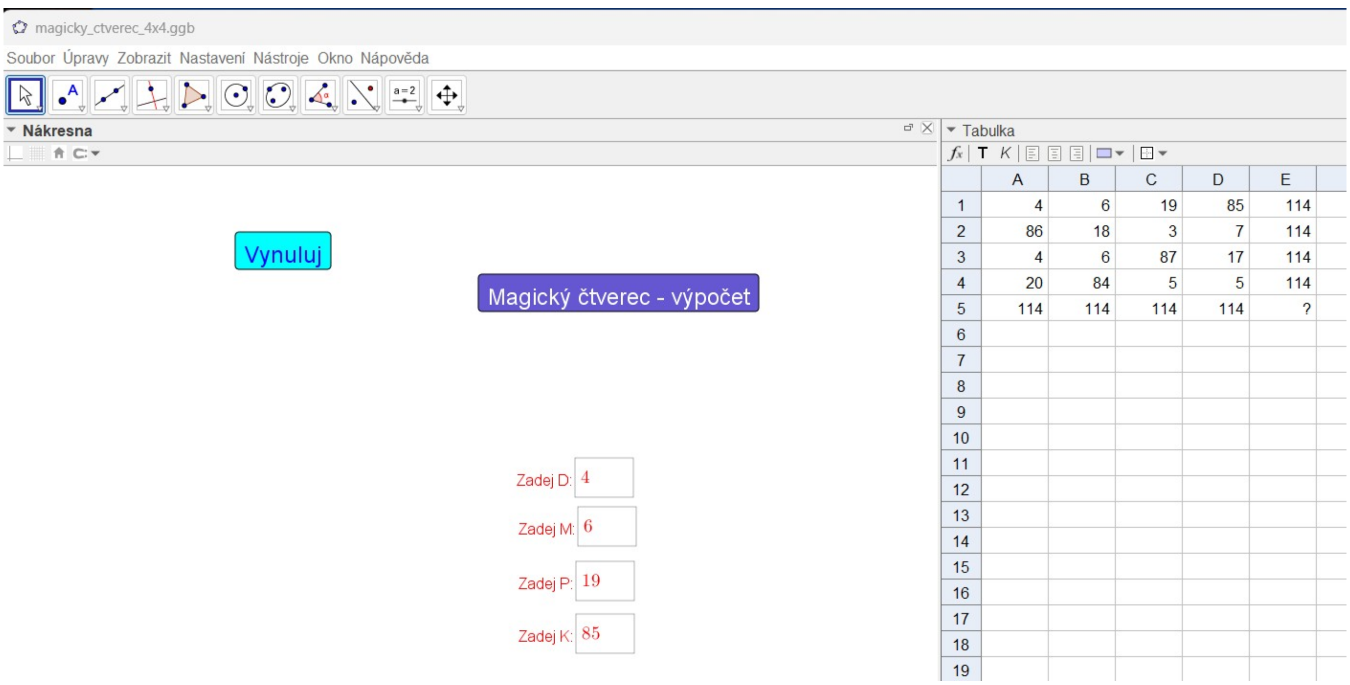
Úloha 3 - Magický čtverec

První řádek tohoto čtverce obsahuje datum narození slavného indického matematika Srinivasy Ramanujana - 22. 12. 1887. Ostatní čísla v tomto čtverci sice už nemají žádný reálný důvod, ale nejsou pouze náhodná. Všechna čísla v následujícím čtverci jsou totiž umístěna do svého pole na základě jednoho pravidla. Zkuste toto pravidlo najít.

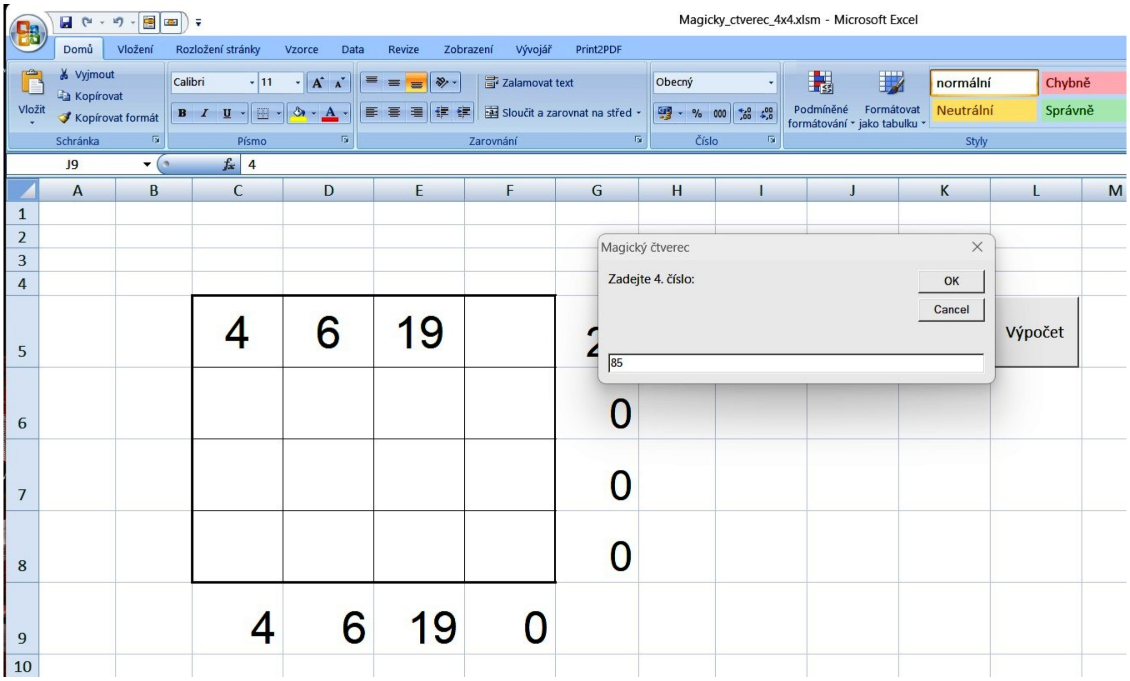
22	12	18	87
88	17	9	25
10	24	89	16
19	86	23	11

Obrázek 8: **Magický čtverec**

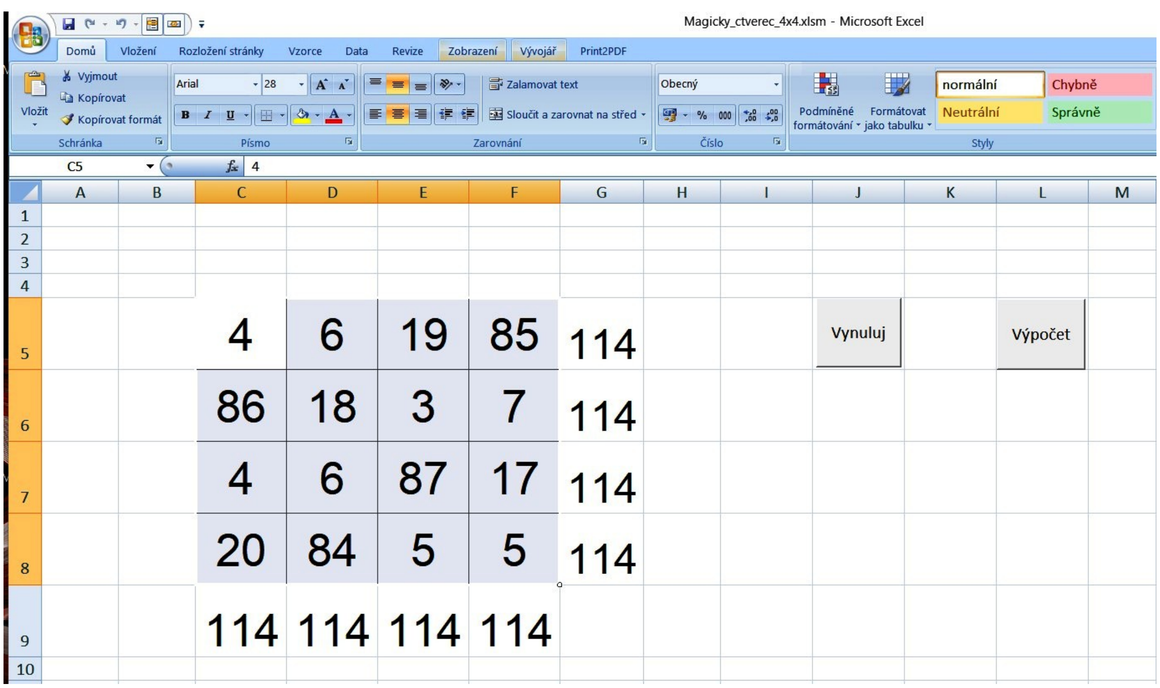
Komentář: Žáci mohou sestrojit magický čtverec, kde v prvním řádku bude datum jejich narození. Mají k dispozici programy v GeoGebře a Excelu, které jim pomohou s vyřešením úlohy.



Obrázek 9: **Magický čtverec 2 - pomocí GeoGebry**

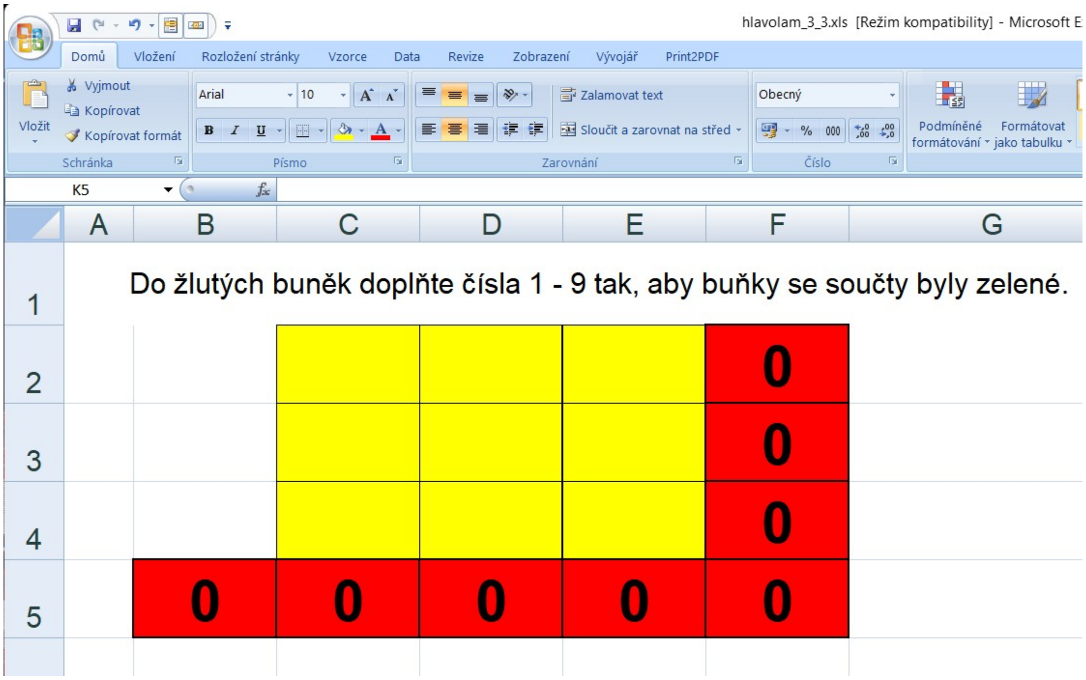


Obrázek 10: **Magický čtverec 2 - pomocí Excelu**

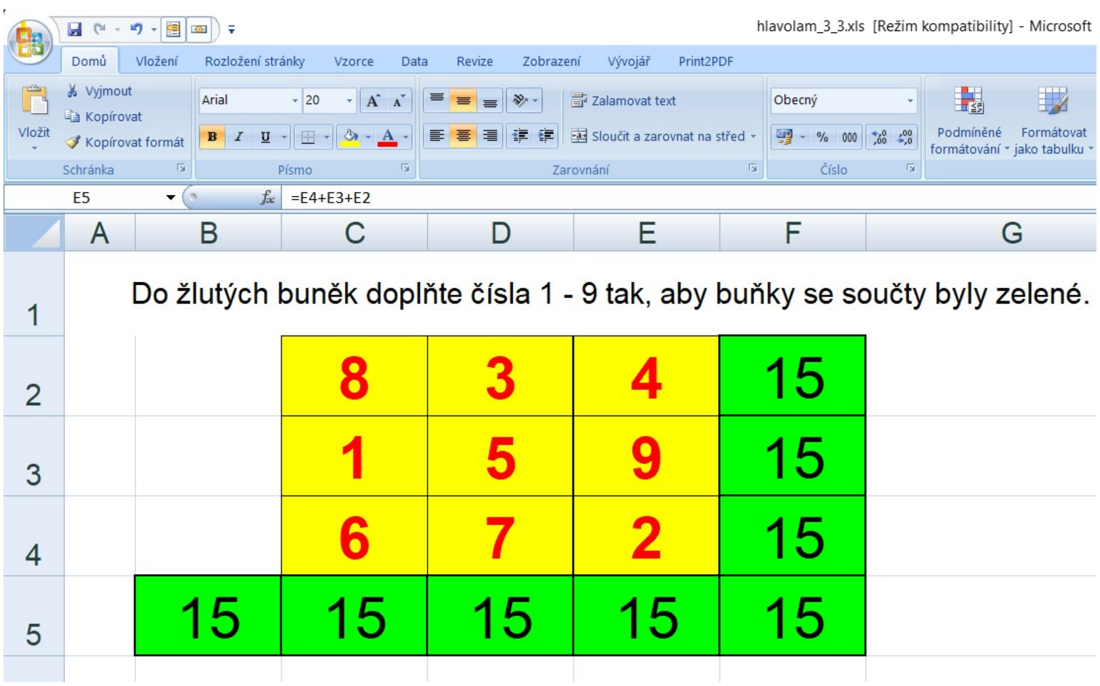


Obrázek 11: **Magický čtverec 3 - pomocí Excelu**

Dále mohou žáci řešit klasický magický čtverec 3×3. (Doplňte čísla 1 až 9).



Obrázek 12: **Magický čtverec 3×3 - zadání v Excelu**



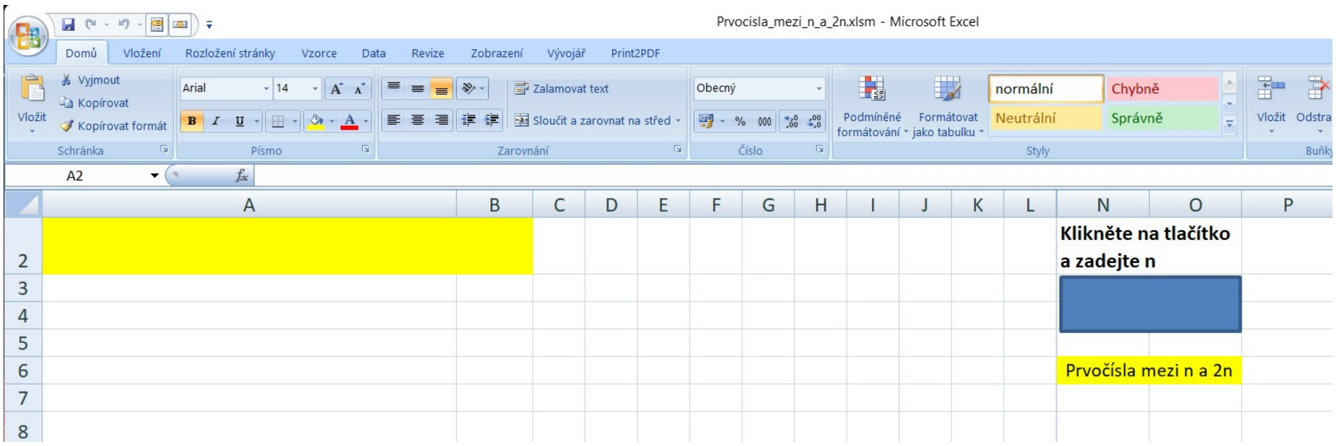
Obrázek 13: **Magický čtverec 3×3 - řešení v Excelu**

Úloha 4 - Prvočísla mezi n a $2n$

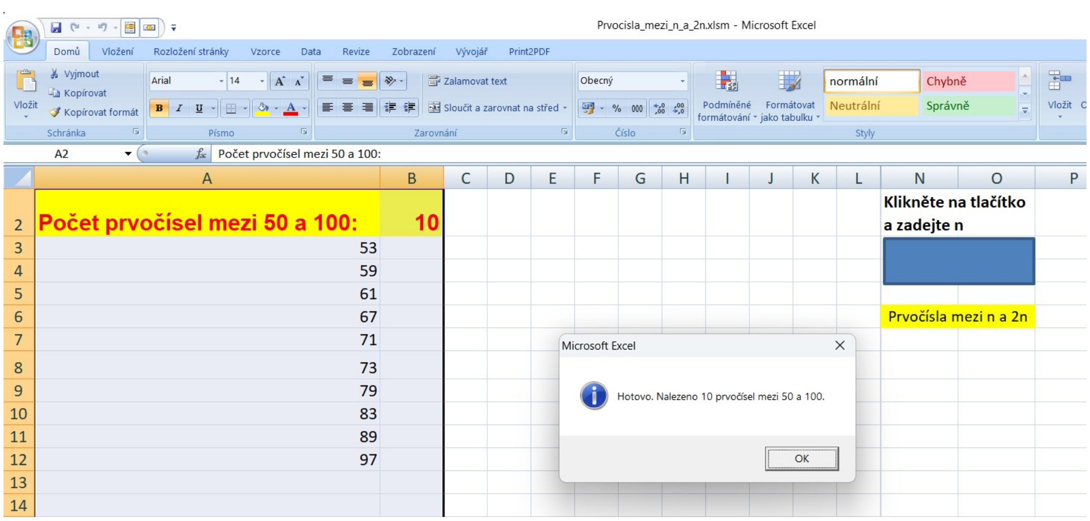
To, že jsou prvočísla velmi zajímavá čísla, si myslel již geniální indický matematik Srinivasa Ramanujan. Jeho objevy v oblasti prvočísel udivují matematiky dodnes. Vaším úkolem bude tedy zkusit si podobné objevování s prvočísly.

Zjistěte, kolik prvočísel je mezi čísly n a $2n$ pro různá malá n (např. 5, 10, 15, . . .). Platí, že vždy mezi těmito čísly najdeme alespoň jedno prvočíslo?

Komentář: Žáci zkouší hledat prvočísla mezi n a $2n$. Zkontrolovat si svá řešení zase mohou pomocí programů připravených v Excelu.



Obrázek 14: **Prvočísla mezi n a $2n$ - Excel**



Obrázek 15: **Prvočísla mezi n a $2n$ - Excel**

5 Závěr

Dozvěděli jsme se o životě slavného indického matematika S. A. Ramanujana a o jeho významných objevech. Úlohy pro nadané žáky mohou sloužit jako inspirace do výuky matematiky na ZŠ či v nižším ročníku SŠ. Digitální technologie běžně dostupné na základních a středních školách umožňují řešit úlohy, které ve spojení s Ramanujanovým příběhem obsahují značný motivační potenciál.

Zajímavost: V r. 1962 byla v Indii vydaná poštovní známka k připomínce 75. výročí narození S. Ramanujana:

Obrázek 16: Indická poštovní známka - 1962

Literatura

[1] Kanigel, R.: The Man Who Knew Infinity: A Life of the Genius Ramanujan, 1991.

doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.
Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy, Fakulta pedagogická
Západočeské univerzity v Plzni
Klatovská 19, 301 00 Plzeň
horajar@kmt.zcu.cz

Mgr. et Mgr. Soňa Königsmarková, Ph.D.
Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy, Fakulta pedagogická
Západočeské univerzity v Plzni
Klatovská 19, 301 00 Plzeň
skonig@kmt.zcu.cz

INTERAKTIVNÍ ÚLOHY ROZVÍJEJÍCÍ KOMBINATORICKÉ MYŠLENÍ ŽÁKŮ 1. STUPNĚ ZŠ

Marika Hrubešová[1], Terezie Machátová[2]

[1]Pedagogická fakulta JU v Českých Budějovicích, [2]Základní škola, Znojmo, náměstí Republiky 9

Abstrakt: Kombinatorické a logické myšlení je součástí našich životů už od narození, a proto je nutné ho rozvíjet již u žáků na prvním stupni ZŠ. S žáky je vhodné řešit takové úlohy, které jsou typické především svým experimentálním charakterem. Žáci během řešení experimentují, využívají logický úsudek, vypisují všechny možnosti nebo úlohy řeší pomocí grafického či jiného znázornění. Příspěvek ukazuje jednu z možností, jak předložit žákům kombinatorické úlohy zajímavou a hravou formou v atraktivním prostředí, které samo o sobě motivuje.

Klíčová slova: kombinatorika, digitální technologie, Genially, sbírka, interaktivní tabule

Interactive tasks developing combinatorial thinking in primary school pupils

Abstract: Combinatorial and logical thinking has been part of our lives since birth, which is why it is necessary to develop it in primary school pupils. It is appropriate to solve tasks with pupils that are primarily experimental in nature. While solving the tasks, pupils experiment, use logical reasoning, list all possibilities, or solve the tasks using graphical or other representations. The paper shows one of the possibilities of presenting combinatorial tasks to pupils in an interesting and playful way in an attractive environment that is motivating in itself.

Key words: combinatorics, digital technology, Genially, collection, interactive whiteboard

Úvod

Kombinatorika představuje důležitou součást matematického myšlení, která rozvíjí schopnost žáků systematicky uvažovat, plánovat a hledat všechny možné varianty řešení. Přestože bývá často spojována až s vyššími stupni vzdělávání, její základy lze přirozeně a smysluplně rozvíjet již na prvním stupni základní školy. V tomto období děti spontánně zkoumají různé možnosti a kombinace ve svém každodenním životě – například při skládání oblečení, vybírání si oblečení do školy, hledání možných řešení, jak postavit věž, jak si sestavit kopečky zmrzliny do kornoutu či při sestavování jídelníčku. Tyto situace poskytují přirozený základ pro úlohy, které vedou k pochopení základních principů kombinatoriky. Úkolem učitele je na těchto zkušenostech stavět, vhodně je strukturovat a přetvářet v hravé matematické aktivity, které podporují tvořivé myšlení i radost z objevování.

Cílem tohoto článku je představit netradiční sbírku kombinatorických úloh pro žáky prvního stupně základní školy v interaktivní aplikaci Genially.

1 Kombinatorika na 1. stupni ZŠ

Kombinatorické úlohy bychom mohly zařadit mezi nestandardní úlohy, které jsou pro žáka neobvyklé, ať už zadáním či způsobem řešení a vyžadují tvořivost žáka a jistou originalitu. Např. Lišková a Rezek (2015) zmiňují, že při práci s nestandardními úlohami se vytváří vhodný prostor pro narušení žákovských stereotypů, které se při výuce matematiky často vyskytují a jsou pro další vývoj matematického myšlení žáků škodlivé. Jedním z typických rysů nestandardních úloh je i více možných variant postupu při jejich řešení. Při výuce je třeba s těmito úlohami pracovat tak, aby se žáci mohli seznámit i s jinými myšlenkovými postupy, než které sami objevili. Pro každého žáka je cennou zkušeností porovnat, jak jeho spolužáci řeší stejný problém. Je velmi důležité, aby žák dovedl samostatně posoudit, které z předložených řešení je zajímavé, srozumitelné, přehledné a v neposlední řadě i efektivní. (Lišková, Rezek, 2015, s. 101)

Při řešení kombinatorických úloh žáci rozvíjí kombinatorické a logické myšlení, kritické usuzování a v neposlední řadě i srozumitelné a věcné argumentace (Příhonská, 2019). Blažková (2020) popisuje kombinatorické myšlení následovně. Jde zpravidla o vytváření specifických schopností a dovedností, při kterých se učíme:

- provádět výběr prvků z dané skupiny (množiny) podle určitého pravidla,
- provádět uspořádání prvků daným způsobem,
- najít metodu vyhledávání všech skupin prvků s požadovanou vlastností,
- poznat, zda se ve vybraných skupinách jedná o skupiny uspořádané nebo neuspořádané,
- rozhodnout, zda se prvky ve skupinách mohou nebo nemohou opakovat,

- formulovat pravidlo pro vyhledávání všech skupin s požadovanou vlastností. (Blažková, 2020, s. 1)

Kombinatorickými úlohami můžeme tedy rozumět takové úlohy, při kterých žáci vybírají prvky z nějaké množiny podle daných kritérií, uspořádávají prvky, které splňují zadané podmínky. Úlohy by měly být voleny takovým způsobem, aby vycházely ze zkušenosti žáků a z reálného života. Typickou kombinační úlohou je např. podávání rukou. V tomto případě žáci hledají počet všech možných uspořádaných dvojic vytvořených ze všech prvků množiny.

Příhonská a Břehovský (2017) zmiňují, že úlohy, které využívají základní kombinatorické úvahy, jsou zařazeny v podstatě ve všech učebnicích matematiky prvního stupně ZŠ, přičemž nejčastěji se jedná o úlohy s čísly, zaměřené na kombinování v rámci procvičování početních operací. Dále uvádí, že za vhodné didaktické pomůcky rozvíjející logicko-kombinační myšlení je možné považovat i celou řadu společenských her, jako je např. Rummikub, Domino, Kostky, Logic, Scrable, sj.

V Rámcovém vzdělávacím programu 2025 (NPI, 2024), který vychází ze Strategie vzdělávací politiky České republiky do roku 2030+, není kombinatorika explicitně uvedena, nicméně hraje důležitou roli v matematickém kurikulu na základní škole. Kombinatorické úlohy bychom mohli určitě zařadit do oblasti Logicko-matematické gramotnosti, dále Matematika a její aplikace do okruhu Číslo a proměnná, Geometrie, Statistika a pravděpodobnost a samozřejmě kombinačními úlohami rozvíjíme Klíčové kompetence k řešení problémů.

Kombinatorické úlohy by měly být pro žáky na prvním stupni ZŠ zajímavé, motivační a vhodně zadané tak, aby žáci mohli zkoumat, odhadovat, experimentovat a objevovat. Způsob, jakým žáci řeší kombinatorické úlohy na prvním stupni základní školy, je do velké míry závislý na věku, zkušenostech s matematikou a typu úlohy. Nejprve žáci využívají manipulativní strategie, při kterých si situaci vizualizují, tzn. s předměty pohybují, přeskupují a kombinují tak, aby zjistili všechny možnosti. Později začínají využívat grafické zápisy (např. stromový graf) či tabulky pro vypsání všech možností (nesystematicky, později systematicky).

2 Digitální technologie ve vzdělávání

Součástí moderní doby, moderního vyučování, jsou digitální technologie. Mezi jasné výhody patří např. zvýšený zájem a motivace žáků, aktivní zapojení žáků do vzdělávacího procesu, lepší vizualizace učební látky, individuální tempo učení, obohacení výuky o interaktivní prvky, rychlá úprava pro potřebný vzdělávací efekt, rychlá aktualizace materiálů, přirozený rozvoj informační gramotnosti apod.

V Rámcovém vzdělávacím programu 2025 pro základní vzdělávání se digitální technologie posilují jako klíčová kompetence napříč všemi předměty a zároveň se rozvíjí „nová“ Informatika, která klade větší důraz na porozumění principům fungování technologií, kybernetickou bezpečnost, etické využívání digitálního prostředí a aktivní roli žáka, včetně nástup umělé inteligence. (RVP ZV, 2025) Pro školy to znamená, že je třeba aktualizovat Školní vzdělávací program tak, aby reflektoval nové požadavky, přičemž Národní pedagogický institut (NPI) poskytuje metodickou podporu, různé kurzy a zajímavé zdroje.

Moderní materiály by měly být ve formě digitálních učebních materiálů a využívat by se online nástroje, které podporují individualizaci[1] výuky.

Existuje celá řada zajímavých online digitálních nástrojů vhodných do výuky matematiky. Jednou z nich je i aplikace Genially. Jedná se o online platformu pro tvorbu interaktivních a vizuálně atraktivních prezentací, testů, digitálních pracovních listů a dalších materiálů. Umožňuje kombinovat text, obrázky, animace a funguje zcela online, není třeba nic instalovat. (www.genial.ly) Učiteli tak stačí pouze interaktivní tabule, vytvořený materiál a je vše připraveno do výuky. Na této platformě je možné tedy vytvořit do výuky matematiky např. různé kvízy, prezentace, zajímavé úlohy s interaktivními prvky či i únikovou hru.

Genially také umožňuje snadnou aktualizaci a úpravu obsahu. Pokud je potřeba přidat nové úlohy nebo upravit stávající, lze to provést rychle a jednoduše, aniž by bylo nutné instalovat nebo aktualizovat software na straně uživatele.

Dalším důležitým aspektem technické realizace je zajištění spolehlivosti a bezpečnosti aplikace. Genially poskytuje robustní platformu, která je stabilní a bezpečná pro použití ve školním prostředí. Díky tomu mohou učitelé a žáci bez obav používat hru jako součást svého vzdělávacího procesu. (Šobová, 2024)

3 Interaktivní sbírka

Interaktivní sbírkou rozumíme soubor úloh, cvičení či příkladů, které jsou doplněny o digitální prvky umožňující aktivní zapojení žáky. Učitel tak může vidět nejen okamžitou zpětnou vazbu, ale vizualizace žákům pomáhá a motivuje při práci. Žáci zároveň mohou s daty a jednotlivými prvky aktivně manipulovat. Příkladem takové sbírky je interaktivní sbírka vytvořená v online prostředí Genially, zaměřená na seznámení žáků prvního stupně základní školy s kombinatorickými úlohami. Sbírka je navržena pro využití jak při samostatné práci žáků, tak při práci ve dvojicích či skupinách, případně jako podpůrný materiál při výuce s využitím interaktivní tabule. Učitel tak může pružně reagovat na potřeby žáků a volit úlohy odpovídající jejich aktuální úrovni.

Interaktivní sbírka s názvem „Město“ je zasazena do prostředí, které je žákům blízké a známé, a cíleně rozvíjí kombinatorické myšlení.

Ve hře se žáci pohybují městem a v jednotlivých budovách či na různých místech ve městě řeší kombinatorické úlohy. Sbírka Město zahrnuje celkem 8 hlavních lokací, např. škola, cukrárna, hřiště. Hra je rozdělena do tří částí odpovídajících jednotlivým úrovním obtížnosti pro žáky 1. až 3. ročníku základní školy. Každá úroveň je přizpůsobena věkovým i znalostním schopnostem žáků. Pro zvýšení atraktivity byla celá sbírka ilustrována v aplikaci Procreate.

Hra začíná přivítáním hlavní postavy, holčičky Aničky, která žáky provází celým herním prostředím. Po úvodním přivítání si žáci zvolí svůj ročník, čímž se nastaví úroveň obtížnosti úloh, které budou v průběhu hry řešit. Následně se zobrazí mapa města s vyznačenou budovou, ve které žáci zahajují svou cestu.

[1] Individualizace – pedagogický přístup, který přizpůsobuje metody, tempo, obsah a hodnocení vzdělávání potřebám, schopnostem a zájmům každého jednotlivého žáka.

Obrázek 1: Interaktivní sbírka „Město“

V daných budovách jsou rozmístěny buď jedna, či dvě úlohy. Na úvodní obrazovce hry je na levé straně umístěna lišta s osmi okýnky. Za každou splněnou úlohu se v okýnku objeví obrázek charakterizující daný příklad. Tento vizuální prvek umožňuje žákům přehledně sledovat svůj postup hrou a současně je motivuje k dalšímu řešení úloh.

V pravém horním rohu obrazovky žáci vidí zadání úlohy, zatímco ve spodní části obrazovky je znázorněno její řešení. U některých úloh je v horní části obrazovky k dispozici také nápověda. Na levém okraji obrazovky se nachází ikona domečku, prostřednictvím které se žáci po vyřešení úlohy mohou vrátit zpět k plánku města.

Obrázek 2: Motivační úloha

Po kliknutí na budovu se žákům nejprve otevře uvítací úkol, který není zaměřen na kombinatoriku. Tento úkol je zařazen s cílem motivovat žáky k řešení dalších úloh a zároveň umožnit i těm, kteří si s kombinatorickými úlohami nejsou jisti, zažít pocit úspěchu (viz obr. 2). Po vyřešení uvítacího úkolu se následně zpřístupní hlavní úloha v dané budově.

Obrázek 3: Ukázka úlohy

Celkem se ve sbírce nachází 24 motivačních úloh a 33 úloh kombinatorických. Na základě zkušeností dětí s podobnými typy úloh si učitel/ka může zvolit ve sbírce ročník, ve kterém dané úlohy s žáky vyřeší.

4 Závěr

Interaktivní sbírka vytvořená v prostředí Genially představuje vhodný didaktický prostředek pro zábavný a činnostně orientovaný rozvoj kombinatorického myšlení žáků prvního stupně základní školy. Díky své dostupnosti v online prostředí může sloužit nejen učitelům jako podpůrný výukový materiál, ale i dalším zájemcům o rozvoj kombinatorického myšlení. Do budoucna lze sbírku dále rozšiřovat o další typy kombinatorických úloh a přizpůsobovat ji potřebám výuky na prvním stupni základní školy.

Odkaz na hru: https://view.genially.com/666770b5a1d0630014dc19a7

QR kód s odkazem na hru:

Literatura

[1] Blažková, R. (2020): *Prvky kombinatoriky v učivu matematiky 1. stupně ZŠ*. Učební materiál. Odkaz: NPI (2025): https://is.muni.cz/el/ped/jaro2020/ZS1MK_PDM2/um/prvky_kombinatoriky.pdf

[2] *Genially*. Online. [cit. 2025-11-01]. Dostupné z: https://genially.com/

[3] Lišková, H., Rezek, P., Fuchs, E., Zelendová, E. apol. (2015). *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělání*. Praha: NÚV, 2015, [cit. 2025-11-01]. Dostupné z: https://clanky.rvp.cz/clanek/c/Z/20617/METODICKE-KOMENTARE-K-OBORU-MATEMATIKA-A-JEJI-APLIKACE.html

[4] Příhonská, J. (2019). *Kombinatorické úlohy v učivu primární školy*. In Elementary Mathematics Education Journal, Vol. , No. 1., s. 99 – 115

[5] Jana Příhonská; Jiří Břehovský. (2017). *Rozvíjení kombinatorického myšlení na prvním stupni základní školy*. In Učitel matematiky, Vol. 25, No. 4, 215–231 Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149108

[6] Národní pedagogický institut České republiky (2024). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání 2025* [on-line, cit. 2025-11-23]. Dostupné z: https://prohlednout.rvp.cz/zakladni-vzdelavani

[7] Šobová, T. (2024). *Tvorba pracovních listů z kombinatoriky pro první stupeň ZŠ s využitím interaktivní tabule*. Diplomová práce. České Budějovice: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky.

Marika Hrubešová
Pedagogická fakulta, Jihočeská Univerzita
Jeronýmova 10, České Budějovice
e-mail: mhrubesova@pf.jcu.cz

Terezie Machátová
Základní škola Znojmo, náměstí Republiky
náměstí Republiky 902/9, Znojmo
e-mail: terezie.sobova@zsrepubliky.cz

INTEGRACE UMĚLÉ INTELIGENCE DO VÝUKY MATEMATIKY NA ZÁKLADNÍ ŠKOLE S PŘÍKLADY DOBRÉ PRAXE

Miroslava Huclová

Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy, FPE, ZČU

Abstrakt: Článek se zabývá možnostmi integrace umělé inteligence (AI) do výuky matematiky na základní škole. V teoretické části je popsán význam digitálních technologií v kontextu rámcových vzdělávacích programů a zdůrazněna potřeba systematického a promyšleného začlenění AI do vzdělávacího procesu. Praktická část prezentuje konkrétní příklady výukových jednotek realizovaných v jednotlivých ročnících základní školy, které propojují matematické učivo s využitím nástrojů umělé inteligence – od tvorby interaktivních kvízů a komiksů až po generování hudby či porovnávání řešení matematických úloh mezi žákem a AI. Součástí je také analýza přínosů a rizik spojených s využitím AI a zaznamenaná zpětná vazba žáků, která potvrzuje zvýšený zájem o výuku, rozvoj kritického myšlení a hlubší porozumění matematickým konceptům. Studie ukazuje, že umělá inteligence může být významným podpůrným nástrojem výuky, pokud je používána zodpovědně, s ohledem na didaktické cíle a potřeby žáků.

Klíčová slova: AI, dobrá praxe, výuka matematiky.

Integrating artificial intelligence into elementary school mathematics education: Examples of best practices

Abstract: This article explores the possibilities of integrating artificial intelligence (AI) into mathematics instruction in elementary school. The theoretical section describes the importance of digital technologies in the context of national curriculum frameworks and emphasizes the need for a systematic and well-thought-out integration of AI into the educational process. The practical section presents specific examples of lesson units implemented in individual grades of elementary school that integrate mathematical content with the use of artificial intelligence tools—ranging from the creation of interactive quizzes and comics to the generation of music or the comparison of solutions to math problems between a student and AI. It also includes an analysis of the benefits and risks associated with the use of AI and recorded student feedback, which confirms increased interest in learning, the development of critical thinking, and a deeper understanding of mathematical concepts. The study shows that artificial intelligence can be a significant teaching aid if used responsibly, with consideration for didactic goals and students' needs.

Key words: AI, best practices, mathematics education.

Úvod

Digitální kompetence jsou na základních školách zásadní pro přípravu žáků na požadavky moderního digitálního světa, což je klíčové nejen pro jejich budoucí profesní úspěchy, ale i pro jejich osobní rozvoj (DigCompEdu, 2018). Tyto kompetence pokrývají širokou škálu dovedností, od základního ovládání počítače až po pokročilé využívání informačních a komunikačních technologií. (RVP ZV, 2023) Každá základní škola v České republice byla při aktualizaci svého Školního vzdělávacího programu (ŠVP) povinna zahrnout digitální kompetence, které reflektují současné požadavky digitální éry. Tato aktualizace zahrnovala integraci klíčových dovedností do školního kurikula s cílem připravit žáky na výzvy dnešního světa (RVP ZV, 2023). Školy dnes stojí před úkolem, jak využít možnosti, které tyto technologie nabízejí, a zároveň žáky připravit na svět, kde bude práce s inteligentními algoritmy naprostou samozřejmostí. Nové digitální technologie neustále vznikají. Doporučení podle nového RVP ZV (2025) ve vzdělávacím systému základní školy je zaměřit se na ty, které již prokázaly svou použitelnost v praxi. Toto se týká i umělé inteligence (AI). Podle Baidoo-Anu & Ansah (2023) je velkou výzvou je zavádění digitálních technologií a s tím souvisejících digitálních kompetencí učitelů do škol. Jedním z předmětů, kde lze potenciál umělé inteligence pozorovat je matematika.

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace má za úkol v pěti tematických celcích rozvíjet rozviji u žaka jeho logické, strategické, kritické i kreativní myšleni (RVP ZV, 2025) Umělá inteligence může pomoci učitelům v tvorbě moderních digitálních materiálů a podpořit proces učení u žáků (MŠMT, 2025). Implementace těchto změn v kurikulárních dokumentech na všech základních školách představuje zásadní krok vpřed k začleňování moderních technologií do vzdělávacího procesu a je nezbytná pro efektivní výuku digitálních kompetencí (Černý, 2023).

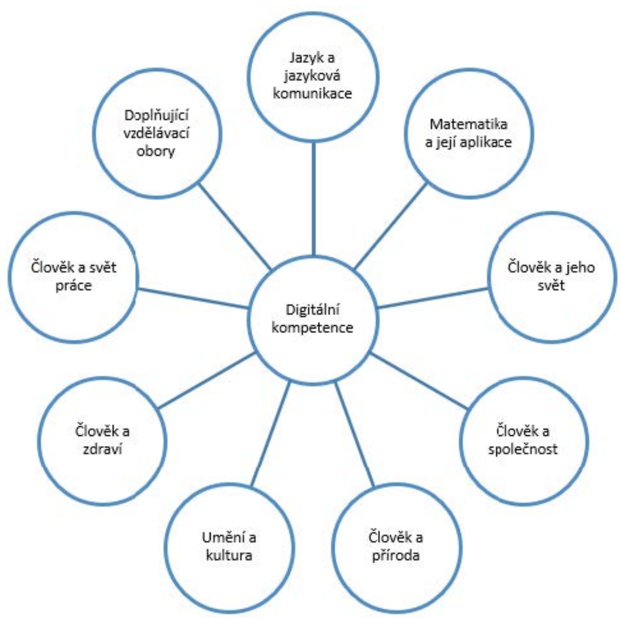
1 Podpora školám při zavádění generativní umělé inteligence (AI) do výuky

V rámci zavádění digitálních kompetencí do výuky došlo v roce 2021 k úpravě kurikulárních dokumentů na úrovni Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání (RVP ZV). Od roku 2024 všechny základní školy v České republice napříč vzdělávacími oblastmi systematicky rozvíjejí digitální kompetence žáků. Tento systém demonstruje obrázek 1. S tím úzce souvisí využití nástrojů využívající AI pro podporu celého vyučovacího procesu. Tímto nastavením se otevírají nové možnosti pro podporu učení, individualizaci vzdělávání a rozvoj dovedností potřebných pro 21. století. Využívání AI žáky je a bude ve školním prostředí stále běžnější. Současně však před učiteli stojí zodpovědný úkol – naučit žáky tento nástroj používat zodpovědně a smysluplně. Analytická zpráva Národního pedagogického institutu České republiky (NPI ČR) na základě výzkumného šetření konstatuje, že učitelé v průměru vnímají umělou inteligenci jako dlouhodobý trend a domnívají se, že by mělo být především úlohou školy naučit žáky smysluplnému využívání této technologie. (MŠMT, 2025)

Smysluplné začlenění umělé inteligence do vzdělávacího procesu vyžaduje systematický přístup, který reflektuje specifika školního prostředí i potřeby žáků. Prvním krokem je zmapování jejich zkušeností a postojů k AI, což umožňuje zohlednit jejich předchozí znalosti, očekávání i dostupné technické podmínky. Na tomto základě je možné formulovat vzdělávací cíle, které přesahují rámec tradiční faktografické výuky a zaměřují se na rozvoj dovedností, jež umělá inteligence nedokáže nahradit – zejména kritického myšlení, kreativity a schopnosti pracovat s informacemi (Černý, 2023).

Nedílnou součástí tohoto procesu je také průběžné hodnocení pokroku žáků, které nesleduje pouze dosažené výsledky, ale klade důraz i na samotný proces učení – schopnost reflektovat výstupy AI, formulovat kvalitní otázky a využívat získané poznatky v nových souvislostech. Vzdělávací aktivity by pak měly být plánovány tak, aby umělá inteligence sloužila jako podpůrný nástroj pro učení, nikoliv jako jeho náhrada. (AI dětem, 2025).

Kritická analýza výstupů, společná reflexe chyb a diskuse nad etickými a společenskými aspekty využívání AI by měly tvořit integrální součást výuky, která žákům umožní rozvíjet digitální kompetence a připravit se na svět, v němž bude spolupráce s umělou inteligencí běžnou součástí jejich profesního i osobního života. (MŠMT, 2025)



Obrázek 1: Naplňování digitálních kompetencí do všech vzdělávacích oblastí dle (DigCompEdu, 2018)

2 Využití umělé inteligence ve výuce matematiky příležitosti výzvy a etické aspekty

V rámci vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace je velký potenciál využití umělé inteligence pro přípravu materiálů pro učitele i jejich využití při výuce. Jahangiri et al. (2021) označují proces vytváření výukových materiálů jako náročný, přestože je v dnešní době k dispozici mnoho různorodých zdrojů.

Využití nástrojů umělé inteligence představuje pro učitele výzvu jak z hlediska jejich používání, tak porozumění jejich možnostem a limitům. Výzkumy poukazují na to, že učitelé musí mít dostatečné znalosti v oblasti AI, aby byli schopni kriticky uvažovat o procesech i výsledcích získaných s využitím těchto nástrojů (Druga et al., 2019).

Kim (2024) popsal tři fáze vývoje spolupráce mezi učiteli a AI:

- učitelé jako pasivní příjemci,
- učitelé jako aktivní uživatelé AI,
- učitelé jako konstruktivní partneři.

Generativní umělá inteligence však není bez problémů – nedokáže porozumět některým matematickým tématům (například geometrii) a může poskytovat nesprávná nebo neúplná řešení matematických problémů (Rane, 2023; Wardat et al., 2023). Pro zvýšení přesnosti a spolehlivosti je nezbytné poskytnout nástrojům umělé inteligence konkrétní kontext a oblast znalostí. S tím souvisí i přesné zadání problémů, dobře definované vstupní údaje a porovnání poskytnutých výsledků s jinými zdroji (Wardat et al., 2023).

Učitelé si také musí být vědomi etických otázek, jako je ochrana osobních údajů, duševní vlastnictví, otázky odpovědnosti a etické důsledky rozhodovacích procesů založených na AI (Rane, 2023; Wardat et al., 2023).

3 Praktická část příspěvku

Praktická část příspěvku se zaměřuje na ukázku realizovaných výukových jednotek v jednotlivých tematických okruzích vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. Nabízí učiteli konkrétní příklady využití nástrojů umělé inteligence ve výuce a zároveň poskytuje přehled jejich didaktického přínosu. Současně zaznamenává činnosti žáků během realizace výuky a navrhuje možnosti rozšíření o doplňkové aktivity vhodné k danému tématu.

Materiál je zpracován v souladu s tematickými okruhy stanovenými RVP ZV a koncipován tak, aby jej bylo možné využít ve všech ročnících základní školy. Součástí praktické části je rovněž zaznamenaná zpětná vazba žáků na výuku obohacenou o digitální technologie a prvky umělé inteligence.

3.1 Tvorba kvízu v prostředí Wayground – Dělitelnost

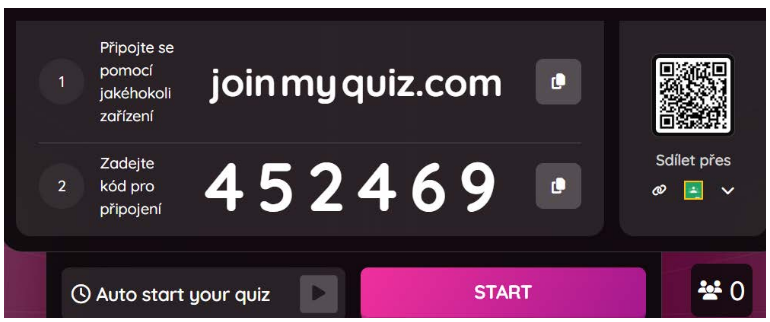
Cílová skupina: žáci 6. ročníku základní školy

Tematický okruh: Číslo a proměnná
Očekávaný výstup žáka: M-9-1-03 žák modeluje a řeší situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel (RVP ZV, 2023).
Tvorba kvízu a jeho řešení s využitím digitálních zařízení

Žáci řeší interaktivní kvíz vytvořený v prostředí Wayground (dříve Quizizz). Jedná se o komplexní digitální vzdělávací platformu, která umožňuje tvorbu zábavných kvízů, interaktivních lekcí, domácích úkolů, projektů a podporuje spolupráci žáků i učitelů.

Učitel může využít umělou inteligenci pro rychlou tvorbu návrhu kvízových otázek. Ty následně koriguje podle vzdělávacích cílů, doplňuje vysvětlení a případně modifikuje obtížnost. Poté promítne přístupové údaje ke kvízu žákům (např. QR kód, PIN), kteří se do prostředí přihlásí pomocí tabletů nebo počítačů.

Žáci pracují buď individuálně, což rozvíjí jejich samostatnost a odpovědnost, nebo ve skupinách, kde se učí komunikaci a spolupráci při řešení úloh. Kvíz okamžitě poskytuje zpětnou vazbu o správnosti odpovědí, což podporuje sebereflexi žáků. Učitel má zároveň okamžitý přehled o práci celé třídy i jednotlivců a může podle výsledků přizpůsobit další výuku.



Obrázek 2: Prostředí zadání kvízu žákům (Quizizz Inc. (DBA Wayground), 2025)

Rozšiřující a motivační aktivity:

- Brainstorming: Žáci se aktivně zapojují do přípravy kvízu – ve skupinách navrhují otázky, které mohou být následně zapracovány do finální podoby. Tím rozvíjejí své porozumění pojmům a přemýšlí nad zadáním z pohledu tvůrce.
- Domácí úkol nebo opakování: Kvíz lze nastavit jako domácí úkol, který žáci plní mimo vyučování. Mohou jej opakovat vícekrát a sledovat svůj pokrok.
- Tiskový výstup: Učitel může vytvořit tiskovou verzi kvízu ve formátu PDF a vložit ji do školního informačního systému jako doplňkový materiál k procvičení.

Žáci by měli být vedeni k:

- odpovědnému používání digitálních nástrojů při řešení úloh,
- efektivní práci s digitálním prostředím (přihlášení, orientace, komunikace),
- analýze a hodnocení výsledků – nejen znát správnou odpověď, ale i rozumět postupu, který k ní vede.

3.2 Chatbot ChatGPT jako motivační prvek – Procenta

Cílová skupina: žáci 7. ročníku základní školy
Tematický okruh: Číslo a proměnná
Očekávaný výstup žáka: M-9-1-06 – žák řeší aplikační úlohy na procenta (i pro případ, že procentová část je větší než celek) (RVP ZV, 2023).
Tvorba úloh ve formě komiksu

Žáci řeší aplikační úlohy zaměřené na výpočet procentové části. Tradiční zadání slovních úloh lze obohatit o komiksovou formu, která umožňuje lépe modelovat reálné situace vizuálně.

Při zadávání promptů pro generování obrázků je klíčové jejich přesné a promyšlené formulování od učitele. Motivačně lze žáky zapojit formou brainstormingu – žáci navrhují příklady a učitel z nich vytváří prompty.

Při generování obrázků s využitím umělé inteligence by měl učitel používat chatbot dostupný ve škole (např. Microsoft 365 nebo Google Workspace).

Žáci by měli být vedeni k:

- odpovědnému používání nástrojů,
- efektivnímu zadávání promptů,
- kritickému hodnocení výstupů a jejich souladu s realitou.

Rozšíření aktivity pro samostatnou práci žáků:

- Žáci mohou pracovat ve skupinách buď v počítačové učebně, nebo s využitím tabletů přímo ve třídě.
- Společně vytvářejí zadání ve formě komiksu, které slouží k procvičování učiva o procentech (výpočet základu, procentové části, počtu procent).
- Vytvořené úlohy lze uložit na společné úložiště, čímž vznikne rozsáhlá sada procvičovacích materiálů využitelná pro další výuku nebo domácí přípravu.

Ukázkový prompt

Prompt: Vytvoř retro styl obrázkový komiks (inspirovaný 50.–60. lety) složený ze 4 panelů, který bude srozumitelný pro žáky 7. ročníku základní školy při výuce procent. Panel 1: Maminka doma rozbaluje vánoční dárek – obálku s 3000 Kč (3 bankovky po 1000 Kč). Panel 2: V lednu maminka stojí v obchodě před regálem s kabelkami, její vysněná kabelka stojí 3800 Kč. Panel 3: Na výloze obchodu svítí velký nápis „Sleva 23 %“. Panel 4: Maminka stojí s kabelkou v ruce a zamyšleně přemýšlí, jestli má dost peněz, s textovou bublinou „Můžu si kabelku koupit?“. Výstup z uvedeného promptu je na obrázku 3 s využitím jazykového modelu ChatGPT.

Obrázek 3: Komiks ve formě úlohy na procenta (OpenAI, 2025)

3.3 Využití umělé inteligence jako motivačního prvku – Kruh a kružnice

Cílová skupina: žáci 8. ročníku základní školy
Tematický okruh: Geometrie v rovině a prostoru.
Očekávaný výstup žáka: M-9-3-04 – žák odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů (RVP ZV, 2023).
Seznámení s pojmem Ludolfovo číslo (π)

V úvodní fázi výuky se učitel zaměřuje na vysvětlení pojmu Ludolfovo číslo (π), které představuje klíčový matematický koncept pro výpočty obvodů a obsahů kruhu a kružnice.

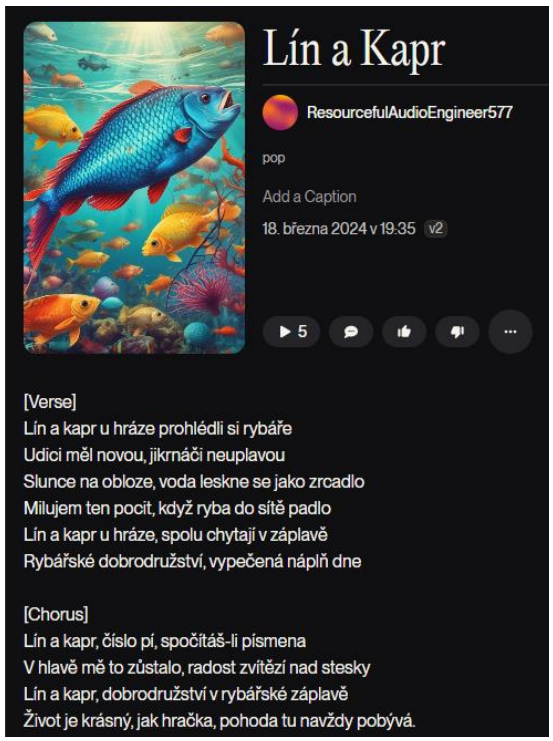
Vedle tradičního výkladu, který je vhodné doplnit o historické souvislosti vzniku a vývoje tohoto čísla, lze pro podporu zapamatování využít také mnemotechnickou pomůcku: „Lín a kapr u hráze prohlídli si rybáře, udici měl novou, jikrnáči neuplavou.“ Každé slovo této věty odpovídá počtu číslic π za desetinnou čárkou, což usnadňuje zapamatování a podporuje porozumění významu Ludolfova čísla v matematickém kontextu.
Propojení matematiky a hudby – aplikace SUNO

Využití aplikace SUNO představuje inovativní motivační prvek při zavádění pojmu Ludolfova čísla do výuky.

SUNO využívá umělou inteligenci k automatickému generování hudby z textového zadání a dokáže vytvořit kompletní hudební skladbu se strukturou typickou pro běžné písně – včetně slok, refrénů i instrumentálních pasáží (SUNO, 2025). Uživatel zadá pouze textový pokyn či preferovaný hudební styl a aplikace během několika sekund vygeneruje výslednou skladbu. Tento kreativní přístup:

- propojuje matematický obsah s hudební složkou,
- podporuje mezipředmětové vztahy,
- zvyšuje zájem žáků o probírané učivo,
- vede k aktivnímu zapojení do vzdělávacího procesu.

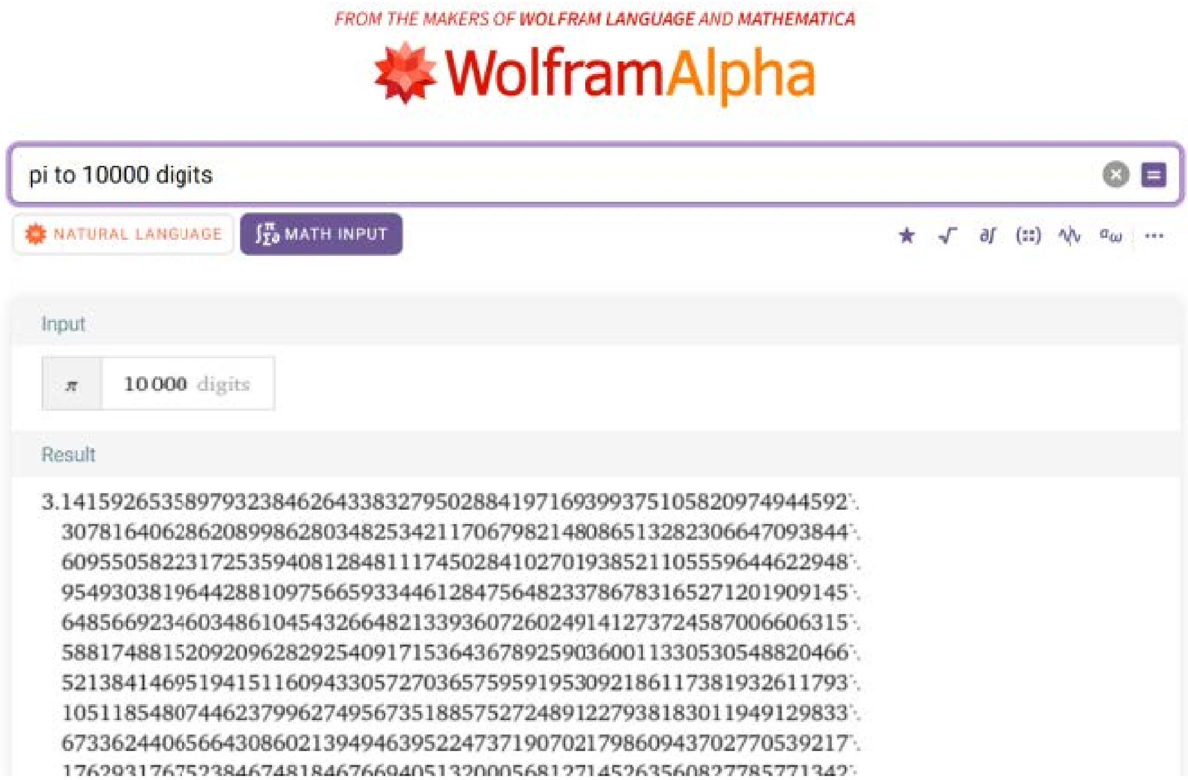
Výstup demonstruje obrázek 4. Píseň je k dispozici ke poslechu zde: https://suno.com/s/2LwlLGmF5MsJ74wu



Obrázek 4: Text písně vytvořené pomocí aplikace SUNO. (SUNO, 2025)

Tip pro učitele – vizualizace π s pomocí digitálních nástrojů

Při výuce matematiky může učitel žákům názorně ukázat hodnotu Ludolfova čísla (π) na libovolný počet desetinných míst s využitím digitálních technologií. Doporučeným nástrojem je Wolfram Alpha, který umožňuje zadat příkaz k výpočtu a zobrazení π s požadovanou přesností. Tato aktivita je nejen zajímavým zpestřením hodiny, ale také příležitostí k diskusi o nekonečnosti a iracionalitě Ludolfova čísla. Zároveň podporuje využití digitálních nástrojů při výuce matematiky.



Obrázek 5: Ukázka zadání vstupu a zobrazení čísla π na 10 000 desetinných míst (WolframAlpha, 2025)

3.4 Srovnávací úlohy, žák versus AI – Soustavy lineárních rovnic

Cílová skupina: žáci 9. ročníku základní školy
Tematický okruh: Číslo a proměnná
Očekávaný výstup žáka: M-9-1-08 formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav (RVP ZV, 2023).

Od výpočtu k pochopení řešení soustav rovnic s podporou AI

Žák samostatně vyřeší zadanou soustavu lineárních rovnic a následně své řešení porovná s řešením získaným pomocí umělé inteligence AI. Aktivita vede žáka k uvědomění si, že řešení matematického problému musí probíhat krok za krokem, musí být logické, smysluplné a srozumitelné, nikoli jen formálně správné.

Učitel motivuje žáky k řešení matematického problému a jeho ověření prostřednictvím AI. Cílem není pouze získání správného výsledku, ale především pochopení postupu řešení, rozvoj kritického myšlení a schopnosti efektivně pracovat s digitálními nástroji.

Žák zapíše postup svého výpočtu a zvolí vhodnou metodu řešení soustavy lineárních rovnic (např. sčítací, dosazovací nebo porovnávací). Poté stejnou úlohu zadá jazykovému modelu, který má škola k dispozici (např. ChatGPT, Microsoft 365 Copilot nebo Google Gemini). Obě řešení následně porovná a analyzuje pomocí připravené tabulky.

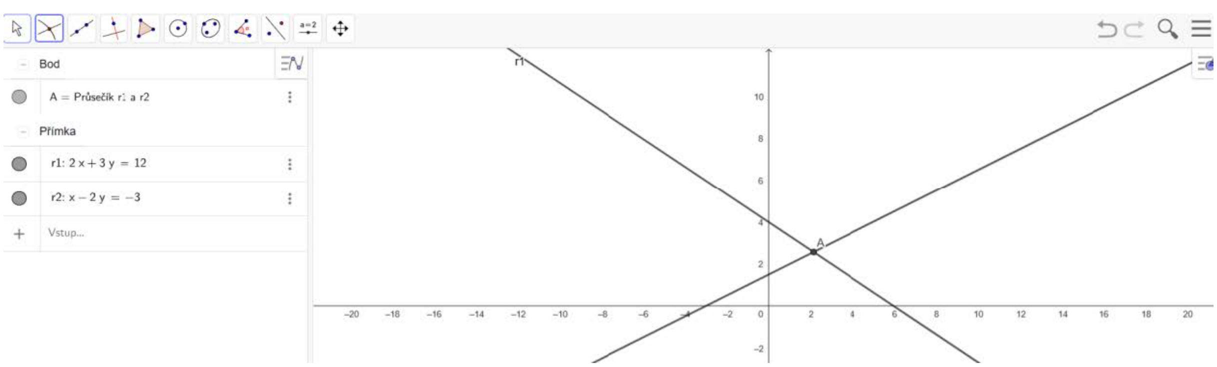
Kritérium	*Moje řešení*	*Řešení AI*	*Komentář*
Výsledek			
Použitá metoda			
Krok za krokem			
Jasnost vysvětlení			
Přesnost / chyby			
Co jsem udělal jinak?			
Co jsem se naučil?			

Tabulka 1: Pracovní tabulka žáků pro srovnávání řešení (zdroj vlastní)

Žáci si nejen procvičí řešení soustav rovnic, ale hlavně pochopí smysl jednotlivých kroků a naučí se kriticky hodnotit řešení – což je klíčová kompetence pro matematiku i práci s AI.

Rozšiřující a motivační aktivity:

- Vizualizace řešení: Žáci využijí dynamický software GeoGebra ke grafickému znázornění soustavy rovnic a ověření správnosti řešení.
- Propojení s praxí: Formulují reálnou situaci pomocí soustavy rovnic a ověří ji graficky v GeoGebra.
- Domácí úkol: Vytvoří a zobrazí vlastní soustavu rovnic v GeoGebra jako domácí úkol.



Obrázek 6: Grafické řešení soustavy lineárních rovnic (GeoGebra, 2025)

3.5 Realizace výuky v praxi

Výuka byla realizována v každém ročníku jedné základní školy. Počty žáků, kteří se výuky účastnili demonstruje tabulka. Žáci měli zadané materiály připravené na cloudovém úložišti.

Pro vlastní práci s digitálním zařízením měli při hodině k dispozici iPady. Učitel sledoval práci žáků a radil jim při řešení dílčích úkolů.

Třída	Téma	Počet žáků
6. ročník	Dělitelnost	25
7. ročník	Procenta	23
8. ročník	Kruh a kružnice	25
9. ročník	Soustavy lineárních rovnic	27

Tabulka 2: Počty žáků v jednotlivých ročnících (zdroj vlastní)

Hodnocení činnosti žáka, zpětná vazba

Výuka propojující matematiku s umělou inteligencí byla žáky přijata pozitivně. Většina z nich napříč ročníky oceňovala především netradiční a interaktivní formy práce, které výuku zpestřily a přinesly do ní nové podněty. Velký zájem vzbudila také samotná možnost pracovat s umělou inteligencí. Motivační prvky, jako například generování hudby k π pomocí aplikace SUNO nebo tvorba komiksů s využitím ChatGPT, přinesly do výuky kreativitu a prvek objevování, čímž zvýšily zájem a aktivitu žáků o probírané učivo. Využití digitálních zařízení pro odpovídání v kvízu zaměřeném na učivo o dělitelnosti pak zefektivnilo a zatraktivnilo fixační část výuky.

Žáci ocenili především možnost učinit výuku zajímavější a pestřejší. Při práci s digitálními technologiemi přistupovali většinou zodpovědně a aktivně se zapojovali do plnění jednotlivých úkolů. V 9. ročníku byli schopni samostatně využívat chatbot Microsoft 365 Copilot, poskytovat zpětnou vazbu k jednotlivým činnostem a doplňovat ji do připravené tabulky.

Aktivní práce s digitálními nástroji v kombinaci s reálnými úlohami pomohla žákům lépe porozumět praktickému významu matematiky. V následující hodině matematiky byl se žáky veden nestrukturovaný rozhovor, během kterého sdíleli své dojmy a postřehy. K jednotlivým aktivitám byly zaznamenány jejich odpovědi, které dokládají pozitivní přijetí tohoto přístupu.

Kruh a kružnice

„Nikdy bych neřekl, že se dá číslo π vysvětlit i pomocí písničky. Bylo to zajímavé, pamatuji si ho na více míst."

„Mně se líbilo, že jsme si k matematice vytvořili hudbu, která nám pomohla zapamatovat si číslo. Bylo to jiné, k matice písničky jsem ještě nezažila. Vzpomněla jsem si na Dádu, která měla vyjmenovaná slova"

„Překvapilo mě, že AI dokáže vytvořit hudbu podle pár slov. Super."

Procenta

„Vymýšlení promptů bylo těžší, než jsem čekal. Museli jsme přesně popsat, co chceme, jinak výsledek nebyl podle představ."

„Líbilo se mi, že jsme si úlohy vytvořili sami a mohli jsme je udělat vtipně nebo zajímavě."

„Bylo super vidět, jak AI nakreslí přesně to, co napíšeme. Ale někdy to udělalo něco jiného, a tak jsme museli upravit zadání."

„Zaujalo mi, jak jste nám říkala o velké spotřebě energie na obrázky."
Dělitelnost
„Kvíz byl pěkný a hned jsem viděl, kde jsem udělal chybu."
„Líbilo se mi, že jsme zábavně se učili. Bylo to mnohem lepší než psát test do sešitu."
Soustavy lineárních rovnic
„Jsem rád, že jsem viděl, že AI občas udělala chybu. Nemůže věřit všemu co napíše AI."
„Díky porovnání jsem pochopil, kde jsem se ve výpočtu spletl. Bylo to jako mít chytrého kámoše."
„Zjistil jsem, že AI umí úlohy vyřešit různými způsoby. Někdy byl správný, někdy dobrý."
„Líbilo se mi hodnotit svoje řešení. Nutilo mě to přemýšlet nad tím, proč to tak počítám."

4 Rizika využití AI při výuce matematiky

Integrace umělé inteligence do vzdělávání na základních školách přináší řadu přínosů, avšak zároveň i určitá rizika, která je nutné pečlivě zvažovat a preventivně řešit.

Jedním z významných rizik je nadměrná závislost žáků na AI, kdy si mohou zvyknout spoléhat na automatizované odpovědi a tím postupně ztrácet schopnost samostatně přemýšlet a řešit problémy. Tento přístup může negativně ovlivnit rozvoj kritického a logického myšlení a vést k povrchnímu porozumění učivu.

Dalším rizikem je nesprávnost nebo zkreslení informací generovaných umělou inteligencí. Pokud žáci nekontrolují jejich správnost a pravdivost, mohou si vytvářet chybné představy a nesprávně chápat učivo. S tím souvisí také nízká úroveň digitální gramotnosti a bezpečnosti, kdy žáci často nerozumí tomu, jak technologie fungují, jaká data sdílejí a jak je chránit.
Rizika spojená s konkrétními aktivitami

Aktivita 1 – Kvíz: Žáci mohou bez hlubšího přemýšlení pouze mechanicky vybírat odpovědi, aniž by se zamýšleli nad jejich správností. Tím se snižuje efektivita procvičování a oslabuje rozvoj logického myšlení.

Aktivita 2 – Komiks: Výsledkem může být chybný nebo nejasný výstup, z něhož není možné zpětně vyčíst vstupní údaje. To ilustruje například obrázek 4, kde lze diskutovat o nominální hodnotě bankovek. Navíc je tvorba obrázků časově náročná, což může omezit využití aktivity v běžné výuce.

Aktivita 3 – Píseň: Existuje riziko generování nevhodného textu. Samotná znalost čísla π zde navíc není cílem výuky – důležitější je, aby žáci dokázali konstantu aplikovat v praktických úlohách.

Aktivita 4 – Soustava rovnic: Žáci mohou mít tendenci bezvýhradně důvěřovat výstupům AI, aniž by je porovnávali se svým vlastním řešením. Tím se snižuje jejich motivace k ověřování správnosti výsledků a k reflexi vlastního postupu.

Tato rizika je vhodné otevřeně komunikovat se žáky, systematicky je vést ke kritickému myšlení a učit je ověřovat a reflektovat výstupy generované umělou inteligencí. Pouze tak lze zajistit, že AI bude ve výuce efektivním a bezpečným nástrojem pro rozvoj dovedností žáků.

5 Závěr

Současně se ukazuje, že úspěšné využití umělé inteligence ve výuce vyžaduje promyšlený didaktický přístup, který bere v úvahu jak vzdělávací cíle, tak i potenciální rizika. Klíčovou roli zde hraje učitel – jako průvodce, facilitátor a kritik výstupů AI – který žáky vede k reflexi, ověřování správnosti informací a zodpovědnému využívání digitálních nástrojů.

Z provedené analýzy vyplývá, že umělá inteligence by měla být ve vzdělávacím procesu chápána nikoliv jako náhrada tradiční výuky, ale jako podpůrný nástroj, jenž rozšiřuje možnosti učení a umožňuje individualizovat výuku podle potřeb žáků. Pokud je AI využívána promyšleně, může významně přispět nejen k hlubšímu porozumění matematickému učivu, ale i k rozvoji klíčových kompetencí potřebných pro život a profesní uplatnění ve 21. století.

Literatura

[1] AI dětem. (2025). *Kurikulum umělé inteligence*. Retrieved September 29, 2025, from https://kurikulum.aidetem.cz/

[2] Baidoo-Anu, D., & Ansah, L. O. (2023). Education in the era of generative artificial intelligence (AI): Understanding the potential benefits of ChatGPT in promoting teaching and learning. *Journal of AI, 7*(1), 52–62.

[3] Biton, Y., Segal, R., & Alush, K. (2025). How utilizing generative AI when addressing pedagogical and mathematical events contributes to mathematics teacher educators' TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge). *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST), 13*(4), 895-913. https://doi.org/10.46328/ijemst.4928

[4] Černý, M. (2023). *DigCompEdu: Digitální kompetence učitelů od teorie k praxi*. Národní pedagogický institut České republiky. https://www.npi.cz/images/publikace/DigCompEdu.pdf

[5] DigCompEdu. (2018). *Národní pedagogický institut České republiky*. https://doi.org/10.2760/159770

[6] Druga, S., Vu, S. T., Likhith, E., & Qiu, T. (2019). Inclusive artificial intelligence literacy for kids around the world. In *FL2019 Proceedings of FabLearn 2019*. (pp. 104–111). https://doi.org/10.1145/3311890.3311904

[7] GeoGebra. (2025). *GeoGebra nástroje a materiály*. Retrieved October 9, 2025, from https://www.geogebra.org/

[8] Jahangiri, J., Segal, R., Stupel, M. (2021). Angle-side properties of polygons inscribable in an ellipse. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 53*:7, 1973- 1982, DOI: 10.1080/0020739X.2021.1919769

[9] Kim, J. (2024). Leading teachers' perspective on teacher-AI collaboration in education. *Education and Information Technologies, 29*(7), 8693–8724. http://dx.doi.org/10.1007/s10639-023-12109-5

[10] MŠMT. (2025). *Podpora škol při zavádění umělé inteligence do výuky*. Edu.cz. Retrieved September 29, 2025, from https://edu.gov.cz/digitalizujeme/ai/

[11] OpenAI. (2025). *ChatGPT (GPT-5)* [Velký jazykový model]. Retrieved October 2, 2025, from https://chatgpt.com/

[12] Quizizz Inc. (DBA Wayground). (2025). *Wayground*. Retrieved October 9, 2025, from https://wayground.com

[13] Rane, N. (2023) Enhancing mathematical capabilities through ChatGPT and similar generative artificial intelligence: Roles and challenges in solving mathematical problems. *SSRN Electronic Journal*. http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.4603237

[14] RVP ZV. (2023). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. Edu.cz. Retrieved September 29, 2025, from https://edu.gov.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/

[15] RVP ZV. (2025). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. Retrieved September 29, 2025, from https://prohlednout.rvp.cz/zakladni-vzdelavani

[16] SUNO. (2025). *Suno — AI Music*. Retrieved September 30, 2025, from https://suno.com/

[17] Wardat, Y., Tashtoush, M. A., AlAli, R., & Jarrah, A. M. (2023). ChatGPT: A revolutionary tool for teaching and learning mathematics. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 19*(7), em2286.

[18] WolframAlpha. (2025). Retrieved October 2, 2025, from https://www.wolframalpha.com/

Miroslava Huclová
Katedra matematiky, fyziky a technické
výchovy, FPE, ZČU
Univerzitní 2732/8, 301 00, Plzeň
e-mail: huclovam@kmt.zcu.cz

KDYŽ CHATBOTI VYSVĚTLUJÍ GEOMETRII: DEFINICE, JAZYK, CHYBY A DIDAKTICKÉ SOUVISLOSTI

Magdalena Krátká, Michaela Tichá, Jiří Přibyl

Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta, Univerzita J. E. Purkyně, Ústí nad Labem

Abstrakt: Generativní jazykové modely (LLM) vstupují do matematiky způsobem, který zásadně proměňuje roli jazyka, pojmové struktury i didaktického kontraktu. V geometrii – oboru, kde jsou definice, klasifikace a jazykové nuance nositeli klíčového významu – působí jejich odpovědi obzvlášť problematicky. V tomto článku představujeme syntézu dvou výzkumů, které se zaměřily na interakce mezi LLM a elementární geometrií v českém prostředí: (1) případového zkoumání otázky „Je čtverec obdélník?“, v němž jsme u sedmi modelů testovali čtyři varianty dotazu v češtině a angličtině, a (2) rozsáhlé analýzy 480 odpovědí šesti LLM na 40 geometrických úloh ve dvou jazycích. Výsledky ukazují, že jazykové modely systematicky uplatňují angloamerické inkluzivní definice, zaměňují blízké pojmy, vykazují prototypové zkreslení a v češtině produkují signifikantně více chyb než v angličtině. Tyto jevy interpretujeme skrze teorii didaktického kontraktu, jazykové diversity v matematice, van Hieleho model a Fischbeinův koncept. Diskutujeme dopady na práci učitele, na žákovské porozumění a na způsob, jakým může být AI produktivně integrována do výuky matematiky.

When Chatbots Explain Geometry: Definitions, Language, Errors, and Pedagogical Implications

Abstract: Large language models (LLMs) are entering the field of mathematics in a way that fundamentally transforms the role of language, conceptual structures, and the didactic contract. In geometry—a field where definitions, classifications, and linguistic nuances carry crucial significance—their responses pose particular challenges. In this article, we present a synthesis of two studies that focused on the interactions between LLMs and elementary geometry in the Czech context: (1) a case study of the question “Is a square a rectangle?”, in which we tested four variants of the query in Czech and English across seven models, and (2) an extensive analysis of 480 responses from six LLMs to 40 geometric tasks in two languages. The results show that language models systematically apply Anglo-American inclusive definitions, confuse closely related concepts, exhibit prototypical bias, and produce significantly more errors in Czech than in English. We interpret these phenomena through the theory of the didactic contract, linguistic diversity in mathematics, van Hiele's model, and Fischbein's concept. We discuss the implications for teachers' work, students' understanding, and the ways in which AI can be productively integrated into mathematics instruction.

Článek je publikován v časopise *South Bohemia Mathematical Letters*, Vol. 33 (2025), No. 1
Dostupné z: https://home.pf.jcu.cz/~sbml

HRAVÁ MATEMATIKA S POČÍTAČEM: VÝVOJ A REALIZACE KROUŽKU PRO DĚTI

Zuzana Morávková, Petra Schreiberová[1], Jana Volná[2], Petr Volný[2]

[1]Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, FS, VŠB-TUO, [2]Katedra matematiky, FAST, VŠB-TUO

Abstrakt: Příspěvek prezentuje zkušenosti s přípravou a realizací volnočasového kroužku „Hravá matematika s počítačem“, který probíhá v rámci Junior univerzity na VŠB–TUO. Kroužek je zaměřen na rozvoj matematické a geometrické gramotnosti, logického myšlení a prostorové představivosti dětí prostřednictvím softwaru GeoGebra. Zaměříme se na vývoj jeho koncepce v průběhu období 2021-2025 a představíme dynamické ukázky aktivit i výstupy studentů.

Klíčová slova: GeoGebra, matematika, Junior univerzita, technologie ve vzdělávání

Playful Mathematics with Computers: Development and Implementation of a Program for Children

Abstract: The article presents experiences with the preparation and implementation of the program "Playful Mathematics with Computers", which takes place within the Junior University at VŠB–TUO. The program is focused on the development of mathematical and geometric literacy using the GeoGebra software. We will focus on the development of its concept during the period 2021-2025 and present dynamic examples of activities and children's outputs.

Key words: GeoGebra, interactive learning, mathematics, Junior University

Úvod

Od roku 2012 naplňuje již zavedená značka Zlepši si techniku tzv. třetí roli univerzity a to propojení akademického prostředí se základními a středními školami, firmami a širokou veřejností. Smyslem a cílem tohoto projektu je dlouhodobě podporovat zájem

Obrázek 1: Zlepši si techniku

dětí a mládeže o technické a přírodovědné obory prostřednictvím atraktivních vzdělávacích aktivit, workshopů, soutěží a tematických kroužků.

Jedná se o funkční systém založený na spolupráci mezi univerzitou a školami, buduje síť lektorů a mentorů z řad akademických pracovníků a nabízí široké spektrum vzdělávacích, rozvojových a motivačních programů pro žáky, studenty i pedagogy. V současnosti je v nabídce více než 200 různých programů — od exkurzí, přednášek a workshopů až po projektové dny a „třídy vynálezců“.

Do systému je zapojeno přibližně 271 škol, přes 1 000 registrovaných pedagogů a na aktivitách se každoročně podílí více než 250 lektorů. Každý rok se uskuteční kolem 250 akcí, kterých se zúčastní přibližně 6 000 žáků základních a středních škol.

Obrázek 2: Zlepši si techniku - workshop pro děti

Zkušenosti a ohlasy škol potvrzují, že propojení výuky s reálným prostředím univerzity přináší nové impulzy do výuky a motivuje žáky k hlubšímu zájmu o techniku a přírodní vědy.

1 Junior univerzita na VŠB–TUO

Potřeba přímé komunikace se žáky také ve volném čase vedla od roku 2019 k přípravě nového formátu Junior univerzita rozšiřující nabídku v systému Zlepši si techniku. S tím souvisela i tvorba nového webového prostředí. Zájemci (6-19 let) mají možnost se registrovat kdykoliv v průběhu roku a následně si sami z aktuální nabídky vybrat, do které aktivity se zapojí. Studovat lze i několik let za sebou.

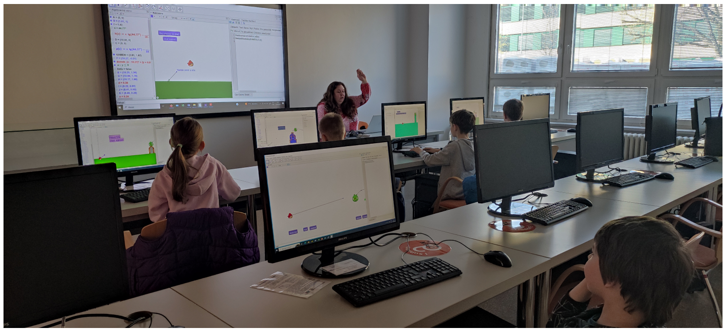
Obrázek 3: Zlepši si techniku - Junior univerzita

Pro větší motivaci k absolvování aktivit a k pokračování ve studiu byl navržen systém hodnocení a odměn. Žáci za absolvování jednotlivých aktivit získávají na svůj osobní účet body, odznaky či diplomy, které vedou k získání titulů. Od spuštění pilotního ročníku v říjnu 2021 se do Junior univerzity registrovalo přes 2 000 žáků a v nabídce je již více než 130 programů.

Obrázek 4: Junior univerzita - systém odměn

První slavnostní promoce se uskutečnila v červnu 2022 a dosud se může pochlubit 287 „promovanými“ absolventy.

Více informací je dostupných na webu: https://www.zlepsisitechniku.vsb.cz/junior-univerzita.



Obrázek 5: Junior univerzita - kroužek

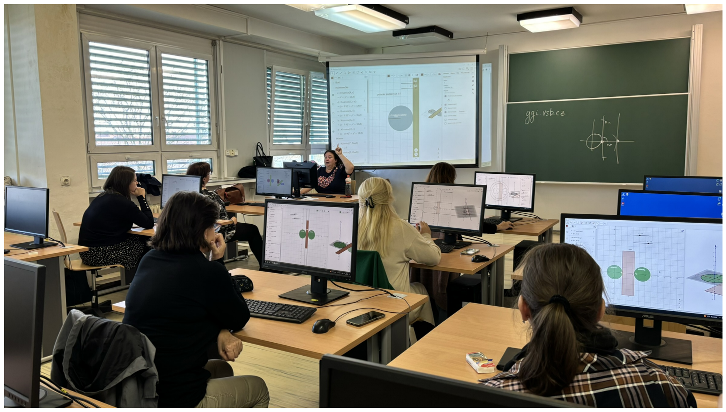
Obrázek 6: Junior univerzita - první promoce

2 GeoGebra Institut Ostrava

V roce 2016 byl na VŠB–TUO založen GeoGebra Institut Ostrava, v současné době jej tvoří šest členů nejen z řad Katedry matematiky na Fakultě stavební a z Katedry matematiky a deskriptivní geometrie na Fakultě strojní. Jednou z našich hlavních aktivit a cílů je podpořit zájem žáků středních a základních škol o studium technických oborů na vysokých školách a propagace naší školy. Z těchto důvodů se již od začátku vzniku institutu aktivně podílíme na realizaci popularizačních a propagačních akcí. Hlavní činností je tedy také organizace workshopů pro žáky i učitele, které již od začátku vzniku institutu nabízíme v rámci systému Zlepši si techniku. O workshopy je velký zájem, každý rok proběhne realizace cca 12 akcí.

Díky získaným zkušenostem z realizovaných akcí pro školy a spoustě kladných ohlasů jsme se rozhodli nabídnout aktivity v podobě kroužků také pro formát Junior Univerzity.

Do nabídky programů Junior univerzity byl navržen kroužek původně nazvaný „Hry s GeoGebrou“, který byl realizován od samotného začátku. Pilotní běh proběhl v listopadu



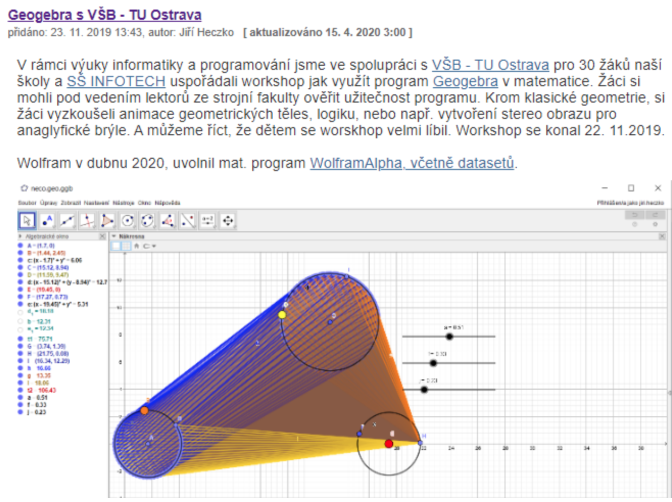
Obrázek 7: Workshop pro učitele

Obrázek 8: Workshop pro žáky gymnázia

2021. Věková skupina účastníků se postupně ustálila na 8–14 letech, jelikož starší žáci o program nejevili větší zájem. Od října 2022 byl kroužek rozdělen podle zkušeností s programem GeoGebra na dva, a to

- Hry s GeoGebrou I – vedli Jana Volná a Petr Volný,
- Hry s GeoGebrou II – vedly Zuzana Morávková a Petra Schreiberová.

Výuka probíhala jednou za 14 dní, jeden cyklus zahrnoval 6 hodinových lekcí. Jelikož někteří rodiče a děti neznali program GeoGebra, tak jsme od roku 2024 upravili název na „Hravá matematika s počítačem“. Ve stejném roce došlo ještě k další velké změně a to z důvodu ukončení projektu, kroužek se stal placeným. Na jaře 2025 byl do nabídky přidán navazující kurz pro pokročilejší žáky, který zahrnoval 8 lekcí a reagoval na rostoucí zájem i poptávku rodičů.



Geogebra s VŠB - TU Ostrava

přidáno: 23. 11. 2019 13:43, autor: Jiří Heczko [**aktualizováno 15. 4. 2020 3:00**]

V rámci výuky informatiky a programování jsme ve spolupráci s VŠB - TU Ostrava pro 30 žáků naší školy a SŠ INFOTECH uspořádali workshop jak využít program Geogebra v matematice. Žáci si mohli pod vedením lektorů ze strojní fakulty ověřit užitečnost programu. Krom klasické geometrie, si žáci vyzkoušeli animace geometrických těles, logiku, nebo např. vytvoření stereo obrazu pro anaglyfické brýle. A můžeme říct, že dětem se worskhop velmi líbil. Workshop se konal 22. 11.2019.

Wolfram v dubnu 2020, uvolnil mat. program WolframAlpha, včetně datasetů.

Obrázek 9: Zpětná vazba - ZŠ DaE Zátopkovy

GeoGebra u nás ve škole už počtvrté

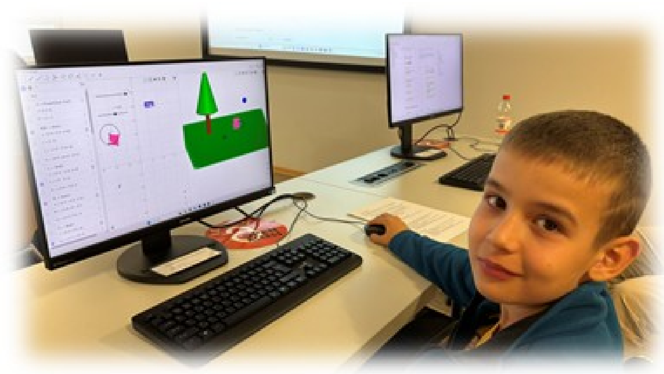
Jak nejsrozumitelněji a zábavně dokázat Pythagorovu větu a nebát se rýsovat bez tužky a pravítka nám přijeli ukázat Petra Schreiberová, Jana Volná a Petr Volný z GeoGebra institutu VŠB. Vyměnili své vysokoškolské studenty za žáky 8. ročníku a za jejich práci a snahu je velmi chválili. Paní učitelka Mgr. Miroslava Poštulková, která společně s Mgr. Ondřejkou Langrovou a Mgr. Janem Schreierem setkání zajišťuje, uvedla: „S tímto projektem jsme velmi spokojeni a dle reakcí žáků i oni uvítali koncept výuky trochu jinak. Rádi budeme ve spolupráci pokračovat a věříme, že žáci tyto návštěvy z VŠB vždy ocení."

Obrázek 10: Zpětná vazba - ZŠ Ludgeřovice

Dosud bylo realizováno 13 cyklů pro 118 žáků, z nichž 104 kroužek úspěšně absolvovalo. Účastníci i rodiče hodnotí kroužek velmi pozitivně. V ohlasech se objevují mimo jiné výroky typu:

- „Moc se líbilo, pan učitel byl moc hodný."
- „Těším se na další pololetí; syn byl nadšený, rád by v GeoGebře pokračoval."
- „Zlepšila se představivost i práce na PC."

Program tak potvrzuje svůj přínos nejen pro rozvoj matematických dovedností, ale i pro podporu logického myšlení, představivosti a práce s moderními technologiemi.



Obrázek 11: Kroužek

pořadí	název	věk	počet lekcí	přihlášení	úspěšní	termín od
1)	Hry s GeoGebrou	11-16	6	6	5	11/2021
2)	Hry s GeoGebrou	8-13	6	11	9	02/2022
3)	Hry s GeoGebrou	14-19	6	3	2	03/2022
4)	Hry s GeoGebrou I	8-13	6	10	9	10/2022
5)	Hry s GeoGebrou II	8-13	6	10	8	10/2022
6)	Hry s GeoGebrou I	8-11	6	12	6	03/2023
7)	Hry s GeoGebrou II	8-12	6	6	6	03/2023
8)	Hravá matematika s počítačem I	8-11	6	9	9	02/2024
9)	Hravá matematika s počítačem II	8-12	6	9	9	04/2024
10)	Hravá matematika s počítačem I	8-11	6	12	11	09/2024
11)	Hravá matematika s počítačem II	8-12	6	13	13	11/2024
12)	Hravá matematika s počítačem III	9-14	8	11	11	03/2025
13)	Hravá matematika s počítačem I	8-11	6	6	6	09/2025

Obrázek 12: Shrnutí vývoje a realizace kroužků pro JUni

3 Hravá matematika s počítačem I

Kurz Junior univerzity pod názvem „Hravá matematika s počítačem I“ je určen pro děti ve věku 8-11 let. Skládá se ze šesti hodinových lekcí, které jsou realizovány během šesti po sobě jdoucích týdnů, vždy každou středu od 15:45 v počítačové učebně Ústřední knihovny VŠB - Technické univerzity Ostrava.

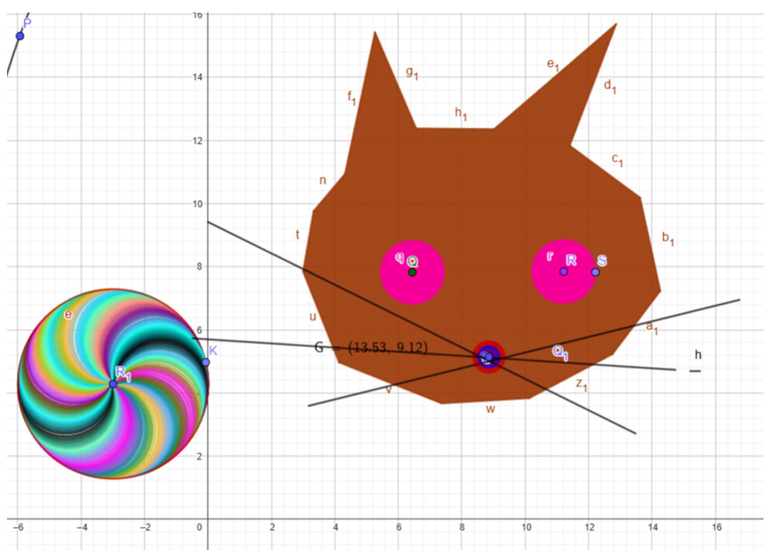
Jednotlivé lekce a styl vedení kurzu je přizpůsoben tomu, že děti v tomto věku nemají žádné větší zkušenosti s prací na počítači typu PC, a tedy se postupně v lekcích seznamují nejenom s programem GeoGebra, ale také s prací na klávesnici, s ukládáním dat na cloudu, také se naučí, jak k uloženým datům přistupovat.

Celý kurz je koncipován pro maximálně deset dětí, což je podle nás ideální počet pro dva lektory, kteří kurz vedou a mohou se tak dětem věnovat individuálně. Je zajímavé, kolik udělá jeden rok ve věkovém rozdílu mezi dětmi, a přitom to není tak, že starší dítě je nutně šikovnější. Nicméně počítáme s tím, že bude nutné především s nejmladšími dětmi pracovat individuálně a výrazně jim také pomáhat.

Pojďme se nyní podrobněji podívat na obsah jednotlivých lekcí. K textu přikládáme ukázky, které vytvořily děti.

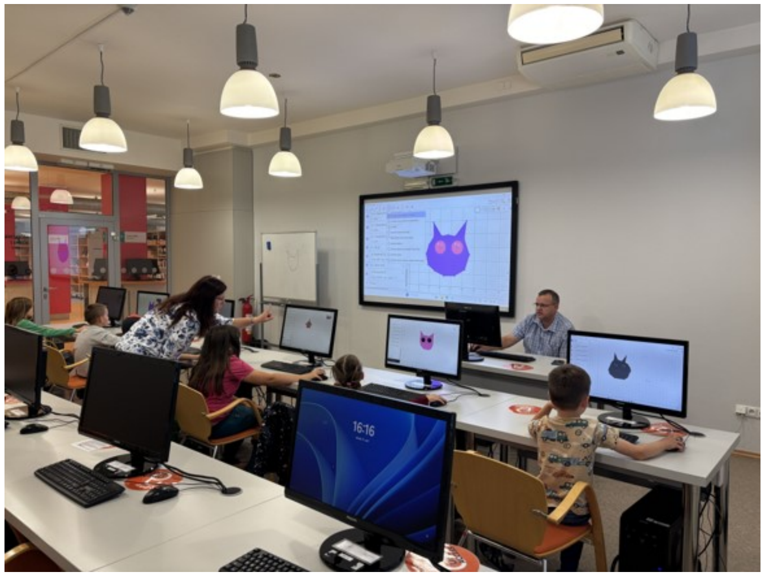
První hodina je zamýšlena jako úvod do programu GeoGebra. Děti se podívají na to, jak GeoGebra vypadá, jak se ovládá. Naučí se do GeoGebry přihlásit a svoji práci si průběžně ukládat na cloud. K tomu, co děti vytvořily, mají přístup i z domu a mohou ukázat rodičům nebo sourozencům, co se jim v GeoGebře podařilo vytvořit. Děti si také mohou doma svou rozdělanou práci dokončit, upravit anebo vylepšit. My ovšem dbáme na to, aby všechny děti měly možnost stihnout to, co se na jednotlivých lekcích tvoří.

Na první lekci se děti seznámí se základními nástroji GeoGebry, bod, přímka, mnohoúhelník, kružnice, a ukážeme si, jak měnit vizuální styl jednotlivých objektů. Snažíme se také, pokud se to časově stíhá, zařadit ukázku použití jednoduchých animací a dynamických barev. Motivací je představit si nějaký objekt, pomocí bodů načrtnout jeho obrys a body pak spojit úsečkami a vytvořit mnohoúhelník. Dětem vše ukazujeme na siluetě hlavy kočky, která se na nás zepředu dívá. Některé děti použijí stejný motiv, ale většinou si vyberou vlastní téma.



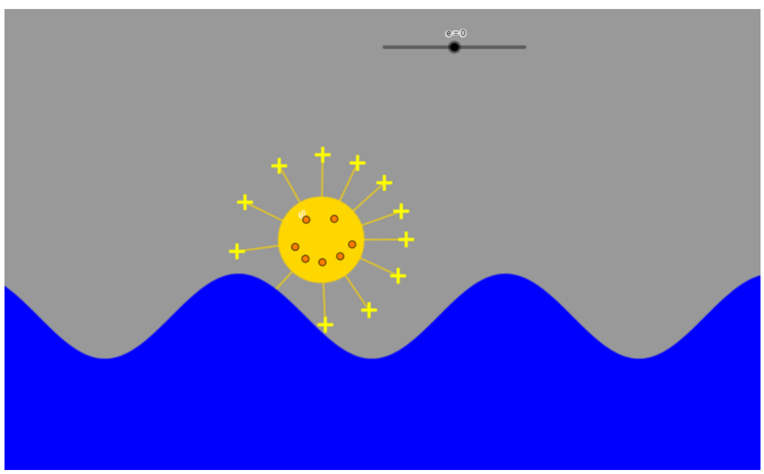
Obrázek 13: Ukázka z první lekce

Na první lekci se projevila u některých dětí zjevná nezkušenost s prací s myší. Byl problém se někdy trefit na to správné místo. Dalším problémem bylo přihlašování dětí na internetové konto, které jsme zřídili pro ukládání dat. Od další hodiny jsme jednotlivé počítače přihlašovali sami před začátkem kurzu, abychom ušetřili čas a mohli se tak věnovat vlastní práci s GeoGebrou.



Obrázek 14: Práce dětí v počítačové učebně

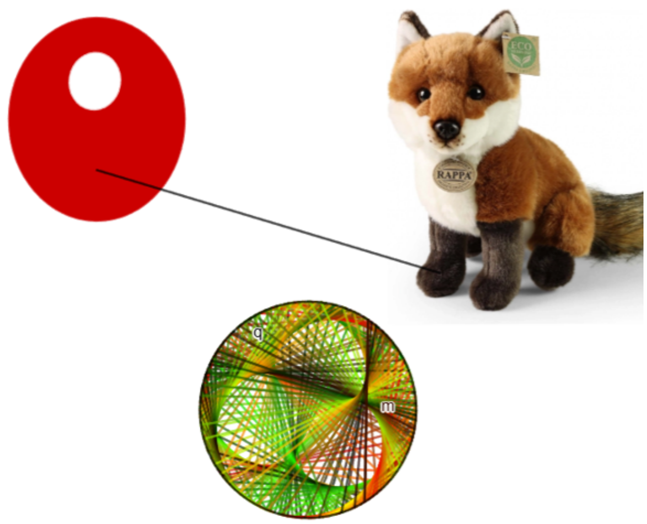
Na základě toho, co se děti naučily v první lekci, jsme si vytvořili dynamický applet „Vycházející sluníčko“.



Obrázek 15: Vycházející sluníčko

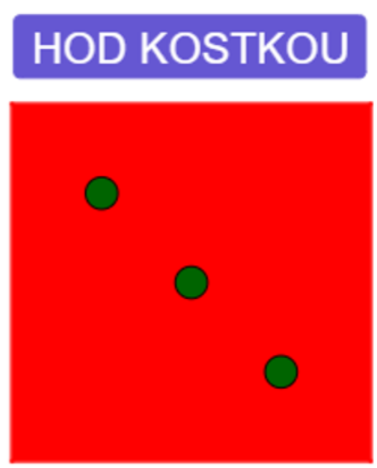
Posuvníkem je řízen pohyb sluníčka po kruhovém oblouku. Mořské vlny jsou vytvořeny prostřednictvím matematické funkce sinus. Pro vybarvení používáme nerovnosti. Na základě polohy středu sluníčka je naprogramována dynamická barva pozadí ve stupních šedi. To se udělá tak, že všechny barevné složky RGB mají nastavenou stejnou hodnotu. Při maximálním výstupu sluníčka (poledne, den) je pozadí bílé. Při maximálním sestupu, kdy sluníčko zmizí za mořskou hladinou (noc) se pozadí zabarví do černa.

Na dalším obrázku je ukázka varianty, kdy s dětmi vyrábíme „Létající balónek“. Používáme podobné kroky jako u sluníčka. Balónek se pohybuje po kruhovém oblouku. Tato varianta je technicky výrazně jednodušší než sluníčko a rozhodujeme se pro ni na základě zpětné vazby z první lekce. Děti se navíc naučí vkládat do GeoGebry vlastní obrázek.



Obrázek 16: Létající balónek

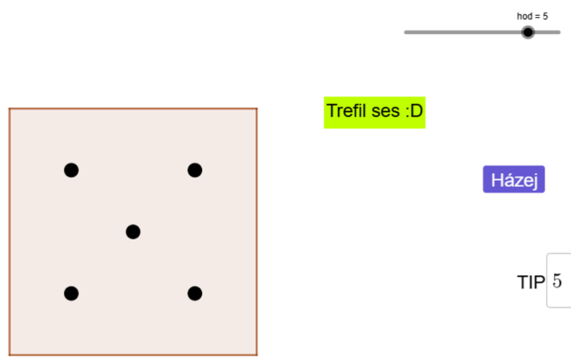
Náplní třetí lekce jsou „Hrátky s logikou“. Vytvoříme si hrací kostku, pomocí které simulujeme hod kostkou. S dětmi postupně nastavujeme podmínky zobrazení objektů pro jednotlivá oka kostky. Na posuvníku nastavíme hodnoty 1,2,3,4,5,6 a pak se dětí ptáme, která oka jsou vidět, když na kostce padne 1 nebo 2, atd. Uplatníme logické operátory konjunkce a disjunkce a ukážeme si jak porovnávat logické hodnoty, v GeoGebře se jedná o dva symboly rovnosti zapsané vedle sebe „==“. Případně lze použít symbol $\stackrel{?}{=}$. Máme-li



Obrázek 17: Hod kostkou - jednodušší varianta

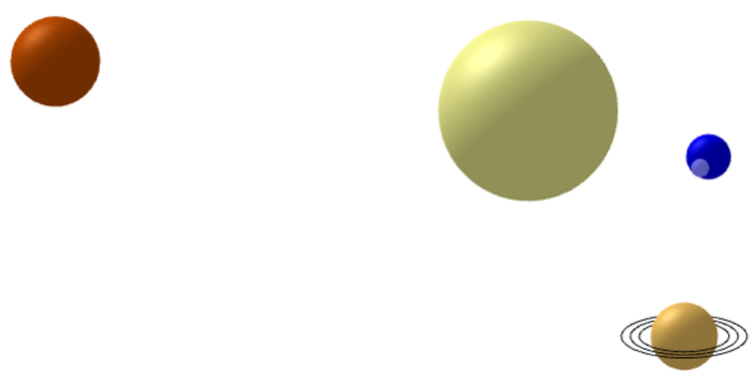
na to čas, snažíme se také do appletu přidat tlačítko „Hod kostkou“ s jednoduchým skriptem „NahodneMezi“, pomocí kterého vybíráme náhodné přirozené číslo mezi 1 a 6 na posuvníku, kterým řídíme viditelnost jednotlivých ok kostky.

Když se hodně zadaří, zkoušíme přidat do appletu „Vstupní pole“, do kterého je možné zadat tip ohledně výsledku hodu kostkou a skript, který porovnáním hodu a zadaného tipu výsledku hodu zobrazí text typy „Trefil ses“, nebo v případě neúspěchu „Házej ještě jednou“.

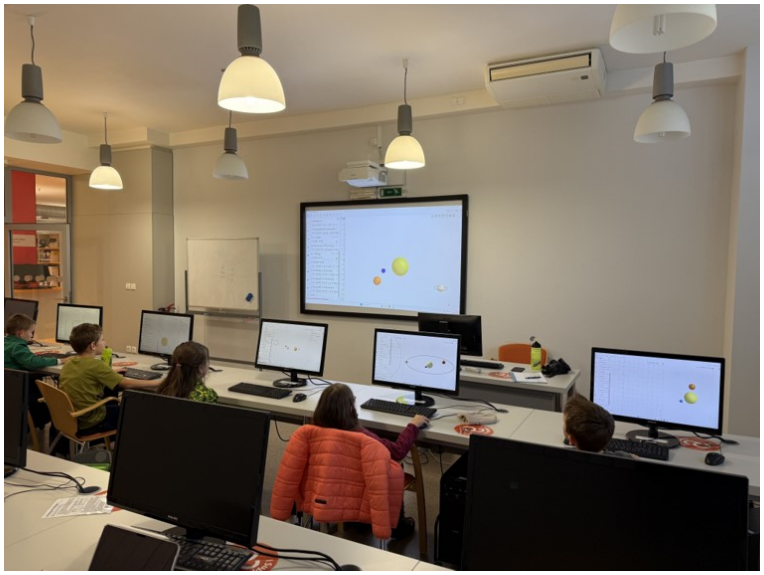


Obrázek 18: Hod kostkou - pokročilejší varianta

Ve čtvrté lekci přejdeme do 3D a zase využíváme pohyb bodu po kružnici. Děti si vytvoří jednoduchý model sluneční soustavy. Seznámí se s 3D nákresnou a s možnostmi jejího formátování, tedy zobrazení vs skrytí souřadnicových os, zobrazení vs skrytí půdorysné roviny xy. Hlavním nástrojem je koule zadaná středem a poloměrem.

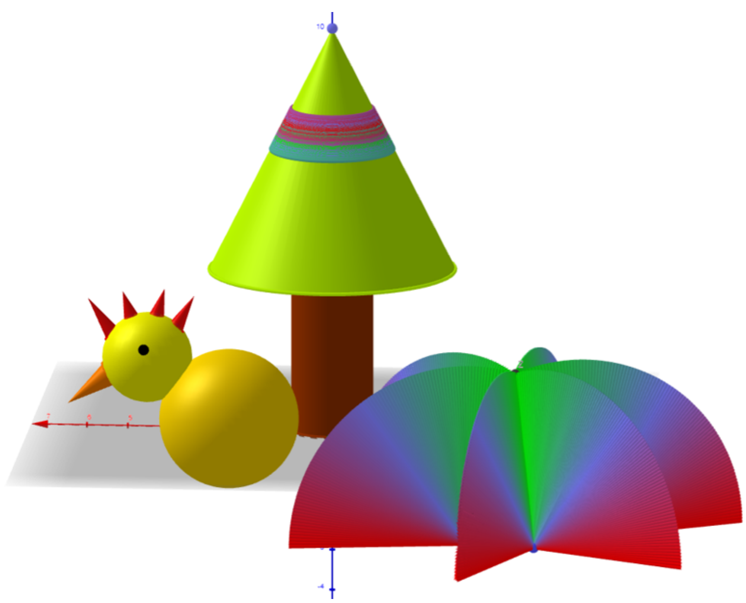


Obrázek 19: Sluneční soustava



Obrázek 20: Ukázka práce s dětmi v rámci čtvrté lekce

V páté lekci pokračujeme ve 3D se seznámíme s dalšími nástroji, válec, kužel, síť. Na jaře, když se blíží Velikonoce, uděláme si s dětmi velikonoční kuřátko. Pro děti je asi nejsložitější, vytvořit hřebínek a zobáček kuřátka, což jsou jednoduchá geometrická tělesa, kužely. Problém je správně ve 3D napolohovat jejich vrcholy tak, aby to hezky vypadalo. Květina je vyrobena s pomocí dynamických barev sítě šestibokého jehlanu.

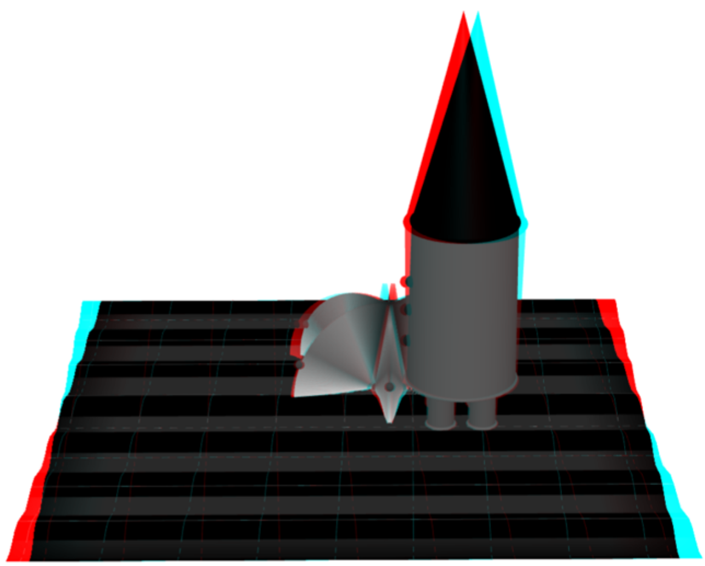


Obrázek 21: Kuřátko

V zimě si s dětmi vyrobíme technicky jednodušší variantu, a to sněhuláka s kloboučkem. Poznamenejme, že zabarvení půdorysné roviny je realizováno prostřednictvím vytvoření nové roviny o rovnici $z = 0$, kterou nahradíme půdorysnou souřadnicovou rovinu. Děti mají možnost si applet vylepšit přidáním jehličnatých, nebo dokonce listnatých stromů.

Obrázek 22: Sněhulák

Závěrečná lekce je věnována návštěvě cizí planety. S dětmi vyrobíme raketu s využitím běžných geometrických těles. Přidáme cizokrajnou květinu, opět jako síť šestibokého jehlanu. Na obrázku je vidět aktivní filtr pro anaglyfické brýle, což umožňuje simulovat prostorový efekt. Děti od nás brýle dostanou. Povrch planety není rovný, ale je zvlněný. Opět využijeme funkci sinus.



Obrázek 23: Přistání na cizí planetě

Alternativou pro raketu na cizí planetě je květina na cizí planetě. Stonek květiny je částí šroubovice, kterou s dětmi zadáme do vstupního pole GeoGebry prostřednictvím parametrických rovnic.

Obrázek 24: Květina na cizí planetě

Na konci kurzu jsou pro děti připraveny drobné věcné odměny, abychom ocenili jejich úsilí a motivovali je k další práci. Máme od dětí a rodičů velmi pěknou zpětnou vazbu. Stává se nám zcela běžně, že když se kurz chýlí ke konci, rodiče i děti se zajímají o pokračování kurzu. Na konci letošního kurzu nám jedna maminka řekla, že děti seznamujeme s matematickými pojmy nenásilnou formou.

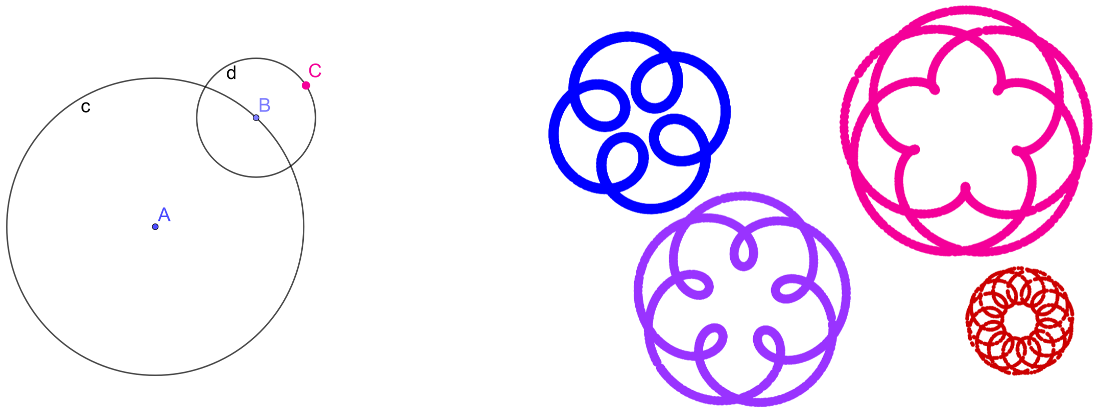
4 Hravá matematika s počítačem II

Obsah kroužku je tematicky zaměřen na dvě oblasti. První z nich je geometrie a druhá programování. Z diskuse s žáky obvykle vyplyne, které z nich se budeme věnovat více.

Geometrie

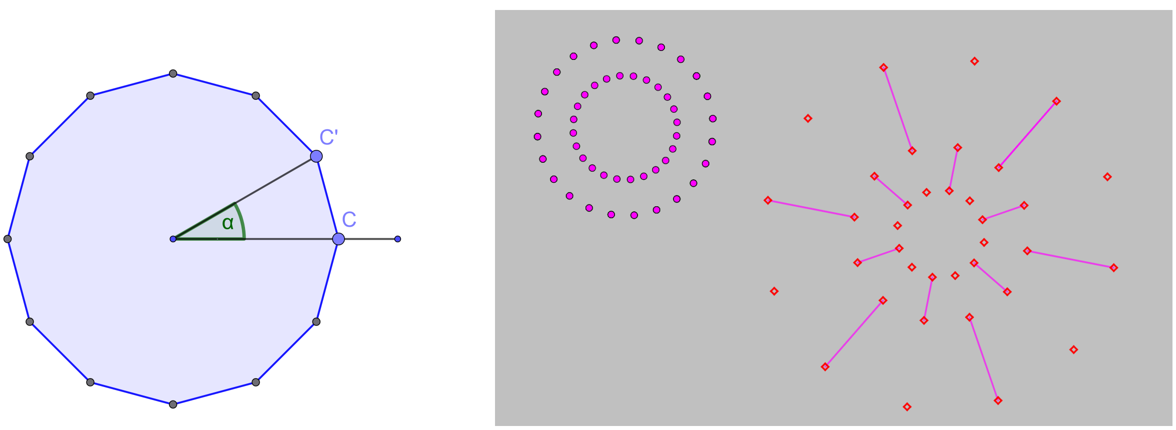
První seznámení s programem GeoGebra obvykle bývá na geometrických úlohách, na kterých žákům hravou formou ukazujeme základní geometrické principy. Využíváme především možností animace, která činí úlohy nejen zábavnými, ale pomáhá jim i lépe uvedené principy pochopit.

Jednoduché, avšak s možností mnoha variací, je vytváření obrazců. Sestrojíme kružnici danou středem a poloměrem a na tuto umístíme další bod B, který bude středem menší kružnice. Na menší kružnici umístíme bod C, kterému zapneme zobrazení stopy. Body B a C dáme animovat. Volbou různých rychlostí a poloměrů vytváříme obrazce. Vpravo vidíte výsledek po 20 minutách práce žáka 4. třídy, který se setkal s GeoGebrou úplně poprvé.



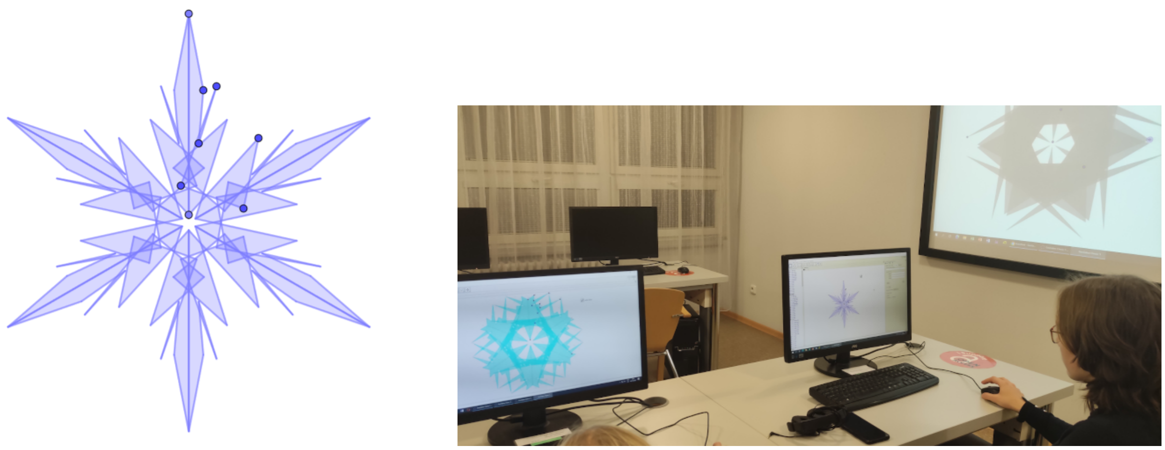
Obrázek 25: Obrazce

Další z takových úloh je demonstrace novoročního ohňostroje, na které ukazujeme princip rotace. Na úsečku umístíme bod C. Rotací bodu C o daný úhel sestrojíme dva vrcholy budoucího n-úhelníka, který tvoří základ jednoho ohňostroje. S žáky vedeme diskusi, jaký je vztah mezi úhlem a počtem vrcholů n-úhelníka. Žáci obvykle vědí, že celý kruh má 360° a dělením pak najdeme výsledek. Pokud se žáci při dělení spletou, tak tuto chybu ihned vidí. Animací bodu C docílíme efektu ohňostroje.



Obrázek 26: Ohňostroj – velikost vnitřního úhlu n-úhelníka, rotace

Osovou symetrii a rotaci jsme využili při tvorbě sněhové vločky. Vytvořený n-úhelník pomocí osové symetrie zobrazíme přes osu a poté provedeme potřebný počet rotací. Žáci mohou změnou tvaru původního n-úhelníka dynamicky měnit tvar celé vločky. Okamžitá vizualizace změny tvaru vede k intuitivnímu pochopení principu symetrie a rotace.

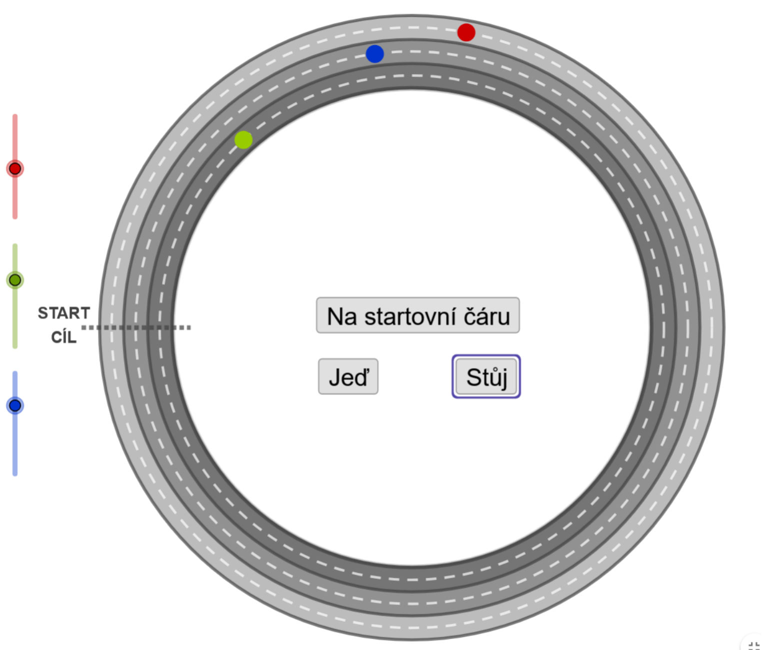


Obrázek 27: Sněhová vločka – osová symetrie, rotace

Programování

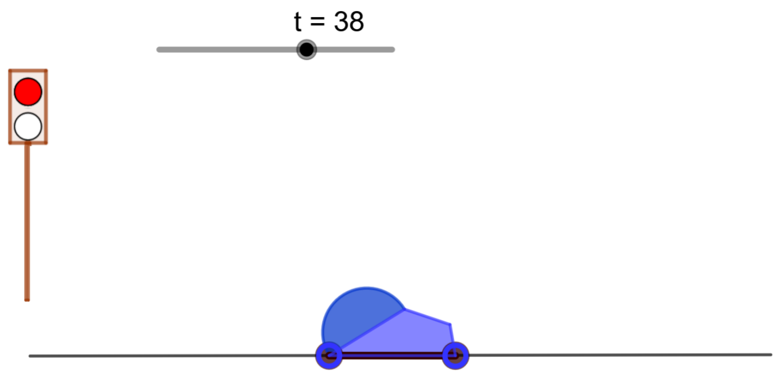
Pro rozvoj informatických dovedností máme připraveno několik her. Na lekci vždy postupujeme tak, že si hotovou hru zkusíme, následně necháme žáky popsat, jaký význam mohou mít použité objekty a pak si jednotlivé části hry společně vytvoříme.

Jednou z prvních her je Závod tří (běžců, koní nebo aut). Žáci již umí spustit a zastavit animaci, případně měnit její rychlost. V této úloze si ukážeme jak pomocí tlačítek a příkazu StartAnimace můžeme animaci řídit a jak pomoci posuvníku nastavovat její rychlost.



Obrázek 28: Závod tří

Další ukázkou je oblíbená simulace semaforu a auta. Svítí-li zelená auto jede, svítí-li červená, tak stojí. Nově se naučíme příkaz Kdyz. Na úsečku umístíme bod AUTO a pomoci Neměnného mnohoúhelníka a Kružnic daných středem a poloměrem vytvoříme auto. Celou animaci budeme řídit posuvníkem t, který reprezentuje čas od 0 do 60. Posuvník bude mít skript Po aktualizaci, který při splnění podmínky $t < 20$ spustí animaci bodu AUTO, a při nesplnění ji zastaví. Semafor tvoří zelená, resp. červená kružnice, která má nastavenu Podmínku zobrazení $t < 20$ (resp. $t \geq 20$). Animací posuvníku simulaci spustíme.



Obrázek 29: Semafor a auto

Literatura

[1] Zlepši si techniku [online]. Dostupné z: https://www.zlepsisitechniku.vsb.cz

[2] GeoGebra Institut Ostrava [online]. Dostupné z: https://ggi.vsb.cz

Petra Schreiberová
VŠB-TUO, FS
17. listopadu 15
Ostrava-Poruba, 70800
e-mail: petra.schreiberova@vsb.cz

Jana Volná, Petr Volný
VŠB-TUO, FAST
17. listopadu 15
Ostrava-Poruba, 70800
e-mail: jana.volna@vsb.cz,
petr.volny@vsb.cz

VYUŽITÍ MOODLE KURZU SE STACK ÚLOHAMI PRO OPAKOVÁNÍ STŘEDOŠKOLSKÉHO UČIVA MATEMATIKY

Zuzana Pátíková, Jana Řezníčková

Fakulta aplikované informatiky, Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

Abstrakt: Příspěvek představuje zkušenosti s využitím online prostředí Moodle a matematického systému STACK při opakování středoškolského učiva matematiky na Fakultě technologické Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně. Výsledky ukazují, že systém s využitím STACK úloh je studenty převážně pozitivně vnímán, přispívá k rozvoji samostatnosti a systematičnosti, avšak vyžaduje metodickou podporu při práci se symbolickým zápisem.

Klíčová slova: Moodle kurz, plugin STACK, generované úlohy.

Using a Moodle course with STACK assignments for reviewing high school mathematics curriculum

Abstract: The paper presents experiences with the use of the online Moodle environment and the STACK mathematical system in the revision of secondary school mathematics curriculum at the Faculty of Technology of Tomas Bata University in Zlín. The results show that the system using STACK tasks is mostly perceived positively by students, contributes to the development of independence and systematicity, but requires methodological support when working with symbolic notation.

Key words: Moodle course, STACK plugin, generated tasks.

Úvod

Přechod studentů ze střední školy na univerzitu bývá v matematických předmětech často spojen s obtížemi, které pramení z rozdílného způsobu výuky, nejednotné úrovně znalostí i z toho, že část studentů přichází se značným časovým odstupem od maturitní matematiky. Na Fakultě technologické UTB ve Zlíně se proto dlouhodobě hledají cesty, jak prvním ročníkům usnadnit adaptaci na vysokoškolské tempo, posílit jejich jistotu v základních pojmech a zároveň podpořit schopnost samostatné práce.

V rámci těchto snah byl v akademickém roce 2024/25 zaveden nový systém podpory, který kombinuje prezenční výuku s domácí přípravou v prostředí Moodle. Klíčovým prvkem e-learningového kurzu je systém STACK (System for Teaching and Assessment using a Computer algebra Kernel, [1]). Tento nástroj umožňuje zadávat úlohy s otevřenou odpovědí, které jsou vyhodnocovány pomocí počítačové algebry ([2-5].

STACK úlohy studenty vedou k preciznímu zápisu matematických výrazů, práci se závorkami, mocninami či funkcemi, a tím podporují dovednosti nezbytné v navazujících předmětech matematického základu. Na rozdíl od testů s výběrem odpovědí neumožňují náhodné tipování; student musí skutečně promyslet postup a správně jej formalizovat. Díky jednotnému zápisu systém také poskytuje okamžitou zpětnou vazbu – student vidí, jak systém jeho výraz interpretuje, což pomáhá pochopit strukturu matematických objektů, nikoli pouze dosáhnout výsledku.

STACK navíc usnadňuje generování náhodných variant zadání, což vede k autentickému procvičování a brání pouhé paměťové reprodukci příkladů. Pro první ročníky technické fakulty, které přicházejí s velmi rozdílnou úrovní středoškolských znalostí, představuje tento způsob práce efektivní prostředek k rychlému srovnání vstupní úrovně.

Cílem tedy nebylo pouze umožnit opakování učiva, ale také vést studenty k systematičnosti, přesnému matematickému vyjadřování a k efektivní práci s digitálními nástroji – dovednostem, které jsou klíčové pro moderní technické vzdělávání.

1 Organizace kurzů

V prvních dvou týdnech zimního semestru probíhají na fakultě tzv. Adaptační týdny, během nichž studenti ještě nejsou rozděleni podle studijního oboru. Výuka je organizována v blocích, které kombinují matematiku a další odborné či podpůrné předměty (např. chemie, přírodní vědy nebo technické kreslení). Matematická část adaptačního programu je realizována prostřednictvím předmětu Seminář z matematiky (TP1SM), který má formu intenzivního opakování základního středoškolského učiva a je zakončen zápočtem.

V dřívějších letech byl zápočet udělován pouze za účast, ale s cílem posílit průběžnou práci studentů byl od roku 2024 zaveden systém domácí přípravy v Moodle kurzu. Seminář se zaměřuje na základní početní operace, práci se zlomky, mocninami a procenty, úpravy výrazů a na úvod do funkcí.

Po ukončení adaptačních týdnů navazuje předmět Repetitorium z matematiky (TP1RM), vyučovaný v první části standardního semestru v rozsahu šesti hodin týdně po dobu čtyř týdnů. Tento předmět plynule pokračuje v opakování relevantního středoškolského učiva započatého v semináři. Těžiště repetitoria spočívá zejména v probraní témat, která jsou klíčová pro nástup do předmětu Matematika 1 – elementární funkce a jejich grafy, lineární, kvadratické a exponenciální rovnice, případně jednoduché nerovnice.

Repetitorium tak slouží jako přemosťující kurz mezi adaptačním opakováním a vysokoškolskými tématy. Zachovává stejný systém práce jako seminář: domácí procvičování v Moodle, průběžné plnění cvičných testů a splnění ostrých testů k získání zápočtu. Studenti si mohou osvojit učivo vlastním tempem, ale zároveň pravidelně.

2 Struktura a nastavení Moodle kurzů

Moodle kurz pro předměty TP1SM a TP1RM je koncipován jako jednotný celek, jehož struktura odpovídá postupnému opakování středoškolského učiva. Témata 1–9 pokrývají obsah semináře, témata 10–17 obsah repetitoria. Každé téma obsahuje dvojici testů – cvičný test a ostrý test.

Cvičný test umožňuje neomezený počet pokusů, poskytuje okamžitou zpětnou vazbu a nabízí nápovědy či ukázky řešení. Slouží k procvičení látky bez stresu a umožňuje studentům ověřit si pochopení učiva. Ostrý test naproti tomu neobsahuje nápovědy ani průběžné hodnocení a je určující pro splnění zápočtu.

STACK úlohy vyžadují od studentů symbolický zápis matematických výrazů. Syntaxe vychází ze systému Maxima a je v testech doplněna stručnou nápovědou. Správné použití syntaxe rozvíjí přesnost matematického vyjadřování a podporuje porozumění struktuře výrazů. U studentů technických oborů jde o důležitou dovednost, která se promítá i do práce s dalšími matematickými nástroji.

Kurz tak neslouží pouze ke kontrole znalostí, ale významně přispívá k rozvoji matematické a digitální gramotnosti. V kombinaci s prezenčním vyučováním poskytuje prostor k opakovanému procvičení i k hlubšímu porozumění tématům, která jsou nutná pro navazující vysokoškolské předměty.

3 Zpětná vazba studentů

Po každém běhu kurzů byla sbírána anonymní zpětná vazba. V roce 2024 se zúčastnilo 94 respondentů, v roce 2025 pak 68. Převládaly pozitivní reakce, zejména oceňující možnost pracovat vlastním tempem, dostupnost testů a možnost opakovaného procvičování. Obrázek 1 dokumentuje názory studentů na Moodle testy. Pozitivní reakce (výběr):

> „Líbilo se mi, že jsem si test mohla udělat kdykoliv a v klidu doma.“

> „Neomezený počet pokusů mi pomohl si látku dobře procvičit.“

> „Cvičné testy s okamžitou zpětnou vazbou mi ukázaly, kde dělám chyby.“

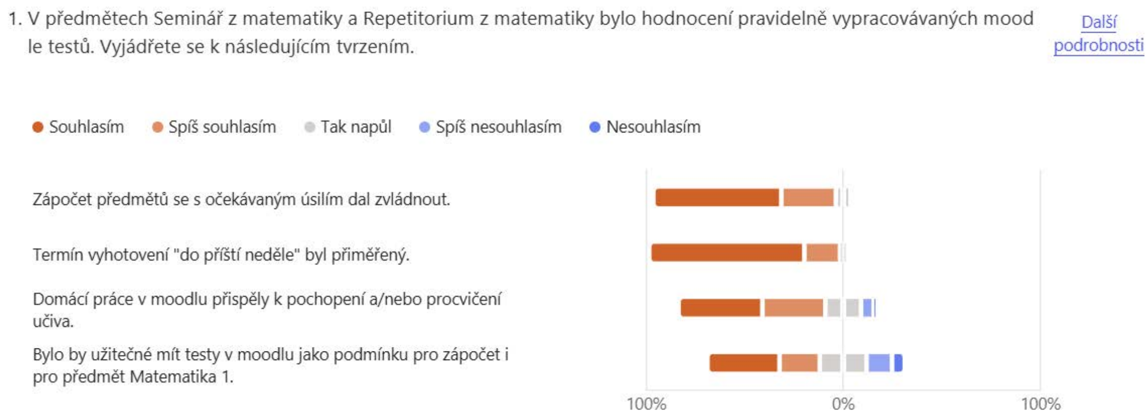
> „Donutilo mě to si sednout k učivu, i když se mi nechtělo.“

Nejčastější výtky byly typu:

> „Zadávání syntaxí bylo často těžší než samotný příklad.“

> „Systém někdy neuznal správnou odpověď jen kvůli jinému formátu.“

> „Pomohlo by více ukázek a nápověd k zápisu.“



Obrázek 1: Hodnocení 2024

Většina studentů však přesto hodnotila testy jako přínosné a smysluplné. Na základě zpětné vazby dochází k úpravám testů pro příští použití v následujících akademických letech. Podíl stížností na nedostatek nápovědy k syntaxi se tak mírně snížil v roce 2025, protože některé úlohy byly ve srovnání s rokem 2024 upraveny. Negativní vnímání zápisu výsledků přetrvává.

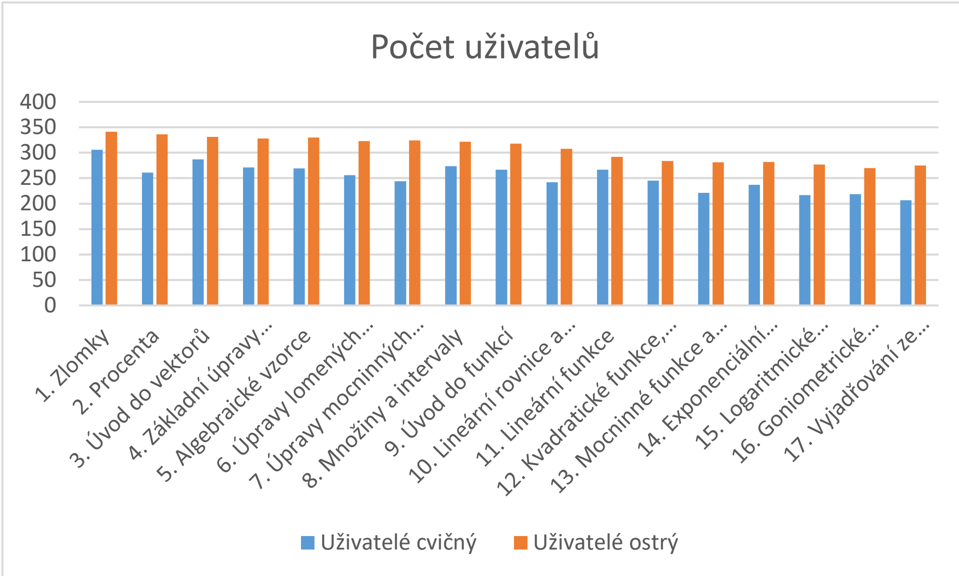
4 Výsledky a využití systému

Vedle kvalitativní zpětné vazby byla analyzována také data z Moodle kurzů. V prvním běhu v akademickém roce 2024/25 bylo do předmětu Seminář z matematiky zapsáno 387 studentů, z nichž 299 úspěšně splnilo podmínky zápočtu, 53 vůbec nezačalo pracovat. Do navazujícího Repetitoria z matematiky vstoupilo 335 studentů, z nichž 245 kurz úspěšně dokončilo; 31 studentů nepracovalo vůbec.

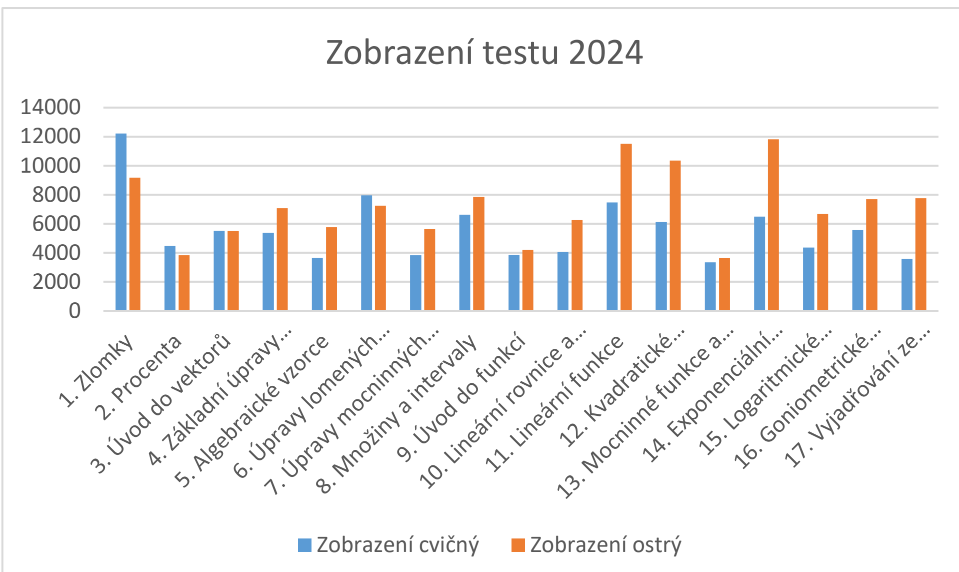
V akademickém roce 2025/26 bylo do předmětu Seminář z matematiky zapsáno 369 studentů, z nichž 288 úspěšně splnilo podmínky zápočtu, 60 neprojevilo žádnou aktivitu. Do navazujícího Repetitoria z matematiky bylo zapsáno 340 studentů, z nichž 246 kurz úspěšně dokončilo; 92 studentů bylo bez jakékoli aktivity.

Dále byla analyzována aktivita studentů v jednotlivých tématech. Na Obrázku 2 je vidět vývoj počtu uživatelů, kteří v roce 2024 pracovali s jednotlivými cvičnými a ostrými testy. Většina studentů začínala cvičnou verzí. Menší podíl studentů cvičné testy vůbec nepotřeboval. Výsledky z roku 2025 jsou podobného charakteru, pouze počet uživatelů, kteří vstoupili i do cvičného testu, je většinou o něco menší.

Na záznamu zobrazení testů v roce 2024 na Obrázku 3 je vidět zvýšený počet pokusů v cvičném prvním testu se zlomky a v ostrých testech pak u témat lineární, kvadratická a exponenciální funkce. Při prvním testu došlo k prvnímu seznámení se způsobem zápisu odpovědí, což bylo pravděpodobným důvodem většího počtu pokusů. V ostrých testech je nárůst dán pravděpodobně vyšší obtížností témat pro studenty.



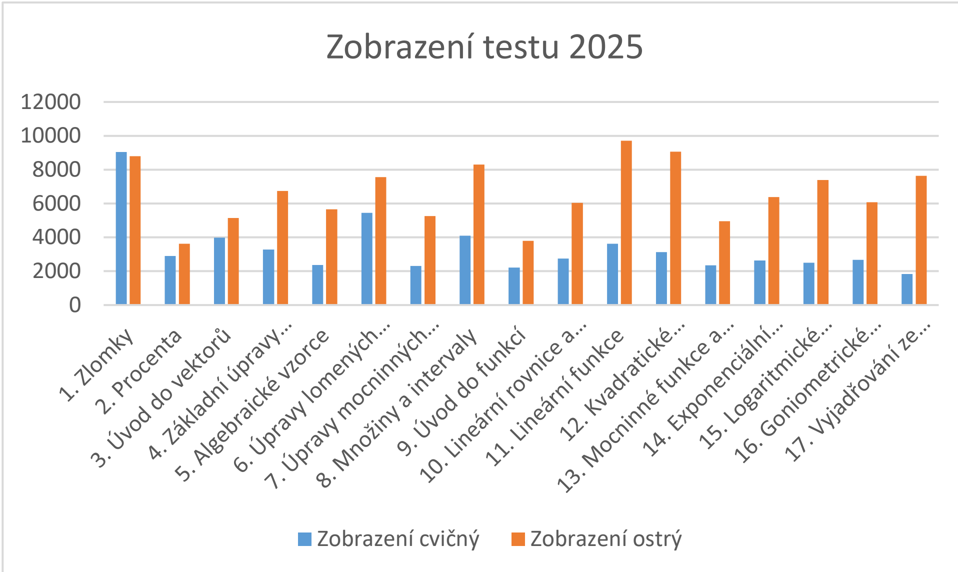
Obrázek 2: Počet uživatelů 2024



Obrázek 3: Zobrazení testu 2024

Na Obrázku 4 jsou záznamy s počty zobrazení jednotlivých testů v roce 2025. Je zde vidět nižší počet zobrazení cvičných testů ve srovnání s předchozím rokem. Kromě jiného lze vypozorovat například nižší počet ostrých testů z Exponenciálních funkcí, výrazů a rovnic, což je test, který byl meziročně změněn na základě připomínek studentů k syntaxi.

Celkově data ukazují, že studenti kurz aktivně využívali.



Obrázek 4: Zobrazení testu 2025

5 Závěr

Zavedení e-learningových kurzů se STACK úlohami prokázalo svůj potenciál jako účinný nástroj podpory adaptace studentů na vysokoškolské studium matematiky. Kombinace prezenční výuky, průběžného procvičování v Moodle a automatického vyhodnocování otevřených odpovědí vedla k větší systematičnosti a k rovnoměrnějšímu rozložení studijní práce během semestru. Studenti oceňovali flexibilitu prostředí, možnost opakovaných pokusů a okamžitou zpětnou vazbu, která jim pomáhala lépe porozumět vlastním chybám a upevnit obtížnější témata, zejména elementární funkce a rovnice.

Za limitující aspekt studenti označovali technickou náročnost syntaxe, která může zvyšovat kognitivní zátěž zejména v počátečních pokusech. Tato výtka však představuje i příležitost k dalšímu rozvoji kurzů — metodická podpora, doplnění ukázek a instruktážních videí či postupné zavádění nápověd mohou tento aspekt výrazně usnadnit.

Celkově lze uzavřít, že propojení prezenční výuky s prostředím Moodle a systémem STACK je efektivní cestou k sjednocení vstupních znalostí studentů technické fakulty i ke zvýšení jejich jistoty před nástupem do předmětu Matematika 1. Další rozvoj bude směřovat k rozšíření podpůrných materiálů, ke zvýšení uživatelské přívětivosti syntaxe a k širšímu využití dat z Moodle při cílené podpoře studentů v tématech, která jsou dlouhodobě nejproblematičtější.

Literatura

[1] https://stack-assessment.org/.

[2] Janíková, M., Pátíková, Z., Sedláček, L.: *Začínáme se STACKem*, Sborník příspěvků

11. konference Užití počítačů ve výuce matematiky, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 81-85, 2023.

[3] Pátíková, Z., Polášek V.: *Grafy matematických funkcí ve stack úlohách v Moodle*. Sborník z 30. semináře Moderní matematické metody v inženýrství, VŠB-TUO, 84-94, 2025.

[4] Sangwin, C. J.: *Computer Aided Assessment of Mathematics*, Oxford University Press, 2013.

[5] Sangwin C. J., Kocher N.: *Automation of mathematics examinations*. Computers and Education, 94:215-227, 2016.

Zuzana Pátíková
Fakulta aplikované informatiky
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Nad Stráněmi 4511, Zlín 76005
e-mail: patikova@utb.cz

Jana Řezníčková
Fakulta aplikované informatiky
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Nad Stráněmi 4511, Zlín 76005
e-mail: reznickova@utb.cz

MOŽNOSTI VYUŽITÍ DIGITÁLNÍCH TECHNOLOGIÍ PŘI VÝUCE GEOMETRICKÝCH ZOBRAZENÍ V PROSTORU

Petra Pirklová, Daniela Bímová

Katedra matematiky, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická,
Technická univerzita v Liberci

Abstrakt: Výuka prostorových geometrických zobrazení není obsažena v RVP ZŠ ani SŠ. Bohužel studenti učitelství prvního stupně, a nejen oni, v rámci výukových aktivit i praxí zaměňují geometrická zobrazení v rovině a geometrická zobrazení v prostoru. Jednotlivé typy zobrazení také nesprávně používají. Naším cílem proto bylo efektivně seznámit studenty s těmito zobrazeními. Kvůli vysokým nárokům na prostorovou představivost je vhodné při jejich výuce zapojit moderní technologie např. program GeoGebra, 3D tisk či AI.

Klíčová slova: Prostorová zobrazení, budoucí učitelé 1. stupně, pomůcky, digitální technologie.

Possibilities of using digital technologies in teaching spatial geometric transformations

Abstract: The teaching of spatial geometric transformations is not included in the Framework Education Programme (FEP) for primary or secondary schools. Unfortunately, prospective primary teachers — and not only they — often confuse planar geometric transformations with spatial geometric transformations. They also often misuse the individual types of transformations. Our goal was therefore to introduce these concepts effectively, ideally with the help of modern tools such as GeoGebra, 3D printing, or AI, which support the high demands on spatial imagination.

Key words: Spatial transformations, prospective primary teachers, tools, digital technologies.

Článek je publikován v časopise *South Bohemia Mathematical Letters*, Vol. 33 (2025), No. 1
Dostupné z: https://home.pf.jcu.cz/~sbml

MODERNÍ DIGITÁLNÍ NÁSTROJE VE VÝUCE MATEMATIKY: GEOGEBRA, WOLFRAM ALPHA A CHATGPT

Mgr. Tomáš Riemel, Ph.D.

Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Abstrakt: Příspěvek se zaměřuje na využití digitálních nástrojů ve výuce matematiky. Ukazuje, jak mohou moderní technologie obohatit tradiční metody a podpořit aktivní zapojení studentů. Představuje praktické ukázky práce s GeoGebrou a možnosti Wolfram Alpha při řešení úloh. Závěrem se věnuje využití modelu ChatGPT a shrnuje přínosy i limity těchto technologií ve vzdělávání.

Klíčová slova: Wolfram Alpha, ChatGPT, Geogebra, matematika

Modern digital tools in mathematics teaching: GeoGebra, Wolfram Alpha and ChatGPT

Abstract: The article focuses on the use of digital tools in mathematics teaching. It shows how modern technologies can enrich traditional methods and support active student engagement. It presents practical examples of working with GeoGebra and the possibilities of Wolfram Alpha in solving problems. Finally, it discusses the use of the ChatGPT model and summarizes the benefits and limitations of these technologies in education.

Key words: Wolfram Alpha, ChatGPT, GeoGebra, math

Úvod

Rychlý rozvoj digitálních technologií v posledních letech významně ovlivňuje způsoby, jak se matematika vyučuje i učí. Moderní nástroje umožňují vizualizovat abstraktní pojmy, automatizovat rutinní výpočty, podporovat interaktivní práci a otevírat nové možnosti individualizace vzdělávání. Právě v prostředí středních a vysokých škol, kde studenti často poprvé přicházejí do kontaktu s náročnějšími oblastmi matematiky, představují tyto technologie výrazný potenciál obohatit tradiční formy výuky.

Digitální prostředí dokáže nejen usnadnit porozumění složitějším matematickým vztahům, ale také přirozeně zapojit studenty do aktivní práce. Dynamické vizualizace, okamžitá zpětná vazba či možnost experimentovat s matematickými objekty vytvářejí podmínky pro hlubší porozumění a podporují konstruktivistické pojetí učení. Současně však kladou zvýšené nároky na schopnost pedagogů tyto nástroje didakticky promyšleně využívat.

Tento příspěvek se proto zaměřuje na možnosti využití tří vybraných digitálních nástrojů – GeoGebry, Wolfram Alpha a jazykového modelu ChatGPT – ve výuce matematiky. Představuje jejich didaktický potenciál i limity a ukazuje, jak mohou moderní digitální prostředky podporovat aktivní objevování, rozvoj matematického myšlení i kritickou reflexi.

1 Proč digitální nástroje ve výuce?

Digitální nástroje mohou výrazně zvýšit motivaci studentů díky interaktivitě a okamžité zpětné vazbě. Umožňují vizualizovat abstraktní matematické pojmy pomocí grafů, simulací či dynamických konstrukcí, což vede k jejich lepšímu pochopení. Zároveň podporují samostatné a objevné učení, protože umožňují experimentovat a ověřovat matematické hypotézy. V neposlední řadě rozvíjejí digitální a informační gramotnost, která je dnes nedílnou součástí moderního vzdělávání.

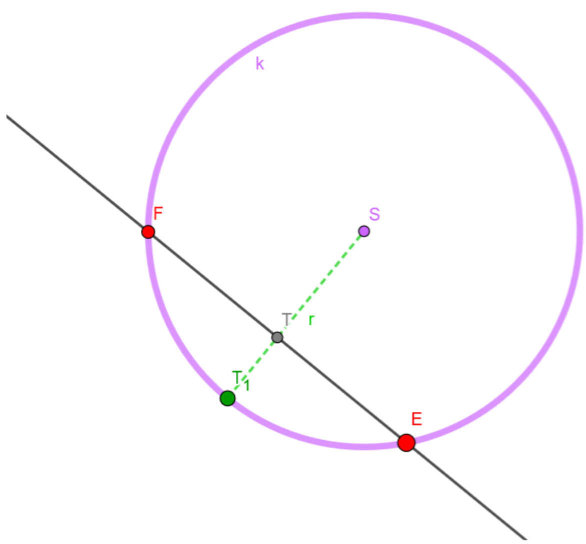
2 GeoGebra ve výuce matematiky

GeoGebra představuje jeden z nejrozšířenějších digitálních nástrojů využívaných ve výuce matematiky na středních i vysokých školách. Její hlavní předností je propojení geometrie, algebry a grafického zobrazení v jednom prostředí, což umožňuje studentům vnímat matematické pojmy v jejich vzájemných souvislostech. V dynamickém prostředí mohou uživatelé libovolně manipulovat s objekty, měnit jejich parametry a okamžitě sledovat dopad těchto změn na výsledné konstrukce či grafy. Tato interaktivita podporuje nejen vizuální porozumění řešeným úlohám, ale také aktivní zapojení studentů, kteří nejsou pouhými pozorovateli, nýbrž přímými tvůrci matematických situací.

Důležitým přínosem GeoGebry je také její podpora objevného učení. Studenti mohou samostatně zkoumat, jak se jednotlivé prvky konstrukce vzájemně ovlivňují, a docházet tak k vlastnímu porozumění matematickým principům. Takový proces vede k hlubšímu uchopení látky, neboť umožňuje experimentovat, formulovat hypotézy a ověřovat je prostřednictvím okamžité zpětné vizuální odezvy.

Výrazný didaktický potenciál GeoGebra nabízí také v oblasti analytické geometrie. Při práci se soustavami lineárních rovnic mohou studenti v reálném čase měnit jejich parametry a okamžitě pozorovat, jak se mění poloha či směr odpovídajících přímek v souřadnicové rovině. Tím se posiluje jejich schopnost propojit algebraické vyjádření rovnic s jejich grafickým obrazem a porozumět tomu, jak konkrétní koeficienty ovlivňují tvar a umístění grafu. Tento proces zároveň rozvíjí schopnost zobecňovat matematické vztahy a chápat je v širším kontextu.

GeoGebra tak poskytuje prostředí, které umožňuje intuitivní, vizuálně podložené a zároveň teoreticky přesné porozumění geometrii i analytickým tématům. Její zařazení do výuky přináší výrazné didaktické výhody a podporuje moderní pojetí matematického vzdělávání založené na aktivním zapojení studentů a na konstruktivistickém přístupu k učení. Na webu geogebra.org je k dispozici spousta materiálů a appletů, které lze využívat při výuce.

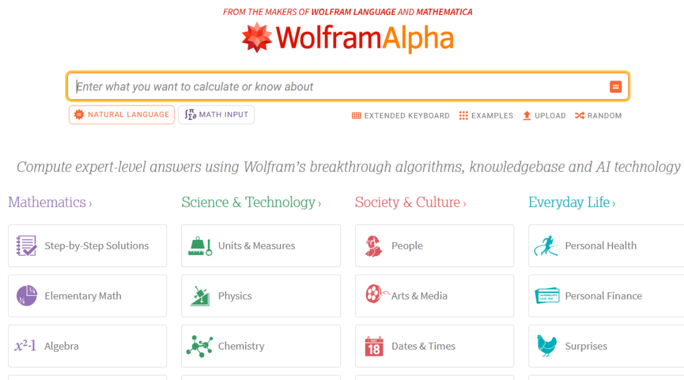


Obrázek 1: Applet - Kružnice a přímka

3 Wolfram Alpha

Wolfram Alpha představuje výkonný nástroj kombinující rozsáhlé databáze, symbolické výpočty a prvky umělé inteligence. Díky tomu dokáže zpracovávat široké spektrum matematických úloh, od jednoduchých algebraických výrazů až po pokročilejší problémy z oblasti matematické analýzy. Schopnost automaticky řešit rovnice, počítat derivace, integrály či limity z něj činí užitečný prostředek nejen pro studenty, ale také pro vyučující, kteří jej mohou využít k rychlé kontrole výsledků či přípravě výukových materiálů.

Významnou předností Wolfram Alpha je možnost zobrazit krokové postupy řešení. Studenti tak nemají k dispozici pouze finální výsledek, ale také detailní rozpis jednotlivých transformačních kroků, které k němu vedly. Tato funkce může výrazně přispět k pochopení samotného algoritmu řešení a pomoci studentům odhalit případné chyby v jejich vlastních úvahách. Mnohé výstupy jsou navíc doplněny grafickým znázorněním, které usnadňuje interpretaci matematických vztahů a podporuje vizuální porozumění pojmům, jako jsou extrémy funkcí, průběhy grafů či řešení nerovnic.



Obrázek 2: Wolfram Alpha

Wolfram Alpha nachází uplatnění v různých fázích výukového procesu. Je vhodným nástrojem pro kontrolu domácích úloh, protože studentům umožňuje ověřit nejen správnost výsledku, ale i strukturu řešení. V oblasti matematické analýzy mohou prostřednictvím interaktivních grafů zkoumat vlastnosti funkcí, porovnávat jejich derivace nebo analyzovat chování limit. Díky generování velkého množství příkladů lze Wolfram Alpha použít také k procvičování, a to jak během výuky, tak při samostatné přípravě studentů.

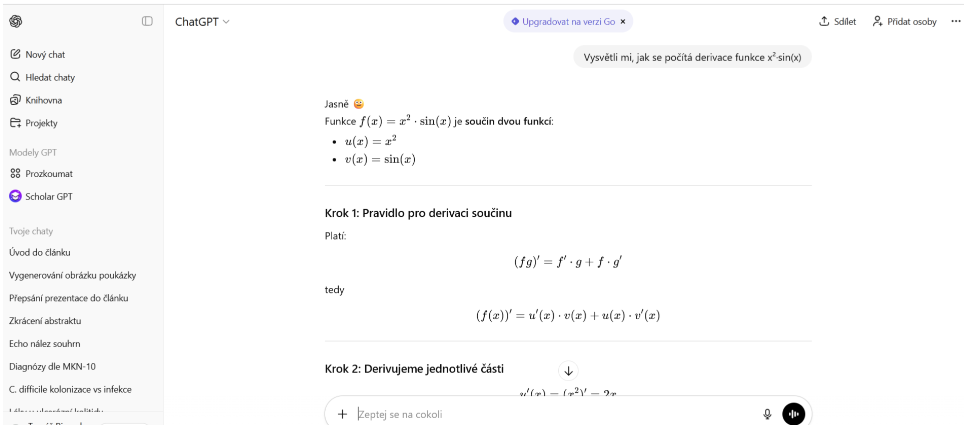
Jeho silnou stránkou je rovněž okamžitá zpětná vazba, která podporuje samostatné studium a umožňuje studentům pracovat vlastním tempem. Využitím tohoto nástroje se zároveň rozvíjí dovednost kriticky hodnotit získané výsledky a porozumět tomu, kdy je vhodné digitální výpočty použít jako podporu vlastního matematického myšlení. Ovšem jako každý program, má Wolfram Alpha svá omezení a některé příklady řeší velmi složitými způsoby, příkladem mohou být integrály s lichými odmocninami ve jmenovateli. Navíc v bezplatné verzi je řešení „step-by-step solution“ omezeno.

4 ChatGPT jako asistent při učení matematiky

ChatGPT představuje nový typ digitálního nástroje, který může vhodně doplňovat tradiční výuku. Dokáže vysvětlovat matematické pojmy a postupy srozumitelným jazykem, poskytovat řešení krok za krokem a přizpůsobit vysvětlení úrovni tazatele. Je proto užitečný nejen pro studenty, ale i pro učitele při přípravě pracovních listů, testů či různých forem výkladu.

Důležitou součástí práce s ChatGPT je rozvoj kritického myšlení. Model může někdy nabídnout nepřesné či dokonce chybné informace, a proto je nutné výsledky porovnávat s učebnicemi či jinými spolehlivými zdroji. Tím se studenti učí nejen formulovat přesné dotazy, ale také hodnotit správnost předložených odpovědí. V dřívější verzi chybně odpověděl např. na otázku, zda-li je funkce $y = \tan x$ prostá? Z pohledu matematiky je tato otázka již špatně formulovaná, a tudíž i odpověď byla chybná. Nutno podotknout, že nenojvěší verze ChatGPT odpovídá již na tuto otázku správně, ovšem stále existují oblasti matematiky, kde odpovídá nesprávně.

ChatGPT může sloužit pro vysvětlení látky, kontrolu řešení i generování nových úloh. Jeho využití poskytuje studentům okamžitou zpětnou vazbu a podporuje jejich samostatnou práci. Pokud je používán jako doplňkový nástroj, může významně přispět k rozvoji porozumění i komunikačních dovedností v matematice.



Obrázek 3: Použití ChatGPT při vysvětlení derivace součinu funkcí

5 Shrnutí a doporučení pro pedagogickou praxi

Digitální nástroje představují příležitost, jak obohatit výuku matematiky o nové formy práce podporující porozumění i samostatné učení. Každý z představených nástrojů nabízí specifické výhody: GeoGebra podporuje vizualizaci a objevování, Wolfram Alpha poskytuje výpočetní oporu a ChatGPT pomáhá s vysvětlováním a reflexí řešení.

Z autorovy pedagogické praxe vyplývá, že digitální technologie nenahrazují tradiční přístupy ani roli učitele – jsou však výrazným rozšířením jeho možností. Úspěšná integrace těchto nástrojů vyžaduje promyšlené začlenění a kritickou práci s výsledky, které software či umělá inteligence nabízí. Schopnost interpretovat, ověřovat a porovnávat digitálně získané informace je klíčovou kompetencí moderního studenta.

Kombinace GeoGebry, Wolfram Alpha a ChatGPT umožňuje propojit vizualizaci, výpočty i vysvětlování do uceleného učebního procesu. Tím může výuka matematiky lépe reagovat na různorodé potřeby studentů, podporovat jejich samostatnost a přispívat k rozvoji digitální gramotnosti. Digitální technologie tak obohacují nejen samotný proces učení, ale také způsob, jakým studenti k matematice přistupují.

Literatura

[1] Applet - Kružnice a přímka. GeoGebra.org [online]. 2025 [cit. 2025-12-09]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/m/exxedxut

[2] Solve - Wolfram Alpha. Wolfram Alpha [online]. 2025 [cit. 2025-12-09]. Dostupné z:

https://www.wolframalpha.com/input?i=solve+x%5E2+%2B+4x+%2B+6+%3D+0

[3] Derivace součinu funkcí. ChatGPT [online]. [cit. 2025-12-09]. Dostupné z: https://chatgpt.com/c/690f6d1c-c30c-832b-80a7-a7e67c3671a1

Mgr. Tomáš Riemel, Ph.D.
Technická univerzita Ostrava,
Fakulta strojní, Katedra matematiky
a deskriptivní geometrie
17. listopadu 2172/15, 708 00 Ostrava-
Poruba
e-mail: tomas.riemel@vsb.cz

VYUŽITÍ 3D TIŠTĚNÝCH MANIPULATIVŮ VE VÝUCE MATEMATIKY NA SŠ: PODPORA POZNÁVACÍCH PROCESŮ ŽÁKŮ

Petra Surynková

Katedra didaktiky matematiky, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova

Abstrakt: Příspěvek se věnuje možnostem využití 3D tištěných pomůcek ve výuce různých matematických témat, zejména planimetrie a stereometrie na střední škole. Ukážeme, jak tyto pomůcky mohou podporovat poznávací procesy žáků a studentů, například při identifikaci klíčových částí geometrické úlohy, hledání různých řešení či rozvíjení prostorové představivosti. Představíme také konkrétní příklady 3D tištěných pomůcek a výsledky práce studentů s jejich využitím.

Klíčová slova: 3D tisk, výuka matematiky s manipulativy, poznávací procesy žáků.

The Use of 3D-Printed Manipulatives in Secondary School Mathematics Education: Supporting Students' Learning Processes

Abstract: This paper focuses on the possibilities of using 3D-printed manipulatives in the teaching of various mathematical topics, particularly plane and spatial geometry at secondary schools. It demonstrates how these tools can support students' learning processes, for example in identifying key elements of a geometric problem, exploring multiple solution strategies, and developing spatial ability. The paper also presents examples of 3D-printed manipulatives and selected outcomes of students' work when these tools are used.

Key words: 3D printing, manipulative-based mathematics education, students' learning processes.

Článek je publikován v časopise *South Bohemia Mathematical Letters*, Vol. 33 (2025), No. 1
Dostupné z: https://home.pf.jcu.cz/~sbml

Název:	Sborník příspěvků 12. konference Užití počítačů ve výuce matematiky
Vydavatel:	Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Editor:	Přemysl Rosa
Vydání:	1.
Počet stran:	130
Rok vydání:	2025
ISBN	978-80-7694-161-8